Міністерство освіти і науки України
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

З. М. Лисенко, Р. В. Шанін

Функціональний аналіз

Частина I: Метричні простори

Конспект лекцій

ОДЕСА
ОНУ
2022

УДК 515.124(075.8)
Л63

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Одеського національного університету імені І. І. Мечникова. Протокол № 6 від 09.12.2021 р.

Рецензенти:

Д. В. Дмитришин — доктор технічних наук, професор, проректор з наукової та науково-педагогічної роботи Державного університету «Одеська політехніка»;

А. О. Кореновський — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

Лисенко З. М., Шанін Р. В.

Л63 Функціональний аналіз. Частина I: Метричні простори. Конспект лекцій / З. М. Лисенко, Р. В. Шанін. — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022. — 78 с.

ISBN 978–617–689–521–3

Конспект лекцій написано відповідно до програми курсу «Функціональний аналіз», що читається студентам 3 курсу спеціальності 111 «Математика». Викладено основи теорії метричних просторів, наведено приклади важливих для застосувань метричних просторів, введено важливі поняття повного метричного простору, сепарабельного простору, компактних метричних просторів, стискаючих відображень. Показано застосування цих понять для розв'язання окремих задач.

Для підготовки студентів спеціальності 111 «Математика».

УДК 515.124(075.8)

ISBN 978–617–689–521–3

Зміст

Вступ

Функціональний аналіз історично виник в результаті розвитку ідей математичного аналізу та лінійної алгебри. Сам термін «функціональний аналіз» був запропонований на початку XX століття Ж. Адамаром. Зараз функціональний аналіз є єдиною мовою всієї неперервної математики. Жодне серйозне дослідження з теорії функцій, з диференціальних рівнянь і математичної фізики, з чисельних методів, з математичної економіки і теорії керування та з інших розділів не можуть обійтися без широкого застосування мови і результатів функціонального аналізу. Саме цьому функціональний аналіз відіграє важливу роль в математичній освіті, а його методи мають численні застосування на практиці.

Місце курсу у навчальному процесі. Базовими дисциплінами для курсу функціонального аналізу є математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія, теорія міри та інтегралу Лебега, теорія функцій комплексної змінної. Знання функціонального аналізу необхідне для повного розуміння наступних дисциплін: диференціальні рівняння, методи математичної фізики (диференціальні рівняння з частинними похідними), дослідження операцій, теорія оптимального керування, топологія, різноманітні спецкурси, де використовуються поняття та факти функціонального аналізу.

Змістом даного конспекту лекцій є теорія метричних просторів. В ньому наведено приклади важливих для застосувань метричних просторів, введено важливі поняття повного метричного простору, сепарабельного простору, компактних метричних просторів, стискаючих відображень. Показано застосування цих понять для розв'язання окремих задач.

Лекція 1
Метричні простори

1.1 Метрика. Означення та приклади метричних просторів

Нагадаємо, що, для непорожніх множин X і Y, *декартовим добутком множин* X і Y називається множина

$$X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X,\ y \in Y\}.$$

Якщо $X = Y$, то декартів добуток множин X і Y позначається X^2.

Означення 1.1. Нехай X — непорожня множина. Відображення $\rho \colon X^2 \to \mathbb{R}$ називається *метрикою* заданою на X, якщо для всіх x, y, $z \in X$ виконуються наступні властивості (аксіоми метрики):

(*i*) $\rho(x, y) \geqslant 0$ і $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$;

(*ii*) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симетричність);

(*iii*) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

Нехай X — непорожня множина на якій задана метрика ρ. Пара (X, ρ) називається *метричним простором.* Елементи множини X будемо називати точками метричного простору.

Зауваження 1.2. Із рівності $\rho(x, x) = 0$ і аксіом (*ii*), (*iii*) означення 1.1 випливає, що $\rho(x, y) \geqslant 0$. Дійсно, для будь-яких x, $y \in X$,

$$0 = \rho(x, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y).$$

Зауваження 1.3. Зазначимо, що на одній і тій же множині X можна задавати різні метрики ρ_1 і ρ_2. При цьому, якщо $\rho_1 \neq \rho_2$, то (X, ρ_1) і (X, ρ_2) — це різні метричні простори.

Зауваження 1.4. Будь-яку непорожню множину X можна метризувати за допомогою метрики

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

Метричний простір (X,ρ) називається простором *ізольованих точок.*

Нехай (X,ρ) — метричний простір і Y будь-яка непорожня підмножина множини X. Розглянемо звуження $\rho|_{Y\times Y}$ метрики ρ на множину $Y\times Y$. Легко бачити, що $\rho|_{Y\times Y}$ метрика на Y. Метричний простір $(Y,\rho|_{Y\times Y})$ називається *підпростором* простору (X,ρ). Зазначимо, що метрику простору $(Y,\rho|_{Y\times Y})$ прийнято позначати тим же символом ρ, що і метрику простору X і писати (Y,ρ) замість $(Y,\rho|_{Y\times Y})$.

Вправа 1.1.1. Показати, що якщо ρ — метрика на X, то

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \quad \text{і} \quad \rho_2(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$$

також метрики на X.

Наведемо приклади метричних просторів.

Приклад 1.5. Простір $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ усіх дійсних чисел з метрикою

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

Приклад 1.6. Простір $\mathbb{C}$ усіх комплексних чисел з метрикою

$$\rho(z,w)=|z-w|.$$

Приклад 1.7. Простір $\mathbb{R}^d=\{(x_1,\ldots,x_d)\colon x_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,d}\}$ з метриками

$$\rho_p(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}, \quad p\geqslant 1, \quad \rho_\infty(x,y)=\max_{i=\overline{1,d}}\{|x_i-y_i|\}.$$

Метрика ρ_2 називається евклідовою метрикою. Вона є узагальненням стандартної метрики, що заснована на теоремі Піфагора.

Вправа 1.1.2. Довести, що у просторі $\mathbb{R}^d$ метрики ρ_1, ρ_2 та ρ_∞ задовольняють нерівності

$$\frac{\rho_2(x,y)}{\sqrt{d}} \leqslant \rho_\infty(x,y) \leqslant \rho_1(x,y) \leqslant d\rho_\infty(x,y).$$

Приклад 1.8. Простір $\mathbb{C}^n = \{(z_1,\dots,z_n)\colon z_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{1,n}\}$ з метрикою

$$\rho_2(z,w) = \left(\sum_{i=1}^n |z_i - w_i|^2\right)^{1/2}.$$

Приклад 1.9. Простір $C([a,b])$ усіх дійсних неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій з метриками

$$\rho_p(x,y) = \rho_{C_p}(x,y) = \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$
$$\rho_\infty(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)-y(t)|.$$

Метрика ρ_∞ називається чебишевською або рівномірною метрикою. Простір $(C([a,b]),\rho_p)$ ми будемо позначати символом $C_p([a,b])$. Простір $(C([a,b]),\rho_\infty)$ будемо позначати символом $C([a,b])$.

Приклад 1.10. Простір l_∞ усіх обмежених дійсних числових послідовностей,

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M,$$

з метрикою

$$\rho(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Приклад 1.11. Простір c усіх збіжних послідовностей дійсних чисел з тією ж самою метрикою, що і в l_∞.

Приклад 1.12. Простір c_0 усіх нескінченно малих послідовностей дійсних чисел з тією ж самою метрикою, що і в l_∞ — метричний простір.

Зауваження 1.13. Ясно, що $c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Приклад 1.14. Простір $C^m([a,b])$ усіх означених на відрізку $[a,b]$ дійсних функцій, які мають неперервні похідні до m-ого порядку включно з метрикою

$$\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|,$$

де через $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ позначено i-ті похідні функцій x і y відповідно і $x^{(0)} = x$, $y^{(0)} = y$.

Приклад 1.15. Простір $C_\varphi([a,b])$ усіх означених на відрізку $[a,b]$ дійсних неперервних функцій з метрикою

$$\rho_\varphi(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |\varphi(t)(x(t) - y(t))|,$$

де φ — фіксована неперервна на $[a,b]$ функція.

1.2 Простір l_p

Для $p \geqslant 1$ через l_p позначимо множину усіх числових послідовностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

На цьому просторі задамо метрику формулою

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Очевидно, що аксіоми (i) і (ii) означення метрики 1.1 виконуються. Перед тим як перевірити виконання нерівності трикутника, доведемо допоміжні нерівності.

Лема 1.16 (нерівність Юнга). *Нехай u, $v > 0$ і числа p, $q > 1$ такі, що $1/p + 1/q = 1$. Тоді*

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \tag{1.1}$$

Доведення. Легко бачити, що одне із чисел p і q не менше 2, а друге не більше 2. Для визначеності, будемо вважати, що $p \geqslant 2$ і $1 < q \leqslant 2$. Покладемо $\alpha = p - 1 \geqslant 1$ і розглянемо строго зростаючу на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функцію $y = x^\alpha$. На осях Ox і Oy візьмемо точки $x = u$ та $y = v$ відповідно (див. рис. 1.1).

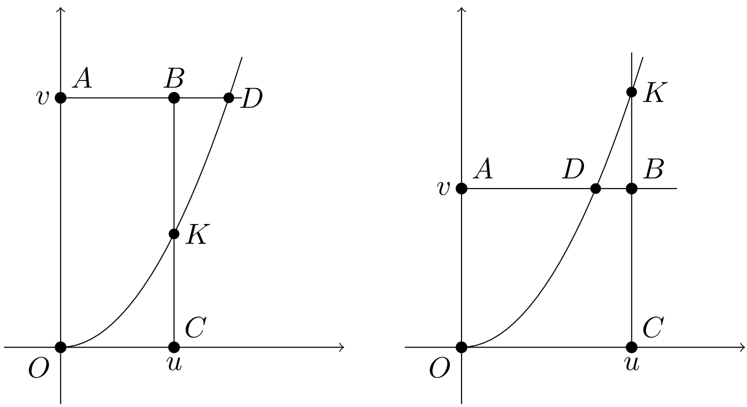

Рис. 1.1: Графік функції $y = x^\alpha$, $\alpha > 1$.

Легко бачити, що

$$S_{OKC} = \int_0^u x^\alpha \, dx = \left. \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_0^u = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

$$S_{OAD} = \int_0^v x^{1/\alpha} \, dx = \left. \frac{x^{1/\alpha+1}}{1/\alpha+1} \right|_0^v = \frac{v^{1/\alpha+1}}{1/\alpha+1}.$$

Оскільки $\alpha = p - 1$, то $p = \alpha + 1$, $q = 1/\alpha + 1$. Звідси, враховуючи нерівність $S_{OABC} \leqslant S_{OKC} + S_{OAD}$ (див. рис. 1.1), отримуємо

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

що і треба було довести. □

Лема 1.17. *Для будь-яких a і $b \in \mathbb{R}$ і для будь-якого $p \geqslant 1$ має місце нерівність*

$$|a+b|^p \leqslant 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right). \tag{1.2}$$

Доведення. Використовуючи очевидну нерівність

$$|a| + |b| \leqslant 2\max\{|a|, |b|\} \leqslant 2(|a| + |b|),$$

а також нерівність трикутника, отримуємо

$$\begin{aligned} |a+b|^p &\leqslant (|a| + |b|)^p \leqslant (2\max\{|a|, |b|\})^p \\ &\leqslant 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \leqslant 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right). \end{aligned}$$

Лему доведено. □

Теорема 1.18 (нерівність Гельдера для рядів)**.** *Нехай p, $q > 1$ такі, що $1/p + 1/q = 1$ і нехай $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$, $y = (y)_{n\in\mathbb{N}} \in l_q$. Тоді*

$$xy = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, \ldots) \in l_1$$

і має місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}. \tag{1.3}$$

Доведення. Якщо $x_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ або $y_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то нерівність (1.3) очевидно виконується. Нехай $x \neq (0, \ldots, 0, \ldots)$ і $y \neq (0, \ldots, 0, \ldots)$. Покладемо

$$u_k = \frac{|x_k|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}}, \quad v_k = \frac{|y_k|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}}.$$

За нерівністю Юнга (1.1) маємо

$$u_k v_k \leqslant \frac{u_k^p}{p} + \frac{v_k^q}{q} = c_k. \tag{1.4}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ збігається, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x_k|^p}{p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} + \frac{|y_k|^q}{q \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q} \right)$$
$$= \frac{1}{p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \frac{1}{q \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q} \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тоді, за ознакою порівняння у формі нерівностей для рядів з невід'ємними членами, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ також збігається і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k y_k|}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}} \leqslant 1.$$

Остання нерівність рівносильна (1.3). □

Зауваження 1.19. Якщо $p = q = 2$, то отримаємо нерівність Коші — Буняковського — Шварца для рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Теорема 1.20 (нерівність Мінковського для рядів)**.** *Нехай $p \geqslant 1$ і точки α, $\beta \in l_p$, $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty}$. Тоді $\alpha + \beta \in l_p$ і має місце нерівність*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n + \beta_n|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p \right)^{1/p}. \tag{1.5}$$

Доведення. Якщо $p = 1$, то нерівність (1.5) — це простий наслідок нерівності трикутника для модуля дійсного числа. Розглянемо випадок $p > 1$.

