УДК 514.75

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

QA-ДЕФОРМАЦІЯ ПОВЕРХНІ ВІД'ЄМНОЇ ГАУССОВОЇ КРИВИНИ

Для поверхні тривимірного евклідового простору в статті розглянули нескінченно малу деформацію, при якій елемент площі поверхні змінюється за заздалегідь заданим законом. Така деформація в статті названа нескінченно малою квазіареальною деформацією або коротко QA-деформацією. Задача про відшукування QA-деформації, при якій зберігається орт нормалі до поверхні, зводиться до дослідження одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно однієї невідомої функції. Для поверхонь від'ємної гауссової кривини означені початкові умови, при яких існує одна і лише одна QA-деформація зі стаціонарним ортом нормалі. При цьому для зазначеного рівняння були застосовані теорії задач Коші і Гурса. Початкові умови цих задач виражені через вектор зміщення.

MSC: 53A05, 53A45.
Ключові слова: нескінченно мала деформація, поле зміщення, варіація, орт нормалі .
DOI: 10.18524/2519–206x.2018.1.134614.

Вступ. Нескінченно малі (н. м.) деформації поверхонь за тих чи інших обмежень досліджувалися в численних роботах (див., напр., [1]– [4]). В даній статті вивчаються нескінченно малі деформації першого порядку поверхні від'ємної гауссової кривини, при якій елемент площі цієї поверхні змінюється за заданим законом, і при цьому зберігається орт нормалі. Ця задача зводиться до дослідження одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно однієї невідомої функції.

Основні результати

1. Вираз математичної моделі QA-деформації через компоненти поля зміщення. Нехай $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$ – рівняння поверхні $S \in C^3$, заданої у тривимірному евклідовому просторі, а

$$S^* : \overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2) \tag{1}$$

її деяка інфінітезимальна деформація першого порядку, де $\overline{U}(x^1, x^2)$ – поле зміщення, а параметр деформації $t \to 0$.

Під дією нескінченно малої деформації будь-яка геометрична величина $R(x^1, x^2)$ поверхні S в загальному випадку зміниться і залежатиме від параметра деформації t: $R^*(x^1, x^2, t)$. Припустимо, що приріст $\Delta R = R^*(x^1, x^2, t) - R(x^1, x^2)$ функції $R(x^1, x^2)$ при деформації розкладено в ряд за степенями t, тоді

$$R^*(x^1, x^2, t) = R(x^1, x^2) + t\delta R(x^1, x^2) + o(t^2),$$

де через $o(t^2)$ позначено величини порядку 2 і вище відносно t, якими будемо нехтувати. При цьому коефіцієнт δR називається *варіацією* величини R. Функція варіації δR очевидно характеризує специфіку (закон) змінювання величини

Надійшла 21.11.2017

R при деформації поверхні. У цьому полягає її *геометричний зміст.* Якщо задано варіацію деякої величини R, то надалі будемо говорити, що задано *закон змінювання* цієї величини при н. м. деформації.

Кажуть, що геометрична характеристика поверхні *стаціонарна* (*зберігаєтьсся*) при н. м. деформації, якщо її приріст є величиною не менш ніж другого порядку відносно t. Таким чином, стаціонарна величина характеризується тим, що її варіація тотожно дорівнює нулеві.

В подальшому всі індекси набуватимуть значень 1, 2, а коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij} поверхні S позначатиметься комою. Геометричні величини здеформованої поверхні S^*, на відміну від відповідних величин поверхні S, відзначатимемо позначкою *.

Лема 1. *При загальній нескінченно малій деформації справджується тотожність:*

$$\varepsilon_{ij}g^{ij} = \overline{r}^i\overline{U}_i, \tag{2}$$

де $2\varepsilon_{ij} \equiv \delta g_{ij}$ *— варіація метричного тензора* g_{ij}*;* g^{ij} *— компоненти тензора, оберненого до метричного,* $\overline{r}^i = \overline{r}_\alpha g^{\alpha i}, \overline{r}_\alpha = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^\alpha}$.

Доведення. Визначимо метричний тензор поверхні S^* :

$$g^*_{ij} = g_{ij} + t2\varepsilon_{ij} + o(t^2),$$

$$g^*_{ij} = \overline{r}^*_i\overline{r}^*_j = \left(\overline{r}_i + t\overline{U}_i\right)\left(\overline{r}_j + t\overline{U}_j\right) = g_{ij} + t\left(\overline{r}_i\overline{U}_j + \overline{r}_j\overline{U}_i\right) + o(t^2), \tag{3}$$

де

$$2\varepsilon_{ij} = \overline{r}_i\overline{U}_j + \overline{r}_j\overline{U}_i. \tag{4}$$

Якщо помножимо рівність (4) на тензор g^{ij} і згорнемо по індексах i, j, то отримаємо формулу (2):

$$2\varepsilon_{ij}g^{ij} = \overline{r}^j\overline{U}_j + \overline{r}^i\overline{U}_i = 2\overline{r}^i\overline{U}_i.$$

Лему доведено.

Квазіареальною н. м. деформацією поверхні S називається така н. м. деформація вигляду (1), при якій заздалегідь задано закон змінювання $\delta d\sigma$ її елемента площі [5]. Надалі її називатимемо QA-деформацією.