За лемою 1.17, для всіх $n \geqslant 1$ маємо $|\alpha_n + \beta_n|^p \leqslant 2^p \left(|\alpha_n|^p + |\beta_n|^p\right)$. З останньої нерівності та ознаки порівняння рядів випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n + \beta_n|^p$ збігається і, отже, $\alpha + \beta \in l_p$. Застосовуючи нерівність трикутника і нерівність Гельдера (1.3), отримуємо

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^{p-1}|\alpha_n+\beta_n| \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|\cdot|\alpha_n+\beta_n|^{p-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|\cdot|\alpha_n+\beta_n|^{p-1} \\ &\leqslant \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n+\beta_n|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} \\ &= \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^p \\ &\qquad\leqslant \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Розділивши обидві частини цієї нерівності на

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^p\right)^{1/q}$$

і враховуючи, що $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, отримаємо (1.5). $\square$

Покажемо, що для функції ρ виконується нерівність трикутника. Дійсно, нехай $x,\ y,\ z\in l_p$, $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $z=(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Покладемо $\alpha=x-z$, $\beta=z-y$. Тоді $\alpha+\beta=x-y$. Використовуючи теорему 1.20, отримуємо

$$\begin{aligned}\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n+\beta_n|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - z_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - y_n|^p\right)^{1/p}$$
$$= \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Таким чином, $l_p = (l_p, \rho)$ — метричний простір.

1.3 Нерівності Гельдера і Мінковського для інтегралів

Для $p \geqslant 1$ через $\mathcal{L}_p([a,b])$ позначимо множину усіх вимірних за Лебегом на відрізку $[a,b]$ функцій x, які задовольняють умову

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty.$$

Нехай

$$\rho_{\mathcal{L}_p}(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad x, y \in \mathcal{L}_p([a,b]).$$

Для подальшого нам знадобляться наступні твердження.

Теорема 1.21 (нерівність Гельдера для інтегралів)**.** *Нехай p, $q > 1$ такі, що $1/p + 1/q = 1$ і нехай $x \in \mathcal{L}_p([a,b])$ і $y \in \mathcal{L}_q([a,b])$. Тоді $xy \in \mathcal{L}_1([a,b])$ і має місце нерівність*

$$\int_a^b |x(t)y(t)| \, dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{1/q}. \tag{1.6}$$

Доведення. Якщо $x(t) = 0$ або $y(t) = 0$ майже скрізь (м.с.) на $[a,b]$, то $x(t)y(t) = 0$ майже скрізь на $[a,b]$ і (1.6) виконується.

Нехай тепер $x(t) \neq 0$ і $y(t) \neq 0$ на деяких підмножинах додатної міри відрізку $[a,b]$. Тоді, за властивістю інтегралу Лебега, маємо

$$\int_a^b |x(t)|^p \, dt \neq 0, \quad \int_a^b |y(t)|^q \, dt \neq 0.$$

Введемо позначення

$$u(t) = \frac{|x(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}}, \quad v(t) = \frac{|y(t)|}{\left(\int_a^b |y(t)|^q \, dt\right)^{1/q}}.$$

За нерівністю Юнга (1.1) маємо

$$u(t)v(t) \leqslant \frac{u^p(t)}{p} + \frac{v^q(t)}{q}. \tag{1.7}$$

За умовами теореми права частина (1.7) інтегровна на $[a, b]$. Тоді, за властивістю інтеграла Лебега, ліва частина (1.7) також інтегровна на $[a, b]$. Інтегруючи цю нерівність на відрізку $[a, b]$, отримаємо

$$\int_a^b \frac{|x(t)y(t)|}{\left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q \, dt\right)^{1/q}} \, dt \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Отримана нерівність рівносильна (1.6). $\square$

Зауваження 1.22. Якщо $p = q = 2$, то отримаємо нерівність Коші — Буняковського — Шварца

$$\int_a^b |x(t)y(t)| \, dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b |y(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}.$$

Теорема 1.23 (нерівність Мінковського для інтегралів)**.** *Нехай $p \geqslant 1$ і x, $y \in \mathcal{L}_p([a, b])$. Тоді $x + y \in \mathcal{L}_p([a, b])$ і має місце нерівність*

$$\begin{aligned} &\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \\ &\qquad \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Доведення. Якщо $x + y = 0$ майже скрізь на відрізку $[a, b]$, то нерівність, очевидно, виконується. Припустимо тепер, що $x + y$ не дорівнює 0 на деякій підмножині додатної міри відрізку $[a, b]$.

Якщо $p = 1$, то нерівність (1.8) це простий наслідок нерівності трикутника для модуля дійсного числа. Розглянемо тепер випадок $p > 1$.

За лемою 1.17 маємо $|x(t) + y(t)|^p \leqslant 2^p \left(|x(t)|^p + |y(t)|^p\right)$. Тоді, за властивістю інтеграла Лебега,

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt < \infty$$

і, отже, $x + y \in \mathcal{L}_p([a, b])$. Для заданого $p > 1$ покладемо $q = \frac{p}{p-1}$. Тоді $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Оскільки

$$\int_a^b \left(|x(t) + y(t)|^{p-1}\right)^q \, dt = \int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt < \infty,$$

то $|x+y|^{p-1} \in \mathcal{L}_q([a, b])$. Звідси, застосовуючи нерівність трикутника і нерівність Гельдера (1.6), отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt &= \int_a^b |x(t) + y(t)|^{p-1} |x(t) + y(t)| \, dt \\
&\leqslant \int_a^b |x(t)| \cdot |x(t) + y(t)|^{p-1} \, dt + \int_a^b |y(t)| \cdot |x(t) + y(t)|^{p-1} \, dt \\
&\leqslant \left(\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p} \right) \\
&\qquad \times \left(\int_a^b \left(|x(t) + y(t)|^{p-1}\right)^q \, dt \right)^{1/q} \\
&= \left(\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p} \right) \\
&\qquad \times \left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали

$$\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt \leqslant \left(\left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \right.$$

$$+\left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{1/p}\right)\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\, dt\right)^{1/q}.$$

Розділивши обидві частини цієї нерівності на

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\, dt\right)^{1/q}$$

і враховуючи, що $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, отримаємо (1.8). $\square$

Лекція 2
Метричні простори

2.1 Простір L_p

Відношенням R на непорожній множині X називається будь-яка підмножина множини X^2. Якщо $(x, y) \in R$, то пишуть xRy.

Означення 2.1. Відношення R задане на множині X називається *відношенням еквівалентності*, якщо

(*i*) для всіх $x \in X$ виконується $(x, x) \in R$ (рефлексивність);

(*ii*) для всіх x, $y \in X$, якщо $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$ (симетричність);

(*iii*) для всіх x, y, $z \in X$, якщо $(x, y) \in R$ і $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$ (транзитивність).

Нехай на множині X задано відношення еквівалентності $\sim$. Для будь-якого $a \in X$ *класом еквівалентності* $[a]$ називається підмножина еквівалентних a елементів,

$$[a] = \{x \in X : x \sim a\}.$$

Множина усіх класів еквівалентності множини X по відношенню $\sim$ називається *фактор-множиною* і позначається $X/{\sim}$.

Приклад 2.2. На множині $\mathcal{L}_p([a, b])$ введемо відношення еквівалентності

$$\forall x, y \in \mathcal{L}_p([a, b]) \ \big((x \sim y) \Leftrightarrow (\rho_{\mathcal{L}_p}(x, y) = 0)\big).$$

Із теорії міри і інтегралу Лебега відомо, що

$$\forall x, y \in \mathcal{L}_p([a, b]) \ \big((\rho_{\mathcal{L}_p}(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y \text{ майже скрізь})\big).$$

Таким чином,

$$\forall x, y \in \mathcal{L}_p([a,b]) \ \big((x \sim y) \Leftrightarrow (x = y \text{ майже скрізь})\big).$$

Позначимо $L_p([a,b]) = \mathcal{L}_p([a,b])/\!\sim$. Зазначимо, що елементами простору $L_p([a,b])$ є класи еквівалентних між собою функцій. Також в цьому випадку кажуть, що елементами $L_p([a,b])$ є майже всюди задані функції. На $L_p([a,b])$ означимо функцію $\rho_{L_p}\colon X^2 \to \mathbb{R}$ наступним чином

$$\rho_{L_p}(u,v) = \rho_{\mathcal{L}_p}(x,y), \quad x \in u \in L_p([a,b]), \quad y \in v \in L_p([a,b]).$$

Покажемо, що $(L_p([a,b]), \rho_{L_p})$ — це метричний простір.

Спочатку покажемо, що означення функції ρ_{L_p} коректне. Нехай u, $v \in L_p([a,b])$ і x_1, $x_2 \in u$, y_1, $y_2 \in v$. Тоді $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$. Це означає, що $\rho_{\mathcal{L}_p}(x_1,y_1) = \rho_{\mathcal{L}_p}(x_2,y_2)$. Таким чином, значення $\rho_{L_p}(u,v)$ не залежить від вибору представників класів u, v і означення ρ_{L_p} коректне.

Нехай u, $v \in L_p([a,b])$, $u \neq v$. Тоді $x - y \neq 0$ на деякій підмножині додатної міри відрізку $[a,b]$ для всіх $x \in u$ і для всіх $y \in v$. Звідси випливає, що $\rho_{L_p}(u,v) = \rho_{\mathcal{L}_p}(x,y) > 0$. Оскільки $\rho_{L_p}(u,u) = \rho_{\mathcal{L}_p}(x,x) = 0$ і $\rho_{\mathcal{L}_p}(x,y) \geqslant 0$ для всіх x, $y \in \mathcal{L}_p([a,b])$, то виконується аксіома (i) означення метрики 1.1.

Нехай u, $v \in L_p([a,b])$ і $x \in u$, $y \in v$. Тоді

$$\rho_{L_p}(u,v) = \rho_{\mathcal{L}_p}(x,y) = \rho_{\mathcal{L}_p}(y,x) = \rho_{L_p}(v,u)$$

і, таким чином, виконується аксіома (ii) означення метрики 1.1.

Покажемо тепер, що виконується аксіома трикутника (iii) означення метрики 1.1. Нехай $u, v, w \in L_p([a,b])$ і $x \in u$, $y \in v$, $z \in w$. Оскільки $x - y = (x - z) + (z - y)$, то, за нерівністю Мінковського 1.23, маємо

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{L}_p}(x,y) &= \left(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\\ &\leqslant \left(\int_a^b |x(t)-z(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |z(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\\ &= \rho_{\mathcal{L}_p}(x,z)+\rho_{\mathcal{L}_p}(z,y).\end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\rho_{L_p}(u,v) \leqslant \rho_{L_p}(u,w) + \rho_{L_p}(w,v)$, тобто виконується аксіома трикутника (iii) означення метрики 1.1.

Таким чином, ми показали, що $(L_p([a,b]), \rho_{L_p})$ — це метричний простір.

Зауваження 2.3. Легко бачити, що $C([a,b]) \subset \mathcal{L}_p([a,b])$. Звідси випливає, що для кожної функції $x \in C([a,b])$ існує єдиний $u \in L_p([a,b])$, такий, що $x \in u$. Позначимо

$$\widetilde{C}([a,b]) = \{u \in L_p([a,b])\colon \exists x \in C([a,b]) \cap u\}.$$

Зазначимо, що для будь-якого $u \in \widetilde{C}([a,b])$ існує єдиний $x \in C([a,b])$, такий, що $x \in u$. Такими чином, існує взаємно однозначна відповідність між множинами $C([a,b])$ і $\widetilde{C}([a,b])$. Далі, для будь-яких u, $v \in \widetilde{C}([a,b])$ покладемо

$$\widetilde{\rho}_p(u,v) = \rho_{L_p}(u,v) = \rho_{C_p}(x,y),$$

де $x \in u \cap C([a,b])$ і $y \in v \cap C([a,b])$. Звідси випливає, що, з точки зору метричних властивостей, простори $(C([a,b]), \rho_{C_p})$ і $(\widetilde{C}([a,b]), \widetilde{\rho}_p)$ збігаються. Тому в подальшому ми ці простори не будемо розрізняти і будемо писати $C_p([a,b] \subset L_p([a,b])$.

Вправа 2.1.1. Дати геометричну інтерпретацію метрики в $L_1([a,b])$.

Приклад 2.4. Нехай φ — задана на відрізку $[a,b]$ дійсна невід'ємна функція майже скрізь відмінна від нуля і $p \geqslant 1$. Через $\mathcal{L}_{p,\varphi}([a,b])$ позначимо множину усіх вимірних на $[a,b]$ функцій, таких, що

$$\int_a^b |x(t)|^p \varphi(t)\,dt < \infty$$

і покладемо

$$\forall x, y \in \mathcal{L}_{p,\varphi}([a,b]) \ \big((x \sim y) \Leftrightarrow (x = y \text{ майже скрізь})\big).$$

Позначимо $L_{p,\varphi}([a,b]) = \mathcal{L}_{p,\varphi}([a,b])/{\sim}$. На $L_{p,\varphi}([a,b])$ означимо функцію $\rho_{p,\varphi}\colon X^2 \to \mathbb{R}$ наступним чином

$$\rho_{p,\varphi}(u,v) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^p \varphi(t)\,dt,$$

де $x \in u \in L_{p,\varphi}([a,b])$, $y \in v \in L_{p,\varphi}([a,b])$. Аналогічно до прикладу 2.2 можна довести, що $(L_{p,\varphi}([a,b]), \rho_{p,\varphi})$ — метричний простір.

2.2 Топологія метричного простору

Нехай (X,ρ) — метричний простір.

Означення 2.5. *Відкритою кулею* з *центром* в точці $x_0 \in X$ і *радіусом* $r > 0$ називається множина

$$B(x_0, r) = \{x \in X \colon \rho(x_0, x) < r\}.$$

Вправа 2.2.1. Побудувати одиничну кулю $B(\theta,1)$, де $\theta = (0,0)$, у метричних просторах $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$.

Означення 2.6. Точка $x_0 \in E$ називається *внутрішньою точкою* множини $E \subset X$, якщо існує куля $B(x_0, r)$ така, що $B(x_0, r) \subset E$.

Означення 2.7. Множина E називається *відкритою*, якщо усі її точки є внутрішніми точками цієї множини.

Зауваження 2.8. Пусту множину $\varnothing$ за означенням вважаємо відкритою.

Вправа 2.2.2. Показати, що будь-яка відкрита куля $B(x_0, r)$ це відкрита множина.

Теорема 2.9 (властивості відкритих множин)**.** *Відкриті множини мають наступні властивості:*

(i) *Перетин будь-якого скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною.*

(ii) *Об'єднання будь-якого сімейства відкритих множин є відкритою множиною.*

Доведення. (i). Нехай

$$G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i,$$

де G_i — відкрита множина для всіх $i = 1, \ldots, n$, і нехай $x \in G$ — довільна точка цієї множини. Тоді $x \in G_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$ і, таким чином, x — внутрішня точка кожної множини G_i. З означення внутрішньої точки випливає, що для кожного $i = 1, \ldots, n$ існує $B(x, r_i) \subset G_i$. Позначимо $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$. Тоді $B(x, r) \subset G_i$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Таким чином, x — внутрішня точка множини G. Оскільки точка x довільна, то звідси випливає, що множина G відкрита.

(ii). Нехай задано сімейство відкритих множин $\{G_\alpha \colon \alpha \in A\}$, де A — деяка множина індексів, і нехай

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Тоді, для довільної точки $x \in G$, існує таке $\alpha \in A$, що $x \in G_\alpha$. Оскільки множина G_α відкрита, то існує відкрита куля $B(x, r) \subset G_\alpha$. Звідси випливає, що

$$B(x, r) \subset G_\alpha \subset G.$$

Таким чином, x — внутрішня точка множини G. Оскільки точка x довільна, то множина G відкрита. □

Означення 2.10. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $x_0 \in X$. *Околом точки* x_0 називається будь-яка відкрита множина, що містить цю точку.

Означення 2.11. Точка x_0 називається *граничною точкою* множини E, якщо у будь-якому околі цієї точки міститься точка із E відмінна від x_0.

Означення 2.12. Множина E називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Зауваження 2.13. Пусту множину $\varnothing$ будемо вважати замкненою.

Вправа 2.2.3. Показати, що будь-яка замкнена куля

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X \colon \rho(x, x_0) \leqslant r\}$$

є замкненою множиною.

Теорема 2.14 (Про зв'язок між відкритими і замкненими множинами)**.** *Множина E замкнена тоді і тільки тоді, коли її доповнення $X \setminus E$ відкрите.*

Доведення. Необхідність. Нехай E — замкнена множина, $G = X \setminus E$ і $x_0 \in G$ — довільна точка. Оскільки $x_0 \notin E$, то x_0 не є граничною точкою множини E, тобто знайдеться окіл U точки x_0 у якому нема точок множини E. Звідси випливає, що $U \subset G$ і, отже, x_0 — внутрішня точка множини G. Оскільки x_0 довільна точка множини G, то G відкрита.

Достатність. Нехай $G = X \setminus E$ — відкрита множина і x_0 — довільна гранична точка множини E. Припустимо, що $x_0 \notin E$, тобто $x_0 \in G$. Оскільки G — відкрита множина, то існує така куля $B(x_0, r)$, що $B(x_0, r) \subset G$ і, отже, $B(x_0, r) \cap E = \varnothing$. Остання рівність суперечить тому, що x_0 — гранична точка множини E. Значить припущення, що $x_0 \notin E$ хибне і множина E замкнена. □

Теорема 2.15 (Властивості замкнених множин)**.** *Замкнені множини мають наступні властивості:*

(i) *Перетин будь-якого сімейства замкнених множин є замкненою множиною.*

(ii) *Об'єднання будь-якого скінченного числа замкнених множин є замкненою множиною.*

Доведення. (i). Нехай задано сімейство F_α, $\alpha \in A$, замкнених множин, де A — деяка множина індексів. Позначимо

$$F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha.$$

За теоремою 2.14 множина F замкнена тоді і тільки тоді, коли множина $G = X \setminus F$ — відкрита. Застосовуючи закони де Моргана, отримуємо

$$G = X \setminus F = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha).$$

Застосовуючи теорему 2.14 отримуємо, що множина $X \setminus F_\alpha$ відкрита для будь-якого $\alpha \in A$. З теореми 2.9 отримуємо, що G — відкрита множина як об'єднання сімейства відкритих множин. Отже, за теоремою 2.14, множина F замкнена.

(ii). Нехай задано скінченний набір замкнених множин F_i, $i = 1, \ldots, n$. Позначимо

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

Покажемо, що множина F — замкнена. За теоремою 2.14 множина F замкнена тоді і тільки тоді, коли множина $G = X \setminus F$ — відкрита.

Застосовуючи закони де Моргана, отримуємо

$$G = X \setminus F = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i).$$

За теоремою 2.14 множина $X \setminus F_i$ відкрита для будь-якого $i = 1, \ldots, n$. З теореми 2.9 отримуємо, що G — відкрита множина як перетин скінченного числа відкритих множин. Отже, за теоремою 2.14, множина F замкнена. $\square$

Означення 2.16. Нехай E' — множина усіх граничних точок множини E. *Замиканням множини* E називається множина

$$\overline{E} = E \cup E'.$$

Вправа 2.2.4. Показати, що $\overline{E}$ — замкнена множина.

Вправа 2.2.5. Показати, що

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supset E} F,$$

де перетин береться по всім замкненим множинам, що містять E.

2.3 Збіжні послідовності точок у метричному просторі

За допомогою метрики у метричному просторі (X, ρ) можна ввести поняття границі послідовності точок цього простору.

Нагадаємо, що послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точок метричного простору (X, ρ) називається функція $x \colon \mathbb{N} \to X$, де $x_n = x(n)$.

Означення 2.17. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність точок метричного простору (X, ρ). Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збігається до точки* $a \in X$, якщо

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, a) = 0.$$

Іншими словами, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збігається до точки* $a \in X$, якщо
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до точки $a \in X$, то пишуть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a, \ n \to \infty.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякої точки $a \in X$, то кажуть, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збіжна*. В іншому випадку, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається *розбіжною*.

Геометричний зміст збіжності послідовності. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякої точки $a \in X$, якщо будь-який окіл точки a містить *усі елементи* послідовності за винятком, можливо, їх скінченного числа (це формулювання можна прийняти за рівносильне означення збіжної послідовності).

Означення 2.18. Множина E у метричному просторі (X, ρ) називається *обмеженою*, якщо існує куля $B(a, r)$, що містить E: $E \subset B(a, r)$.

Встановимо деякі властивості збіжних послідовностей в метричному просторі.

Теорема 2.19 (Про обмеженість збіжної послідовності)**.** *Якщо послідовність збігається, то вона обмежена.*

Доведення. Нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді існує такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geqslant N$ виконується нерівність $\rho(x_n, a) < 1$, тобто $x_n \in B(a, 1)$ для всіх $n \geqslant N$. Позначимо
$$r = \max\{1, \rho(x_1, a), \ldots, \rho(x_{N-1}, a)\} > 0.$$

Тоді очевидно, що $x_n \in B(a, r)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена. □

Теорема 2.20 (Про єдиність границі)**.** *Якщо послідовність збігається, то вона має лише одну границю.*

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається. Припустимо, що існують такі a, $b \in X$, $a \neq b$, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ і } \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Тоді із нерівності трикутника випливає, що

$$0 \leqslant \rho(a,b) \leqslant \rho(x_n,a) + \rho(x_n,b)$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Переходячи в останній нерівності до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\rho(a,b) = 0$. Звідси із пункту (i) означення 1.1 випливає, що $a = b$. Отримали суперечність. $\square$

Для метричного простору означення граничної точки множини може бути сформульовано у термінах збіжних послідовностей.

Теорема 2.21 (Про граничну точку як границю послідовності)**.** *Нехай (X,ρ) — метричний простір, $E \subset X$. Точка x_0 є граничною точкою множини E тоді і тільки тоді, коли існує послідовність попарно різних точок із E, що збігається до x_0.*

Доведення. Необхідність. Нехай x_0 — гранична точка множини E. Тоді у будь-якому околі цієї точки міститься нескінченна множина точок із E. Дійсно, нехай U — довільний окіл точки x_0. Припустимо протилежне, що

$$(U \cap E) \setminus \{x_0\} = \{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Позначимо $r = \min\{\rho(y_1,x_0), \ldots, \rho(y_n,x_0)\} > 0$. Тоді $B(x_0,r) \subset U$ і

$$(B(x_0,r) \cap E) \setminus \{x_0\} = \varnothing,$$

що суперечить тому, що точка x_0 гранична.

Покладемо

$$B_n = B\left(x_0, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Візьмемо будь-яку точку $x_1 \in B_1 \cap E$. Далі виберемо точку $x_2 \in B_2 \cap E$ відмінну від x_1 (це можна зробити, оскільки в B_2 нескінченно багато точок із E). Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ таку, що $x_n \in B_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x_n \neq x_i$ для всіх $i = 1, \ldots, n-1$. Оскільки

$$0 < \rho(x_0, x_n) < \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Достатність очевидна. □

Приклад 2.22. Нехай $(X, \rho) = (\mathbb{R}^d, \rho_2)$ (дивись приклад 1.7), нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність векторів із $\mathbb{R}^d$, де $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$, і нехай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = (a^1, \ldots, a^d) \in X.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, a) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{d} |x_n^i - a^i|^2 \right)^{1/2} = 0.$$

Із нерівностей

$$|x_n^j - a^j| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d} |x_n^i - a^i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{d} \max_{i=\overline{1,d}} |x_n^i - a^i|,$$

де $j = 1, \ldots, d$, випливає, що збіжність в $(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ рівносильна збіжності послідовностей координат $\left\{x_n^i\right\}_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, d$.

Приклад 2.23. Нехай $(X, \rho) = (C([a, b]), \rho_\infty)$ (дивись приклад 1.9), нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність точок із $C([a, b])$, і нехай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\rho_\infty(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|=0.$$

Звідси випливає, що збіжність послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ до елемента x в просторі $(C([a,b]),\rho_\infty)$ рівносильна рівномірній збіжності на відрізку $[a,b]$ послідовності неперервних функцій.

Приклад 2.24. Розглянемо метричний простір $L_1([0,1])$ (див. приклад 2.2). В цьому просторі розглянемо послідовність функцій

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant t_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\\ \frac{2t-1}{2t_n-1}, & t_n<t\leqslant\frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}<t\leqslant 1\end{cases}$$

(див. рис. 2.1).

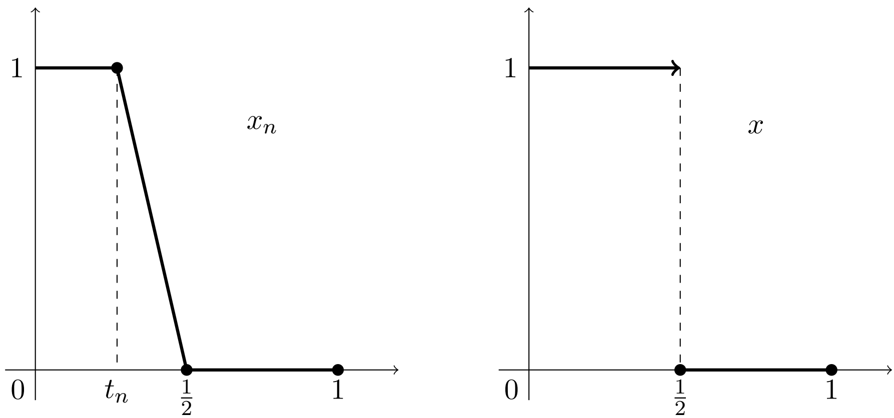

Рис. 2.1: Графіки функцій x_n і x.

Покажемо, що в $L_1([0,1])$ послідовність $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ збігається до функції

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

(див. рис. 2.1). Дійсно,

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x) &= \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|\, dt = \int_{t_n}^{1/2} (x(t) - x_n(t))\, dt \\ &= \int_{t_n}^{1/2} \left(\frac{2t_n - 2t}{2t_n - 1} \right) dt = \frac{2t_n t - t^2}{2t_n - 1} \Big|_{t_n}^{1/2} \\ &= \frac{t_n - 1/4}{2t_n - 1} - \frac{t_n^2}{2t_n - 1} = \frac{4t_n^2 - 4t_n + 1}{-4(2t_n - 1)} \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2t_n) = \frac{1}{2n} \to 0,\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Лекція 3
Повні метричні простори

3.1 Означення повних метричних просторів

У попередньому параграфі ми ввели поняття границі послідовності у метричному просторі. Природно поставити питання: які необхідні і достатні умови існування границі послідовності точок у метричному просторі? Чи існує аналог критерію Коші у метричному просторі?

Означення 3.1. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у метричному просторі (X, ρ) називається *фундаментальною* (або *послідовністю Коші*), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$ (N, взагалі кажучи, залежить від ε), що для всіх n, $m \in \mathbb{N}$, якщо n, $m \geqslant N$, то виконується нерівність $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

За допомогою кванторів означення фундаментальності можна записати наступним чином

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geqslant N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Зауваження 3.2. Легко показати, що будь-яка збіжна послідовність — фундаментальна. Дійсно, нехай $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Це значить, що

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant N \quad \rho(x_k, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Із останнього висловлювання випливає, що для всіх натуральних n, $m \geqslant N$ виконуються нерівності

$$\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Застосовуючи нерівність трикутника, отримуємо

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \varepsilon.$$

Вправа 3.1.1. Доведіть, що якщо у фундаментальної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжна підпослідовність, то послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до тієї ж границі.

Наведемо приклад метричного простору у якому не кожна фундаментальна послідовність буде мати границю.

Приклад 3.3. Нехай $X = \mathbb{Q}$ — множина усіх раціональних чисел,

$$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \quad \rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|,$$

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Із курсу математичного аналізу відомо, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна і має границю в просторі $\mathbb{R}$ дійсних чисел,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна і не має границі в просторі (X, ρ).

Наведений приклад показує, що у довільному метричному просторі аналогу критерію Коші може не бути.

Означення 3.4. Метричний простір (X, ρ) називається *повним*, якщо будь-яка фундаментальна послідовність із цього простору збігається до деякого елементу із цього простору.

Приклад 3.5. Нехай $X = (0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $x_n = \frac{1}{n}$. Тоді послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в (X, ρ), але

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X.$$

Таким чином, простір (X, ρ) не є повний.

Приклад 3.6. Нехай X — множина алгебраїчних многочленів, що задані на відрізку $[-1, 1]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

з метрикою

$$\rho(P,Q)=\max_{x\in[-1,1]}|P(x)-Q(x)|.$$

Розглянемо послідовність многочленів

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},\quad n=0,1,\ldots.$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x\notin X.$$

Таким чином, метричний простір (X,ρ) неповний.

Приклад 3.7. Нехай $(X,\rho)=C_2([-1,1])$ (див. приклад 1.9). Покажемо, що (X,ρ) — це неповний метричний простір. Для цього розглянемо послідовність неперервних на $[-1,1]$ функцій

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & t\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right],\\ nt, & t\in\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),\\ 1, & t\in\left[\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

Ясно, що поточкова границя

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\operatorname{sign}t=\begin{cases}-1, & t\in[-1,0),\\ 0, & t=0,\\ 1, & t\in(0,1].\end{cases}$$

Легко бачити, що якщо $x(t)=\operatorname{sign}t$, то

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x)&=\left(\int_{-1}^{1}|x_n(t)-x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\\ &=\left(\int_{-\frac{1}{n}}^{0}(nt+1)^2\,dt\right)^{1/2}+\left(\int_{0}^{\frac{1}{n}}(nt-1)^2\,dt\right)^{1/2}\\ &=2\left(\int_{0}^{\frac{1}{n}}\left(n^2t^2-2nt+1\right)\,dt\right)^{1/2}=\frac{2}{\sqrt{3n}}\to 0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Таким чином, якщо існує неперервна функція y така, що

$$\rho(x_n, y) = \left(\int_{-1}^{1} |x_n(t) - y(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то, із нерівності трикутника, отримуємо

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає, що $\rho(x, y) = 0$. Із курсу "Теорія міри і інтегралу Лебега" відомо, що якщо інтеграл від невід'ємної функції дорівнює нулю, то ця функція еквівалентна до нуля. Отже, із останньої рівності випливає, що $x \sim y$, що неможливо, оскільки неперервна функція не може бути еквівалентною функції, що має неусувний розрив. Отримали суперечність із якої випливає, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не має границі у просторі $C_2([-1, 1])$. Таким чином, простір $C_2([-1, 1])$ неповний.

3.2 Приклади повних метричних просторів

Приклад 3.8. Простір $(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ (див. приклад 1.7) — повний метричний простір. Повнота випливає з критерію Коші існування границі послідовності точок цього простору.

Приклад 3.9. Простір $(C([a, b]), \rho_\infty)$ (див. приклад 1.9) — повний метричний простір. Оскільки збіжність в $C([a, b])$ це рівномірна збіжність послідовності функцій, то повнота $C([a, b])$ випливає з критерію Коші рівномірної збіжності послідовності функцій.

Приклад 3.10. Простір (l_∞, ρ) (див. приклад 1.10), де

$$\rho(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$

— повний метричний простір. Для доведення цього твердження розглянемо довільну фундаментальну в l_∞ послідовність $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right).$$

Оскільки $x^{(n)} \in l_\infty$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists K_n \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \left|x_i^{(n)}\right| \leqslant K_n.$$

Враховуючи, що послідовність $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, отримуємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \rho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon.$$

Зафіксуємо довільне i в останньому висловлюванні. Тоді отримаємо, що послідовність $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє наступну умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon,$$

тобто числова послідовність $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Застосовуючи критерій Коші для числових послідовностей, отримуємо, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує таке $\alpha_i \in \mathbb{R}$, що

$$\lim_{n \to \infty} x_i^{(n)} = \alpha_i.$$

Позначимо $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots)$. Покажемо, що $\alpha \in l_\infty$. Для цього в нерівності $\left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon$ перейдемо до границі при $m \to \infty$. В результаті отримаємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \left|x_i^{(n)} - \alpha_i\right| \leqslant \varepsilon. \tag{3.1}$$

Звідси випливає, що для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ виконується

$$|\alpha_i| = \left|\alpha_i - x_i^{(N)} + x_i^{(N)}\right| \leqslant \left|x_i^{(N)} - \alpha_i\right| + \left|x_i^{(N)}\right| \leqslant \varepsilon + K_N.$$

Таким чином, отримуємо, що $\alpha \in l_\infty$.

Покажемо тепер, що

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \alpha.$$

Із висловлювання (3.1) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho\left(x^{(n)}, \alpha\right) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|x_i^{(n)} - \alpha_i\right| \leqslant \varepsilon.$$

Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x^{(n)}, \alpha\right) = 0.$$

Таким чином, показали, що довільна фундаментальна послідовність в l_∞ збіжна.

Приклад 3.11. Простір (l_p, ρ), $1 \leqslant p < \infty$ (див. параграф 1.2), де

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{1/p},$$

— повний метричний простір. Для доведення цього твердження розглянемо довільну фундаментальну в l_p послідовність $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right).$$

Оскільки $x^{(n)} \in l_p$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists K_n \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)}\right|^p \leqslant K_n.$$

Враховуючи, що послідовність $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, отримуємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Звідси випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon.$$

Зафіксуємо довільне i в останньому висловлюванні. Тоді отримаємо, що послідовність $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє наступну умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon,$$

тобто числова послідовність $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Застосовуючи критерій Коші для числових послідовностей, отримуємо, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує таке $\alpha_i \in \mathbb{R}$, що

$$\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = \alpha_i.$$

Позначимо $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots)$. Покажемо, що $\alpha \in l_p$. Із (3.2) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geqslant N \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{\nu} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p.$$

В останній нерівності перейдемо до границі при $m \to \infty$. В результаті отримаємо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^{\nu} \left|x_i^{(n)} - \alpha_i\right|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{3.3}$$

Застосовуючи нерівність Мінковського, отримуємо, що для будь-якого $\nu \in \mathbb{N}$ виконується

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{\nu} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^{\nu} \left|\alpha_i - x_i^{(N)} + x_i^{(N)}\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\nu} \left|\alpha_i - x_i^{(N)}\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\nu} \left|x_i^{(N)}\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon + K_N.\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon + K_N.$$

Таким чином, $\alpha \in l_p$.

Покажемо тепер, що

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \alpha.$$

Із висловлювання (3.3) випливає, що

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \rho\left(x^{(n)}, \alpha\right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - \alpha_i\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x^{(n)}, \alpha\right) = 0.$$

Таким чином, показали, що довільна фундаментальна послідовність в l_p збіжна.

Приклад 3.12. Простір $(L_p([a,b]), \rho)$, $1 \leqslant p < \infty$ (див. приклад 2.2) — повний метричний простір. Це випливає з теореми Ріса — Фішера, яка буде доведена пізніше.

Лекція 4
Повні метричні простори

4.1 Перша характеристика повних метричних просторів

Наступна наша ціль — отримати деяку характеристику повних метричних просторів. Відомо яку важливу роль у аналізі відіграє лема Кантора про вкладені відрізки. Вона виражає фундаментальну властивість дійсної прямої $\mathbb{R}$. Грубо кажучи, ця властивість означає відсутність "дір" і виявляється еквівалентною повноті. Покажемо, що в повних метричних просторах має місце аналог теореми про вкладені відрізки.

Лема 4.1 (про вкладені кулі або перша характеристика повних метричних просторів)**.** *Для того, щоб метричний простір (X, ρ) був повним необхідно і достатньо, щоб у ньому кожна послідовність вкладених одна в одну замкнених куль*

$$\overline{B}(x_1, r_1) \supset \overline{B}(x_2, r_2) \supset \ldots \supset \overline{B}(x_n, r_n) \supset \ldots,$$

радіуси яких прямують до нуля, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$*, мала непорожній перетин,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \neq \varnothing.$$

Доведення. Необхідність. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ центрів куль фундаментальна, оскільки

$$\overline{B}(x_{n+p}, r_{n+p}) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$$

для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ і, таким чином, $0 \leqslant \rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

За умовою теореми, метричний простір (X, ρ) — повний. Звідси випливає, що для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ існує таке $x_0 \in X$, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Із умови вкладеності куль випливає, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується

$$\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}, \ldots\} \subset \overline{B}(x_k, r_k).$$

Оскільки $\overline{B}(x_k, r_k)$ це замкнена множина, то $x_0 \in \overline{B}(x_k, r_k)$ як гранична точка множини $\{x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}, \ldots\}$. Таким чином,

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}(x_k, r_k).$$

Достатність. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна фундаментальна послідовність в X. Покажемо, що вона має границю, яка належить X.

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то знайдеться такий номер n_1, що

$$\forall n \geqslant n_1 \quad \rho(x_{n_1}, x_n) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Далі знайдемо такий номер $n_2 > n_1$, що

$$\forall n \geqslant n_2 \quad \rho(x_{n_2}, x_n) \leqslant \frac{1}{2^2}.$$

Продовжуючи цей процес, на k-ому кроці знайдемо такий номер $n_k > n_{k-1}$, що

$$\forall n \geqslant n_k \quad \rho(x_{n_k}, x_n) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

В результаті отримуємо таку послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, що

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_k \quad \rho(x_{n_k}, x_n) \leqslant \frac{1}{2^k} = r_{k+1}.$$

Розглянемо замкнені кулі $\overline{B}(x_{n_k}, r_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, і покажемо, що

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \overline{B}(x_{n_{k+1}}, r_{k+1}) \subset \overline{B}(x_{n_k}, r_k)$$

Дійсно, нехай $x \in \overline{B}(x_{n_{k+1}}, r_{k+1})$. Тоді

$$\begin{aligned}\rho(x_{n_k}, x) &\leqslant \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x) \leqslant r_{k+1} + r_{k+1} \\ &= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} = r_k,\end{aligned}$$

тобто $x \in \overline{B}(x_{n_k}, r_k)$. Ясно, що

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

Таким чином, ми отримали послідовність вкладених замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За умовами теореми, існує точка $x_0 \in X$ така, що

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B}(x_{n_k}, r_k).$$

Оскільки $0 \leqslant \rho(x_{n_k}, x_0) \leqslant r_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то, за теоремою про три границі, маємо

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, x_0) = 0,$$

тобто $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Користуючись фундаментальністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і нерівністю

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0),$$

отримуємо $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. □

Зауваження 4.2. Умова прямування до нуля радіусів замкнених куль — суттєва. Існують повні метричні простори в яких деякі послідовності вкладених замкнених куль мають порожній перетин. Наведемо приклад такого простору.

Приклад 4.3. Нехай $X = \mathbb{N}$. Покладемо

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & n \neq m. \end{cases}$$

Виконання умов (i) і (ii) визначення метрики 1.1 очевидне. Покажемо, що виконується нерівність трикутника. Для попарно різних довільних n, m, $k \in X$ маємо

$$\begin{aligned}\rho(n,m) &= 1+\frac{1}{n+m} < 2 < \left(1+\frac{1}{n+k}\right)+\left(1+\frac{1}{k+m}\right)\\ &= \rho(n,k)+\rho(k,m).\end{aligned}$$

Таким чином, ρ — метрика на X. Розглянемо послідовність замкнених куль

$$B_n = \overline{B}\left(n, 1+\frac{1}{2n}\right) = \left\{m \in X\colon \rho(n,m) \leqslant 1+\frac{1}{2n}\right\}.$$

Легко бачити, що

$$B_n = \{m \in \mathbb{N}\colon m \geqslant n\} = \mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,n-1\}.$$

Звідси випливає, що $B_n \supset B_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ це послідовність вкладених замкнених куль. Знайдемо перетин цих куль. Маємо

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,n-1\}) = \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{1,\ldots,n-1\}\right) = \varnothing.$$

4.2 Всюди щільні множини. Приклади сепарабельних просторів

Означення 4.4. Множина $E \subset X$ називається *всюди щільною* у метричному просторі (X,ρ), якщо $\overline{E} = X$.

Із теореми 2.21 випливає, що якщо множина E всюди щільна в (X,ρ), то кожна точка $x \in X$ є границею деякої послідовності точок із E.

Вправа 4.2.1. Доведіть, що множина E всюди щільна в (X,ρ) тоді і тільки тоді, коли будь-яка куля простору (X,ρ) містить точки із E,

$$\forall x \in X \quad \forall r > 0 \quad E \cap B(x,r) \neq \varnothing.$$

Приклад 4.5. Множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел всюди щільна в $\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), оскільки будь-яке дійсне число можна розглядати як границю послідовності раціональних чисел.

Як відомо, множина $\mathbb{Q}$ зліченна. Виникає питання виділення метричних просторів, що мають всюди щільні зліченні підмножини.

Означення 4.6. Метричний простір (X, ρ) називається *сепарабельним*, якщо в ньому існує зліченна всюди щільна підмножина. Іншими словами, метричний простір (X, ρ) сепарабельний, якщо існує послідовність

$$E = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset X,$$

така, що

$$\forall x \in X \quad \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset E \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Приклад 4.7. Нехай $(X, \rho) = (\mathbb{R}^d, \rho_p)$, $1 \leqslant p < \infty$ (див. приклад 1.7), де

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{Q} \quad |\alpha - \beta| < \varepsilon.$$

Нехай $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}$ — довільне. Тоді

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \exists q_i \in \mathbb{Q} \quad |x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{d^{1/p}}.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^{d} |x_i - q_i|^p\right)^{1/p} < \varepsilon,$$

тобто $\rho_p(x, q) < \varepsilon$, де $q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d$. Таким чином, $\mathbb{Q}^d$ всюди щільна злічена підмножина простору $(\mathbb{R}^d, \rho_p)$, тобто метричний простір $(\mathbb{R}^d, \rho_p)$ сепарабельний.

Приклад 4.8. Метричний простір $C([a,b])$ (див. приклад 1.9) — сепарабельний. Всюди щільна підмножина E складається з усіх многочленів з раціональними коефіцієнтами. Дійсно, нехай $x \in C([a,b])$ — довільна. За теоремою Веєрштраса, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий многочлен P, що

$$\rho(x,P) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий многочлен P_0 з раціональними коефіцієнтами (тобто $P \in E$), що

$$\rho(P,P_0) = \max_{t\in[a,b]} |P(t) - P_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді $\rho(x,P_0) \leqslant \rho(x,P) + \rho(P,P_0) < \varepsilon$.

Приклад 4.9. Метричний простір (l_p, ρ) (див. параграф 1.2) — сепарабельний. Для того щоб це довести, покажемо, що множина

$$E = \{x = (r_1, \ldots, r_n, 0, \ldots)\colon r_i \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$$

всюди щільна в l_p.

Дійсно, нехай $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ — довільний. Тоді ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

збігається. Звідси, для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдеться номер $N \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $n \geqslant N$ виконується нерівність

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Знайдемо таке $x_0 = (\tau_1, \ldots, \tau_N, 0, \ldots) \in E$, що

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - \tau_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Тоді

$$\rho^p(x,x_0) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - \tau_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Таким чином, $\rho(x,x_0) < \varepsilon$.

Приклад 4.10. Метричний простір $L_p([a,b])$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — сепарабельний. За злічену всюди щільну множину E можна взяти множину усіх алгебраїчних поліномів

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

з раціональними коефіцієнтами.

4.3 Приклад несепарабельного простору

Теорема 4.11. *Простір l_∞ — несепарабельний.*

Доведення. Розглянемо множину Y послідовностей $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$, де $x_i = 0$ або $x_i = 1$. Потужність цієї множини континуум, оскільки кожне дійсне число з відрізку $[0,1]$ можна зобразити у двійковій системі числення як послідовність із множини Y.

Нехай $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in Y$. Тоді

$$\rho(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 1.$$

Таким чином, в множині Y міститься континуум елементів, відстань між яким дорівнює 1. Для кожного $x \in Y$ побудуємо кулю $B(x, 1/3)$. Легко бачити, що якщо x, $y \in Y$, $x \neq y$, то $B(x,1/3) \cap B(y,1/3) = \varnothing$. Дійсно, припустимо, що це не так. Тоді існує $z \in l_\infty$ таке, що $z \in B(x,1/3) \cap B(y,1/3)$. Звідси випливає, що

$$1 = \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Отримали суперечність. Таким чином, $B(x, 1/3) \cap B(y, 1/3) = \varnothing$.

Припустимо тепер, що простір l_∞ сепарабельний. Тоді існує така зліченна всюди щільна множина $E \subset l_\infty$, що, для будь-якого $x \in Y$, куля $B(x, 1/3)$ містить елемент із E (див. вправу 4.2.1). Звідси випливає, що множина E має потужність не менше континууму, що суперечить її зліченності. Таким чином, простір l_∞ — несепарабельний. $\square$

Лекція 5
Повні метричні простори

5.1 Ніде не щільні множини. Теорема Бера

Продовжимо вивчення повних метричних просторів. В цьому параграфі ми отримаємо іншу характеристику повних метричних просторів — теорему Бера. Для її формулювання нам потрібні деякі означення.

Означення 5.1. Нехай (X, ρ) — метричний простір. Множина $E \subset X$ називається *ніде не щільною* в X, якщо в будь-якій кулі міститься куля, в якій немає жодної точки із E, тобто, якщо

$$\forall B(x, r_x) \quad \exists B(y, r_y) \subset B(x, r_x) \quad B(y, r_y) \cap E = \varnothing.$$

Вправа 5.1.1. Довести, що доповнення до ніде не щільної множини є всюди щільна множина.

Вправа 5.1.2. Довести, що множина $E \subset X$ є ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли множина внутрішніх точок її замикання є порожньою.

Вправа 5.1.3. Довести, що множина $E \subset X$ є ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли вона не є всюди щільною в будь-якій кулі.

Наведемо деякі приклади.

Приклад 5.2. $X = \mathbb{R}$, $E = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ — скінченна множина. Очевидно, що будь-який інтервал містить інтервал в якому не має точок множини E. Звідси отримуємо, що множина E — ніде не щільна в X.

Приклад 5.3. $X = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{Z}$ — множина усіх цілих чисел. Очевидно, що будь-який інтервал містить інтервал в якому не має цілих чисел. Тому множина $\mathbb{Z}$ — ніде не щільна в X.

Твердження 5.4. *Об'єднання скінченного числа ніде не щільних у метричному просторі (X, ρ) множин є ніде не щільною множиною.*

Доведення. Нехай E_i, $i = 1, \ldots, n$, — ніде не щільні в X множини,

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Нехай B — будь-яка куля. Тоді існує куля $B_1 \subset B$ в якій нема точок із E_1: $B_1 \cap E_1 = \varnothing$. Для кулі B_1 існує куля $B_2 \subset B_1$ в якій нема точок із E_2: $B_2 \cap E_2 = \varnothing$. Продовжуючи цей процес на n-тому кроці отримаємо кулю $B_n \subset B_{n-1}$ в якій нема точок із E_n: $B_n \cap E_n = \varnothing$. Звідси випливає, що

$$B_n \cap E = \varnothing.$$

Таким чином, E — ніде не щільна в X множина. $\square$

Зауваження 5.5. Об'єднання зліченної множини ніде не щільних множин може не бути ніде не щільною множиною. Наприклад, всюди щільну в $\mathbb{R}$ множину $\mathbb{Q}$ можна розглядати як зліченне об'єднання одноточкових (таким чином, ніде не щільних) множин.

Означення 5.6. Множина E називається *множиною першої категорії*, якщо вона може бути зображена у вигляді об'єднання не більш ніж зліченного числа ніде не щільних множин.

Приклад 5.7. Множина $\mathbb{Q}$ є множиною першої категорії. Також легко бачити, що будь-яка ніде не щільна множина є множиною першої категорії.

Означення 5.8. Множина E називається *множиною другої категорії*, якщо вона не є множиною першої категорії, тобто, якщо її не можна зобразити як об'єднання не більш ніж зліченного числа ніде не щільних множин.

Наступна теорема відіграє фундаментальну роль у теорії повних метричних просторів.

Теорема 5.9 (Бера або друга характеристика повних метричних просторів)**.** *Повний метричний простір є множиною другої категорії.*

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай повний метричний простір (X, ρ) може бути зображеним у вигляді

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{5.1}$$

де кожна множина E_n є ніде не щільною множиною. Візьмемо будь-яку замкнену кулю $\overline{B}(x, 1)$. Оскільки множина E_1 ніде не щільна, то знайдеться замкнена куля $\overline{B}(x_1, r_1)$ така, що

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x, 1), \quad \overline{B}(x_1, r_1) \cap E_1 = \varnothing \quad \text{і} \quad 0 < r_1 < \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, оскільки множина E_2 ніде не щільна, то знайдеться замкнена куля $\overline{B}(x_2, r_2)$ така, що

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subset \overline{B}(x_1, r_1), \quad \overline{B}(x_2, r_2) \cap E_2 = \varnothing \quad \text{і} \quad 0 < r_2 < \frac{1}{2^2}.$$

За індукцією побудуємо послідовність $\left\{\overline{B}(x_n, r_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ замкнених куль, таку, що

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n), \quad \overline{B}(x_n, r_n) \cap E_n = \varnothing \quad \text{і} \quad 0 < r_n < \frac{1}{2^n}.$$

Згідно леми про вкладені кулі існує точка $x \in X$, така, що

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$$

Оскільки $\overline{B}(x_n, r_n) \cap E_n = \varnothing$, то $x \notin E_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Отримали суперечність з рівністю (5.1). $\square$

Приклад 5.10. Множина $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ірраціональних чисел є множиною другої категорії, оскільки у протилежному випадку повний метричний простір $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ можна було б зобразити у вигляді зліченного об'єднання ніде не щільних множин, що суперечить теоремі 5.9 (теоремі Бера).

Якщо функція f розривна на відрізку $[a, b]$ і існує послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ неперервних на $[a, b]$ функцій, таких, що

$$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x),$$

то говорять, що f — *функція першого класу.*

Якщо функція F — диференційовна на відрізку $[a, b]$ і $f(x) = F'(x)$, то f є границею послідовності неперервних функцій.

Бер довів, що функції першого класу можуть мати розриви тільки на множині першої категорії. Саме тут Бер вперше ввів поняття категорії.

Веєрштрас вперше збудував неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію, що не має похідної в усіх точках цього відрізку. Виявляється, такими є "майже усі" неперервні функції. А саме, нехай E — множина усіх функцій із $C([a, b])$, які мають скінченну похідну хоча б в одній точці. Банах довів, що E — множина першої категорії в $C([a, b])$.

5.2 Принцип стискаючих відображень

У математичному аналізі, лінійній алгебрі та в цілому ряді інших розділів математики досить часто використовується метод послідовних наближень. Він широко використовується при доведенні теорем існування розв'язків диференціальних иа інтегральних рівнянь, а також для отримання наближених розв'язків рівнянь.

Узагальнення цього методу на випадок операторних рівнянь у повних метричних просторах було запропоновано С. Банахом. Це узагальнення має назву *принцип стискаючих відображень.*

Означення 5.11. Нехай (X, ρ) — метричний простір. Відображення (оператор) $A\colon X \to X$ називається *стискаючим відображенням* (або *оператором стиску*), якщо існує таке $\alpha \in (0,1)$, що для всіх x, $y \in X$ виконується нерівність $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$.

Зауваження 5.12. Будь-яке стискаюче відображення є неперервним: якщо $x_n \to x$, тобто $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$0 \leqslant \rho(Ax_n, Ax) \leqslant \alpha\rho(x_n, x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким чином, $Ax_n \to Ax$ при $n \to \infty$.

Означення 5.13. Точка $x \in X$ називається *нерухомою точкою* оператора $A\colon X \to X$, якщо $Ax = x$.

Приклад 5.14. Нехай $A = \frac{d}{dt}$ — оператор диференціювання у просторі $C^1([a, b])$ неперервно-диференційовних функцій:

$$\frac{d}{dt}\colon C^1([a, b]) \to C([a, b]).$$

Функція $x(t) = e^t$ — нерухома точка цього оператору:

$$\forall t \in [a, b] \quad \frac{d}{dt}e^t = e^t.$$

Теорема 5.15 (принцип стискаючих відображень або третя характеристика повних просторів)**.** *Нехай у повному метричному просторі (X, ρ) задано стискаючий оператор $A\colon X \to X$. Тоді оператор A має єдину нерухому точку x_0 і для ітераційного процесу*

$$x_1 = Ax, \quad x_{n+1} = Ax_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

взятого з будь-якою початковою точкою $x \in X$, має місце наступна оцінка для n-ого наближення x_n нерухомої точки x_0:

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\,\rho(x, Ax), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Доведення. Виберемо довільну точку $x \in X$ і нехай $x_1 = Ax$, $x_2 = Ax_1$, …, $x_{n+1} = Ax_n$, …. Покажемо, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна. Дійсно,

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \leqslant \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2) \leqslant \alpha^2\rho(x, Ax),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_n) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \alpha^n\rho(x, Ax).$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_{n+p}) &\leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1})\rho(x, Ax) \\ &= \frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha}\,\rho(x, Ax) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x, Ax).\end{aligned}$$

Таким чином, показали, що

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна.

Оскільки метричний простір (X, ρ) — повний, то для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ існує точка $x_0 \in X$, така, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Враховуючи, що стискаючий оператор неперервний, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0.$$

З іншого боку, $Ax_n = x_{n+1} \to x_0$ при $n \to \infty$. Звідси, враховуючи єдиність границі, отримуємо, що $Ax_0 = x_0$, тобто x_0 — нерухома точка відображення A. Доведемо її єдиність.

Нехай для оператора A існує дві нерухомі точки: x_0 і y_0, $x_0 \neq y_0$. Тоді

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leqslant \alpha\rho(x_0, y_0).$$

З останньої нерівності випливає, що $\rho(x_0, y_0) = 0$, тобто $x_0 = y_0$. Отримали суперечність. Таким чином, у оператора стиску існує єдина нерухома точка.

Доведемо оцінку для n-ого наближення x_n нерухомої точки x_0. Вище ми встановили, що для будь-яких n, $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x, Ax).$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $p \to \infty$, отримаємо

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x, Ax),$$

що і треба було довести. □

Зауваження 5.16. Побудову послідовності наближень $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до нерухомої точки x_0, можна здійснювати з будь-якої точки $x \in X$. Вибір елемента $x \in X$ буде впливати лише на швидкість збіжності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ до x_0 (оскільки оцінка залежить від вибору початкового елементу x).

Приклад 5.17. Знайти розв'язок рівняння $f(x) = x$, якщо $f\colon [a,b] \to [a,b]$ — диференційовна функція, така, що

$$\exists \alpha \in (0,1) \quad \forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \leqslant \alpha.$$

Розв'язання. Відрізок $[a,b]$ з метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$ є повним метричним простором. Покажемо, що оператор f є оператором стиску. Дійсно, за теоремою Лагранжа, для будь-яких x, $y \in [a,b]$ існує $\xi \in (a,b)$ така, що

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leqslant \alpha\rho(x,y)$$

Таким чином, f є оператором стиску.

За принципом стискаючих відображень (теорема 5.15), існує єдиний розв'язок рівняння $f(x) = x$, який можна знайти методом ітерацій. Цей ітераційний процес зображено на рис. 5.1.

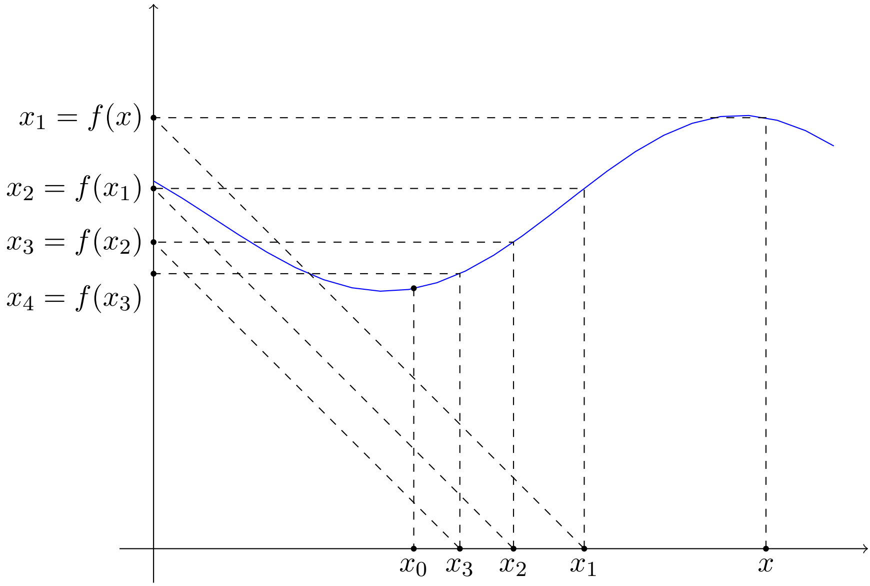

Рис. 5.1: Ітераційний процес.

Виберемо довільне $x \in [a, b]$ і покладемо $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\ldots$. Тоді нерухома точка $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Нехай тепер потрібно знайти наближений розв'язок x_n рівняння $f(x) = x$ з точністю $\varepsilon > 0$, тобто знайти таке x_n, що $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Згідно з теоремою 5.15 про стискаючі відображення, виконується нерівність

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x, f(x)).$$

Тому для того, щоб виконувалася нерівність $\rho(x_n x_0) < \varepsilon$, достатньо, щоб

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x, f(x)) < \varepsilon, \quad \text{де} \quad \rho(x, f(x)) = |x - f(x)|.$$

Звідси отримуємо, що

$$n > \log_\alpha \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{|x - f(x)|}. \qquad \square$$

Приклад 5.18. Знайти умови, за яких можна застосовувати принцип стискаючих відображень для розв'язку системи n лінійних алгебраїчних рівнянь: $Ax = b$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Легко бачити, що $Ax = b$ тоді і тільки тоді, коли $x = -Ax + b + x$. Розглянемо оператор

$$Ux = -Ax + b + x = (-A + I)x + b,$$

де I — одинична матриця. Тоді розв'язок системи $Ax = b$ є нерухомою точкою оператора $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Нехай в $\mathbb{R}^n$ задана евклідова метрика

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2},$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Тоді $(\mathbb{R}^n, \rho)$ — повний метричний простір (див. приклад 3.8).

Позначимо $C = -A + I$. Тоді $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$, де

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 - a_{ij}, & \text{якщо } i = j, \\ -a_{ij}, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Оскільки $Ux = Cx + b$, то

$$\rho(Ux, Uy) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_j - y_j) \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\, |x_j - y_j| \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Застосуємо до внутрішньої суми нерівність Гельдера (див. теорему 1.18):

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\,|x_j - y_j|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right).$$

Звідси отримаємо

$$\begin{aligned}\rho(Ux, Uy) &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\right)^{1/2} \rho(x, y).\end{aligned}$$

Позначимо

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Якщо $\alpha < 1$, то U — оператор стиску в $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Звідси випливає, що система $Ax = b$ має єдиний розв'язок, який можна знайти методом послідовних наближень. □

Зауваження 5.19. Якщо число рівнянь m системи $Ax = b$ менше за число n (тобто $a_{ij} = 0$ при $i = m + 1, \ldots, n$), то $c_{ii} = 1$ при $i = m+1, \ldots, n$. Звідси випливає, що $\alpha \geqslant 1$ і, таким чином, принцип стискаючих відображень застосовувати не можна.

Зауваження 5.20. Розглянемо систему $Ax = b$ в $\mathbb{R}^n$ з метрикою

$$\rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|.$$

Тоді

$$\rho(Ux, Uy) = \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_j - y_j) \right|$$
$$\leqslant \left(\max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right) \left(\max_{i=\overline{1,n}} |x_j - y_j| \right) = \alpha\rho(x, y),$$

де

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|.$$

Звідси випливає, що якщо $\alpha < 1$, то для розв'язку системи $Ax = b$ можна застосовувати принцип стискаючих відображень.

Лекція 6
Предкомпактність

6.1 Цілком обмежені множини

Означення 6.1. Нехай (X, ρ) — метричний простір. Множина $E \subset X$ називається *цілком обмеженою*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ цю множину можна покрити скінченною кількістю куль радіусу ε.

Для того, щоб сформулювати критерій цілком обмеженості, введемо поняття ε-сітки для заданої множини.

Означення 6.2. Нехай (X, ρ) — метричний простір. Множина $S \subset X$ називається ε-сіткою для множини $E \subset X$, якщо

$$\forall x \in E \quad \exists s \in S \quad \rho(x, s) < \varepsilon,$$

тобто для кожного $x \in E$ знайдеться $s \in S$, таке, що x належить кулі з центром в точці s радіусу ε.

Теорема 6.3. *Нехай (X, ρ) — метричний простір. Множина $E \subset X$ цілком обмежена тоді і тільки толі, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ ця множина має скінченну ε-сітку.*

Довести самостійно.

Вправа 6.1.1. Показати, що якщо множина E цілком обмежена, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина E має скінченну ε-сітку S, таку, що $S \subset E$.

Порівняємо поняття обмеженої і цілком обмеженої множини.

Твердження 6.4. *Будь-яка цілком обмежена множина є обмеженою.*

Довести самостійно.

Обернене твердження невірне. Наведемо приклад множини, що є обмеженою, але не є цілком обмеженою.

Приклад 6.5. У просторі l_2 розглянемо множину

$$E = \{e_n \colon e_n = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, x_i = 0, i \neq n, x_n = 1\}.$$

Зрозуміло, що $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ при $n \neq m$. Також легко бачити, що E — обмежена множина. Покладемо $\varepsilon = \sqrt{2}/2$. Припустимо, що для такого ε існує скінченна ε-сітка S. Це означає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $s \in S$, таке, що $\rho(s, e_n) < \varepsilon$. Оскільки множина E нескінченна, а множина S скінченна, то існують n, $m \in \mathbb{N}$ і $s \in S$, такі, що $\rho(s, e_n) < \varepsilon$, $\rho(s, e_m) < \varepsilon$. Тоді

$$\sqrt{2} = \rho(e_n, e_m) \leqslant \rho(s, e_n) + \rho(s, e_m) < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

що неможливо. Таким чином, E не є цілком обмеженою множиною.

Наступна теорема показує, що якщо ми будемо розглядати лише скінченновимірні простори, то поняття обмеженості і цілком обмеженості збігаються.

Твердження 6.6. *Множина E є цілком обмеженою у просторі $(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ тоді і тільки тоді, коли вона обмежена у цьому просторі.*

Доведення. Необхідність випливає із твердження 6.4. Доведемо достатність.

Нехай множина E обмежена в $\mathbb{R}^d$. Це означає, що існує куля B, така, що $E \subset B$. Якщо ми доведемо, що куля B є цілком обмеженою, то тим самим ми доведемо, що множина E є цілком обмеженою. Таким чином, нам достатньо довести, що будь-яка куля цілком обмежена множина.

Нехай $B = B(x_0, r_0)$ — довільна куля в $\mathbb{R}^d$ і $\varepsilon > 0$. Покладемо

$$N = \left[\frac{r_0}{\varepsilon}\sqrt{d}\right] + 1 > \frac{r_0}{\varepsilon}\sqrt{d}.$$

і розглянемо множину

$$S = \left\{s_{k_1,\ldots,k_d} \colon s_{k_1,\ldots,k_d} = x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d} k_i e_i,\ k_i \in \mathbb{Z},\ |k_i| \leqslant N\right\},$$

де e_i — координатні вектори (всі координати крім i-тої дорівнюють нулю). Легко бачити, що множина S скінченна. Покажемо, що S — ε-сітка для B.

Нехай $x \in B$ — довільне. Тоді x можна єдиним чином зобразити у вигляді

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_i.$$

Знайдемо такі $k_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, що виконуються нерівності

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\} \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} k_i \leqslant \alpha_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} (k_i + 1).$$

Оскільки

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} |k_i| \leqslant \alpha_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2 \right)^{1/2} = \rho(x_0, x) < r_0,$$

то $|k_i| < \frac{r_0}{\varepsilon} \sqrt{d} < N$ і, отже, $s_{k_1, \ldots, k_d} \in S$. Враховуючи нерівність

$$0 \leqslant \alpha_i - \frac{\varepsilon}{r_0 \sqrt{d}} k_i < \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} (k_i + 1) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} k_i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$$

отримуємо, що

$$\rho(x, s_{k_1, \ldots, k_d}) = \left(\sum_{i=1}^{d} \left(\alpha_i - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} k_i \right)^2 \right)^{1/2} < \left(\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \right)^2 \right)^{1/2} = \varepsilon.$$

Таким чином, ми показали, що S — скінченна ε-сітка для B, тобто B — цілком обмежена множина. $\square$

Твердження 6.7. *Будь-яка цілком обмежена множина сепарабельна.*

Доведення. Нехай (X, ρ) — метричний простір, $E \subset X$ — цілком обмежена множина. Нехай S_n — скінченна $1/n$-сітка для E і $S_n \subset E$. Тоді

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

— зліченна всюди щільна в E підмножина. $\square$

6.2 Компактні та зліченно компактні множини

Означення 6.8. Нехай (X, ρ) — метричний простір і E підмножина X. Сімейство $\Omega = \{G_\alpha \colon \alpha \in \mathcal{A}\}$ відкритих множин називається *відкритим покриттям* множини E, якщо

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha.$$

Означення 6.9. Множина E називається *компактною*, якщо будь-яке її відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто, якщо для будь-якого відкритого покриття Ω існують множини G_1, $\ldots$, $G_n \in \Omega$, такі, що

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i.$$

В наведеному означенні компактність характеризується через відкриті множини. Введемо характеристику компактних множин через замкнені множини.

Означення 6.10. Сімейство множин Ω називається *центрованим*, якщо перетин будь-якого скінченного числа елементів цього сімейства непорожній.

Теорема 6.11 (критерій компактності)**.** *Для того, щоб метричний простір X був компактний необхідно і достатньо, щоб будь-яка центрована система його замкнених підмножин мала непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність. Нехай (X, ρ) — компактний метричний простір. Розглянемо довільну центровану систему $\{F_\alpha\}$ замкнених множин. Множини $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ — відкриті. Із формул де Моргана і центрованості системи $\{F_\alpha\}$ випливає, що

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$$

для будь-якого скінченного набору $\{G_i\}_{i=1}^n \subset \{G_\alpha\}$. Враховуючи, що простір X компактний, звідси випливає, що система $\{G_\alpha\}$ не є відкритим покриттям X, тобто

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = X \setminus \left(\bigcup_\alpha G_\alpha \right) \neq \varnothing.$$

Достатність. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $\{G_\alpha\}$ — довільне його відкрите покриття. Покладемо $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$. Тоді

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = X \setminus \left(\bigcup_\alpha G_\alpha \right) = \varnothing.$$

Оскільки, за умовою теореми, будь-яка центрована система замкнених множин має непорожній перетин, то система $\{F_\alpha\}$ не є центрованою, тобто існують такі $F_1, \ldots, F_n \in \{F_\alpha\}$, що

$$\bigcap_{i=1}^n F_i = \varnothing.$$

Звідси, враховуючи рівність $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$, отримуємо

$$\bigcup_{i=1}^n G_i = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) = X \setminus \varnothing = X,$$

тобто система $\{G_i\}_{i=1}^n$ це скінченне відкрите підпокриття покриття $\{G_\alpha\}$ множини X. □

Перейдемо тепер до поняття зліченної компактності множини.

Означення 6.12. Множина E називається *зліченно компактною*, якщо будь-яке її зліченне відкрите покриття містить скінченне підпокриття, тобто, якщо для будь-якого зліченного відкритого покриття Ω існують множини $G_1, \ldots, G_n \in \Omega$, такі, що

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

Теорема 6.13 (критерій зліченної компактності). *Нехай* (X, ρ) — *метричний простір. Наступні твердження еквівалентні:*

(i) *Метричний простір* (X, ρ) *зліченно компактний.*

(ii) *Будь-яка зліченна центрована система замкнених підмножин* (X, ρ) *має непорожній перетин.*

(iii) *Кожна нескінченна підмножина* $E \subset X$ *має хоча б одну граничну точку.*

Доведення. Еквіваленція $(i) \Leftrightarrow (ii)$ доводиться аналогічно теоремі 6.11 і тому її доведення ми опускаємо.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Нехай будь-яка зліченна центрована система замкнених підмножин (X, ρ) має непорожній перетин. Доведемо, що кожна нескінченна підмножина $E \subset X$ має хоча б одну граничну точку. Припустимо супротивне, що існує нескінченна множина $E \subset X$, яка не має жодної граничної точки. Виділимо із E зліченну множину $E_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Оскільки множина E не має граничних точок, то і множина E_1 не має граничних точок. Тоді сімейство множин $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, утворює центровану систему замкнених підмножин X, яка має порожній перетин,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing.$$

Отримали суперечність. Таким чином, кожна нескінченна підмножина $E \subset X$ має хоча б одну граничну точку.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Припустимо, що кожна нескінченна підмножина $E \subset X$ має хоча б одну граничну точку і нехай $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ зліченна центрована система замкнених множин із X. Покажемо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing.$$

Позначимо $\Phi_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$. Із означення Φ_n, замкненості всіх множин F_n і центрованості системи $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ випливає, що всі Φ_n замкнені, непорожні, утворюють незростаючу послідовність вкладених множин $\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots$ і виконується рівність

$$\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_n = \bigcap_{n=1}^\infty F_n.$$

Можливі два випадки:

(i) Починаючи з деякого номера N всі Φ_n збігаються,

$$\Phi_N = \Phi_{N+1} = \ldots .$$

Тоді очевидно, що $\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_n = \Phi_N \neq \varnothing$.

(ii) Існує нескінченно багато попарно різних множин із сімейства $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$. Тоді існує строго зростаюча послідовність $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, така, що $\Phi_{n_k} \setminus \Phi_{n_k+1} \neq \varnothing$. Для кожного номеру $k \in \mathbb{N}$ візьмемо деякий елемент із множини $\Phi_{n_k} \setminus \Phi_{n_k+1}$ і позначимо його x_k. В результаті отримаємо послідовність $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ попарно різних точок із множини X. Позначимо $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Множина E нескінченна і, отже, має хоча б одну граничну точку x_0. Оскільки множина Φ_n містить послідовність $\{x_k\}_{k=n}^\infty$, то точка x_0 є граничною точкою для цієї множини і, в силу замкненості Φ_n, $x_0 \in \Phi_n$. Таким чином,

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty \Phi_n,$$

тобто $\bigcap_{n=1}^\infty \Phi_n \neq \varnothing$. $\square$

Для подальшого нам знадобиться поняття бази топології.

Означення 6.14. Система $\mathcal{B}$ відкритих множин називається *базою топології*, якщо будь-яка відкрита множина в (X, ρ) може бути зображена як об'єднання деяких множин із $\mathcal{B}$.

Теорема 6.15. *Якщо (X, ρ) — зліченно компактний метричний простір, то в (X, ρ) є не більш ніж зліченна база топології.*

Доведення. Нехай (X, ρ) — зліченно компактний метричний простір. Покажемо, що цей простір цілком обмежений. Припустимо супротивне, що існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що в X не має скінченної ε_0-сітки. Нехай x_1 — довільна точка із X. Оскільки в X не має скінченної ε_0-сітки, то знайдеться така точка $x_2 \in X$, що $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon_0$. Продовжуючи цей процес, побудуємо таку послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon_0$ для всіх i, $j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Звідси випливає, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не має граничних точок. За теоремою 6.13 отримуємо, що (X, ρ) не є зліченно компактним, що суперечить умовам теореми. Таким чином, зліченно компактний метричний простір є цілком обмеженим. Застосовуючи твердження 6.7 отримуємо, що (X, ρ) — сепарабельний метричний простір.

Покажемо тепер, що в (X, ρ) є не більш ніж зліченна база топології. Для цього достатньо розглянути систему

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x_n, \frac{1}{m}\right) : x_n \in E,\ m \in \mathbb{N} \right\},$$

де E — деяка всюди щільна в X множина. □

Із означень компактності та зліченної компактності випливає, що будь-яка компактна множина є зліченно компактною. В загальних топологічних просторах обернене твердження не виконується. Якщо ж розглядати лише метричні простори, то має місце наступна теорема.

Теорема 6.16. *Для того, щоб метричний простір X був компактний необхідно і достатньо, щоб він був зліченно компактний.*

Доведення. Необхідність очевидна. Доведемо достатність.

Достатність. Нехай (X, ρ) — зліченно компактний метричний простір і $\{G_\alpha\}$ — довільне його відкрите покриття. Тоді кожна точка

$x \in X$ міститься в деякому G_α. За теоремою 6.15 простір (X, ρ) має не більш ніж зліченну базу топології. Нехай $\mathcal{B}$ — не більш ніж зліченна база в X. Тоді для кожного $x \in X$ існує таке $B(x) \in \mathcal{B}$, що

$$x \in B(x) \subset G_\alpha.$$

Система $\Omega = \{B(x) \in \mathcal{B} \colon x \in X\}$ скінченна або зліченна і покриває увесь простір X. Обираючи для кожного $B \in \Omega$ одну із множин G_α, що містить B, ми отримаємо скінченне або зліченне підпокриття покриття $\{G_\alpha\}$. Якщо отримане покриття скінченне, то теорема доведена. Якщо ж отримане покриття зліченне, то, скориставшись зліченною компактністю (X, ρ), виділимо із цього покриття скінченне підпокриття. Таким чином, ми показали, що в зліченно компактному просторі (X, ρ) із будь-якого відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. $\square$

Лекція 7
Предкомпактність

7.1 Властивості компактних множин

В курсі математичного аналізу була доведена наступна теорема.

Теорема 7.1 (Гейне — Бореля; критерій компактності у скінченно-вимірному просторі). *Для того щоб множина була компактною у просторі $\mathbb{R}^d$ необхідно і достатньо, щоб вона була замкненою та обмеженою.*

У довільному метричному просторі подібне твердження не вірне. Наведемо приклад, який показує, що замкненості та обмеженості недостатньо для компактності.

Приклад 7.2. У просторі l_2 розглянемо множину

$$E = \{e_n \colon e_n = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, x_i = 0, i \neq n, x_n = 1\}.$$

Оскільки $\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ при $n \neq m$, то множина E не має граничних точок і тому E — замкнена. Враховуючи також, що

$$\rho(e_n, \theta) = 1, \quad \text{де } \theta = (0, \ldots, 0, \ldots) \in l_2,$$

отримуємо, що $E \subset B(\theta, 2)$, тобто, множина E — обмежена. Покажемо, що множина E — не компактна. Для цього розглянемо сімейство множин

$$\Omega = \{B(e_n, 1) \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, що Ω це відкрите покриття множини E. Більш того, легко бачити, що $B(e_n, 1) \cap E = \{e_n\}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, будь-яка власна підмножина множини Ω уже не буде покриттям множини E. Зокрема, звідси випливає, що множина E — не компактна.

Наступна теорема показує, що замкненість та обмеженість це необхідні умови компактності.

Теорема 7.3 (необхідні умови компактності). *Будь-яка компактна множина замкнена і обмежена.*

Доведення. Нехай (X, ρ) — метричний простір, $K \subset X$ — компактна множина. Покажемо спочатку, що множина K — обмежена. Для цього потрібно показати, що K міститься в деякій кулі.

Зафіксуємо довільне $x_0 \in X$ і покладемо $\Omega = \{B(x_0, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$. Легко бачити, що Ω — відкрите покриття множини K,

$$K \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n).$$

Враховуючи, що K — компактна множина, знайдеться скінченне підпокриття $\{B(x_0, n_k)\}_{k=1}^{m}$ покриття Ω множини K. Покладемо

$$n_0 = \max\{n_k \colon k = 1, \ldots, m\}.$$

Оскільки $B(x_0, n) \subset B(x_0, n+1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $K \subset B(x_0, n_0)$. Таким чином, K — обмежена множина.

Покажемо тепер, що множина K — замкнена. Для цього достатньо показати, що будь-яка точка $y \notin K$ не є граничною точкою множини K.

Для довільної точки $x \in K$ покладемо $r_x = \rho(x, y)/2$ і

$$\Omega = \{B(x, r_x) \colon x \in K\}.$$

Очевидно, що Ω — відкрите покриття множини K. Із умови компактності K випливає, що існує скінченне підпокриття $\{B(x_i, r_{x_i}) \colon i = 1, \ldots, n\}$ покриття Ω. Покладемо $r = \min\{r_{x_i} \colon i = 1, \ldots, n\}$. Оскільки $B(x_i, r_{x_i}) \cap B(y, r_{x_i}) = \varnothing$, то

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})\right) \cap B(y, r) = \varnothing.$$

Звідси випливає, що $K \cap B(y, r) = \varnothing$, тобто y не є граничною точкою множини K. Таким чином, K — замкнена множина. $\square$

Теорема 7.4 (про компактність замкненої підмножини)**.** *Нехай K — компактна множина у метричному просторі (X, ρ). Тоді будь-яка замкнена підмножина множини K також компактна.*

Доведення. Нехай K — компактна множина, $F \subset K$ — замкнена і Ω — довільне відкрите покриття множини F. За теоремою 2.14, множина $G = X \setminus F$ — відкрита. Розглянемо сімейство множин

$$\Omega_1 = \Omega \cup \{G\}.$$

Легко бачити, що сімейство Ω_1 це відкрите покриття множини K. Із компактності множини K випливає, що існує скінченне підпокриття Ω_2 покриття Ω_1 множини K. Оскільки $F \subset K$, то Ω_2 — відкрите покриття множини F. Позначимо $\Omega_3 = \Omega_2 \setminus \{G\}$. Тоді $\Omega_3 \subset \Omega$, тобто Ω_3 скінченне відкрите підпокриття покриття Ω множини F. Таким чином, множина F — компактна. $\square$

Компактність — внутрішня властивість множини, тобто властивість бути компактною множиною не залежить від об'ємного простору. А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 7.5 (про компактність як внутрішню властивість множини)**.** *Нехай (X, ρ) — метричний простір, (Y, ρ) — його підпростір і нехай $K \subset Y$. Тоді множина K компактна в Y тоді і тільки тоді, коли K компактна в X.*

Довести самостійно.

Найбільш загальним критерієм компактності метричного простору є наступна теорема.

Теорема 7.6 (критерій компактності Гаусдорфа)**.** *Метричний простір (X, ρ) компактний тоді і тільки тоді, коли він є повним і цілком обмеженим.*

Доведення. Необхідність. Нехай метричний простір X — компактний. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ із сімейства відкритих куль $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$, які покривають X, можна вилучити скінченне підпокриття $\{B(x_i,\varepsilon)\}_{i=1}^n$,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon).$$

Отже X — цілком обмежена множина.

Доведемо повноту X. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — довільна фундаментальна послідовність точок із X. Покажемо, що із компактності X випливає, що існує така точка $x_0 \in X$, що в будь-якому околі цієї точки міститься нескінченно багато елементів послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, тобто, що

$$\exists x_0 \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N \quad \rho(x_0, x_n) < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Припустимо супротивне, що для будь-якої точки $x \in X$ існує окіл $U(x)$ цієї точки, який містить скінченне число елементів послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, тобто, що

$$\forall x_0 \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \rho(x_0, x_n) \geqslant \varepsilon.$$

Розглянемо відкрите покриття $\{U(x)\}_{x\in X}$ простору X. Оскільки X — компактна множина, то з цього покриття можна виділити скінченне підпокриття $\{U(x_i)\}_{i=1}^n$. Враховуючи, що кожен окіл $U(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, містить лише скінченне число елементів послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, то і їх об'єднання містить лише скінченне число елементів цієї послідовності, що суперечить тому, що $\{U(x_i)\}_{i=1}^n$ відкрите покриття X. Таким чином, ми показали, що має місце (7.1). Звідси випливає, що існує така підпослідовність $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ послідовності $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, що $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Застосовуючи вправу 3.1.1, отримуємо, що $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Достатність. Нехай тепер X — повна і цілком обмежена множина. Доведемо, що X — компактна. Припустимо супротивне, що існує відкрите покриття Ω простору X, таке, що будь-яка скінченна підмножина Ω не є покриттям множини X. Оскільки простір X — цілком обмежений, то його можна покрити скінченною кількістю куль радіусу $\frac{1}{2}$. Тоді хоча б одну із цих куль не можна покрити скінченною кількістю множин із Ω. Виберемо таку кулю і позначимо її B_1.

Кулю B_1 можна покрити скінченною кількістю куль радіусу $\frac{1}{4}$. Серед них знайдеться куля B_2, яка перетинається з B_1 і не покривається скінченною кількістю множин із Ω.

Застосовуючи індукцію, побудуємо послідовність куль $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ з центрами x_n і радіусами $\frac{1}{2^n}$, таких, що $B_n \cap B_{n+1} \neq \varnothing$ і B_n не покривається скінченною кількістю множин із Ω.

Нехай $x \in B_n \cap B_{n+1}$. Тоді

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Звідси випливає, що для всіх n, $p \in \mathbb{N}$ виконується

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-2}} \\ &\leqslant \frac{\frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Таким чином, отримали, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна. Оскільки X — повний метричний простір, то звідси випливає, що існує таке $x_0 \in X$, що $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Переходячи в (7.2) до границі при $p \to \infty$, отримуємо

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Нехай $x \in B_n$. Тоді

$$\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-3}}.$$

Таким чином, отримали, що $B_n \subset B\left(x_0, \frac{1}{2^{n-3}}\right)$.

Точка x_0 належить деякій відкритій множині $G \in \Omega$. Оскільки має місце вкладення $B_n \subset B\left(x_0, \frac{1}{2^{n-3}}\right)$, то починаючи з деякого номеру усі кулі B_n будуть міститися у відкритій множині G. Отримали суперечність. Звідси випливає, що наше припущення, що множина X не є компактною хибне. Таким чином, X — компактна множина. $\square$

Приклад 7.7. Нехай $X = \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $E = (0, 1)$. Довести, що (E, ρ) — не компактний простір трьома способами:

(i) за означенням;

(ii) за необхідною умовою компактності (теорема 7.3) або за критерієм компактності у скінченновимірному просторі (теорема 7.1);

(iii) за критерієм компактності Гаусдорфа (теорема 7.6).

Доведення. (i). Розглянемо наступне відкрите покриття множини E:
$$\Omega = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, 1 \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Легко бачити, що з цього покриття не можна виділити скінченне підпокриття.

(ii). За теоремою 7.1, в скінченновимірному просторі $\mathbb{R}$ компактність еквівалентна обмеженості і замкненості множини. Множина E обмежена, але не замкнена, оскільки 0 — гранична точка множини E і $0 \notin E$.

(iii). За критерієм компактності Гаусдорфа, компактність простору (X, ρ) еквівалентна цілком обмеженості і повноті. Простір (E, ρ) — неповний простір, оскільки фундаментальна послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ розбіжна в цьому просторі. $\square$

7.2 Предкомпактні та зліченно предкомпактні множини

Означення 7.8. Нехай (X, ρ) — метричний простір і $E \subset X$. Множина E називається *відносно компактною* чи *предкомпактною*, якщо її замикання в X компактне.

Приклад 7.9. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x - y|$, $E = (0,1)$. Оскільки множина $\overline{E} = [0,1]$ — компактна (замкнена і обмежена множина у просторі $\mathbb{R}$), то множина E — предкомпактна.

Приклад 7.10. $X = (0,+\infty)$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $E = (0,1)$. Оскільки множина $\overline{E} = (0,1]$ — не компактна в X ($\overline{E} = (0,1]$ не компактна в $\mathbb{R}$, див. теорему 7.5), то множина E — не предкомпактна.

Приклад 7.11. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $E = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ — множина усіх раціональних чисел з інтервалу $(0,1)$. Оскільки множина $\overline{E} = [0,1]$ — компактна (замкнена і обмежена множина у просторі $\mathbb{R}$), то множина E — предкомпактна.

Приклад 7.12. $X = \mathbb{Q}$, $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$, $E = (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Оскільки множина $\overline{E} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ — не повний метричний простір, то, за теоремою 7.6 (критерій компактності Гаусдорфа), $\overline{E}$ — не компактна множина і, тому, E — не предкомпактна.

Теорема 7.13 (еквівалентність предкомпактності і цілком обмеженості у повному метричному просторі)**.** *Нехай (X, ρ) — повний метричний простір, $E \subset X$. Множина E предкомпактна тоді і тільки тоді, коли E — цілком обмежена.*

Довести самостійно.

Означення 7.14. Множина E у метричному просторі (X, ρ) називається *зліченно предкомпактною*, якщо її замикання в X зліченно компактне.

Легко бачити, що має місце наступна теорема.

Теорема 7.15. *Нехай (X, ρ) — метричний простір. Наступні твердження еквівалентні:*

(*i*) *Множина $E \subset X$ зліченно предкомпактна.*

(*ii*) *З будь-якої послідовності елементів множини E можна виділити підпослідовність, яка збігається в X.*

(*iii*) *Будь-яка нескінченна підмножина множини E має хоча б одну граничну точку.*

Із теореми 6.16 випливає наступний критерій.

Теорема 7.16 (про зв'язок предкомпактності і зліченної предкомпактності)**.** *Множина E в метричному просторі (X, ρ) предкомпактна тоді і тільки тоді, коли E — зліченно предкомпактна множина.*

Наведемо (без доведення) зручні для практики критерії предкомпактності у просторах $C([a, b])$, $L_p([a, b])$, l_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Наступна теорема дає нам критерій предкомпактності у просторі $C([a, b])$.

Теорема 7.17 (Арцела — Асколі)**.** *Для того, щоб множина $M \subset C([a, b])$ була предкомпактною в $C([a, b])$ необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні умови:*

(*i*) *множина M обмежена в $C([a, b])$, тобто*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in M \quad \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \leqslant C$$

(в цьому випадку кажуть, що функції із M рівномірно обмежені);

(*ii*) *множина M рівностепенево неперервна, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b]$$
$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 7.18 (критерій предкомпактності в l_p, $1 \leqslant p < \infty$)**.** *Для того, щоб множина $M \subset l_p$ була предкомпактною необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні умови:*

(*i*) *множина M обмежена в l_p, тобто*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in M \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant C$$

(в цьому випадку кажуть, що множина M рівномірно обмежена за метрикою);

(*ii*) *для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0, такий, що*

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon$$

для всіх $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$.

Наступна теорема містить критерій предкомпактності в просторі $L_p([a,b])$, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 7.19 (М. Ріса)**.** *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Для того, щоб множина $M \subset L_p([a,b])$ була предкомпактною необхідно і достатньо, щоб виконувалися наступні умови:*

(*i*) *множина M обмежена в $L_p([a,b])$, тобто*

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in M \quad \int_a^b |x(t)|^p \, dt \leqslant C;$$

(*ii*) *множина M рівностепенево неперервна в середньому, тобто, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $h \in (0, \delta)$ і для всіх $x \in M$ виконується нерівність*

$$\int_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon.$$

Список рекомендованої літератури

[1] Вагін П. П., Остудін Б. А., Шинкаренко Г. А. Основи функціонального аналізу: курс лекцій. — Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. — 140 с.

[2] Ус С. А. Функціональний аналіз: навч. посібник. — Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2013. — 236 с.

[3] Khamsi M. A., Kirk W. A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory. — Wiley-Interscience, 2001. — 320 p.

[4] Muscat J. Functional Analysis: An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras. — Springer International Publishing, 2014. — XI, 420 p.

[5] Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Минск : Вышэйшая школа, 1978. — 205 с.

[6] Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. — 2 изд. — Москва : Наука, 1967. — 416 с.

[7] Городецкий В. В., Нагнибида Н. И., Настасиев П. П. Методы решения задач по функциональному анализу: Учеб. пособие. — Киев : Выща школа, 1990. — 479 с.

[8] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональний анализ. — 3 изд. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 752 с.

[9] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Классический университетский учебник. — 7 изд. — Москва : Физматлит, 2004. — 572 с.

[10] Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. Современная математика — студентам и аспирантам. — 3 изд. — Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2000. — xii+336 с.

[11] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — Москва : Наука, 1965. — 520 с.

[12] Треногин В. А. Функциональный анализ: Учебник. — 3 изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 488 с.

[13] Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учеб. пособие. — 2 изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 240 с.

Навчальне видання

Лисенко Зоя Михайлівна,
Шанін Руслан Васильович

Функціональний аналіз.
Частина I: Метричні простори

Конспект лекцій

В авторській редакції

Підписано до друку 14.02.2022. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 4,43664. Тираж 20 пр.
Зам. № 2427.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет
імені І. І. Мечникова

Україна, 65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12
Тел.: (048) 723 28 39. E-mail: druk@onu.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.