Елемент площі поверхні S^* можна виразити у вигляді [4]

$$d\sigma^* = \sqrt{g^*}dx^1dx^2 = d\sigma + t\delta d\sigma + o(t^2) =$$

$$= d\sigma + t\sqrt{g}g^{ij}\varepsilon_{ij}dx^1dx^2 + o(t^2) = d\sigma + t\varepsilon_{ij}g^{ij}d\sigma + o(t^2), \tag{5}$$

де $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, а варіація елемента площі

$$\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}d\sigma. \tag{6}$$

Згідно з (6) величина $\varepsilon_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \frac{\delta d\sigma}{d\sigma}$ виражає нормовану варіацію елемента площі. За допомогою рівностей

$$\frac{\delta d\sigma}{d\sigma} = \varepsilon_{ij}g^{ij} = -2\mu \tag{6a}$$

означимо функцію $\mu(x^1, x^2)$. Очевидно, задання варіації елемента площі $\delta d\sigma$ рівносильно заданню функції μ. Звідси випливає, що функція μ виражає закон змінювання елемента площі при деформації поверхні. В цьому полягає її геометричний зміст.

Н. м. деформація вигляду (1) називається *ареальною* (А-деформацією), якщо при цій деформації зберігається елемент площі поверхні S [4]. У відповідності з означенням, н. м. деформація буде ареальною тоді і лише тоді, коли варіація елемента площі тотожно дорівнює нулеві або, інакше, $d\sigma^* = d\sigma + o(t^2)$. Очевидно, QA-деформація узагальнює ареальну, яка включається до квазіареальної за умови $\mu = 0$.

Лема 2. *Для того щоб н. м. деформація поверхні класу C^2 з полем зміщення $\overline{U}$ була QA-деформацією, необхідно і достатньо, щоб поле зміщення задовольняло рівняння:*

$$\overline{r}^i \overline{U}_i = -2\mu, \tag{7}$$

де μ — задана неперервна функція.

Доведення. З попереднього випливає, що н. м. деформація поверхні є QA-деформацією тоді і лише тоді, коли виконується рівність (6а), де μ - заздалегідь задана неперервна функція. Взявши до уваги лему 1 і рівність (6а), одержимо лему 2. Лему доведено.

Нехай

$$\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}, \tag{8}$$

де $\overline{r}_\alpha, \overline{n}$ — рухомий базис, пов'язаний з поверхнею S; U^α — деяке поле контраваріантного вектора, а U° — поле інваріанта на S. Має місце

Теорема 1. *Для існування QA-деформації поверхні в класі C^2 необхідно і достатньо, щоб для заданої неперервної функції $\mu, \mu \neq 0$, рівняння*

$$U^\alpha_{,\alpha} - 2HU^\circ = -2\mu \tag{9}$$

мало ненульовий розв'язок U^α, U°. Тут H — середня кривина поверхні.

Доведення. Припустимо, що задана деяка QA-деформація поверхні і функція μ описує заздалегідь заданий закон змінювання елемента площі при цій деформації. Тоді існує ненульовий вектор зміщення $\overline{U}$ QA-деформації, компоненти якого U^α, U° теж одночасно не дорівнюють нулеві. Продиференціюємо коваріантно по x^i рівність (8) і скористаємось дериваційними рівняннями теорії поверхонь: $\overline{r}_{i,j} = b_{ij}\overline{n}, \overline{n}_i = -b^\alpha_i \overline{r}_\alpha$, де b_{ij} — коефіцієнти другої квадратичної форми, $b^\alpha_i = b_{ij} g^{j\alpha}; g^{j\alpha} g_{j\beta} = \delta^\alpha_\beta$ — символи Кронекера, остаточно

$$\overline{U}_i = \left(U^\alpha_{,i} - U^\circ b^\alpha_i\right) \overline{r}_\alpha + \left(U^\alpha b_{\alpha i} + U^\circ_i\right) \overline{n}. \tag{10}$$

Приймаючи до уваги рівність (10), замість (7) одержимо рівняння (9).

Навпаки, при заданій функції $\mu \neq 0$ будь-який ненульовий розв'язок $\left(U^1, U^2, U^\circ\right)$ рівняння (9) визначатиме поле зміщення квазіареальної н. м. деформації поверхні $\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}$. Теорему доведено.

Рівняння (9) являє собою рівняння QA-деформації, виражене через компоненти поля зміщення.

2. QA-деформація, що зберігає орт нормалі до поверхні. Рівняння (9) при заданій функції μ є неоднорідним диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку відносно компонент вектора зміщення. Оскільки у загальному випадку QA-деформація являє собою надзвичайно широкий клас деформацій, то надалі обмежимо цю деформацію додатковою вимогою того, щоб при ній залишався стаціонарним орт нормалі в будь-якій точці поверхні. Легко бачити, що при цій деформації зберігатимуться прямі — нормалі до поверхні, а також дотичні площини.

Лема 3. *При QA-деформації орт нормалі зберігається тоді і лише тоді, коли компоненти поля зміщення задовольняють умову*

$$U^{\alpha} b_{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta} = 0. \tag{11}$$

Доведення. При квазіареальній деформації варіація орта нормалі має вигляд [5]

$$\delta\overline{n} = c^{ij}\overline{r}_i \times \overline{U}_j + 2\mu\overline{n}, \tag{12}$$

де c^{ij} — дискримінантний тензор поверхні типу $\binom{2}{0}$.

Виразимо $\delta\overline{n}$ через U^{α}, U°. Для цього підставимо в (12) замість ковектора $\overline{U}_j$ його вираз (10) і скористаємося формулами [6] $\overline{r}_i \times \overline{r}_j = c_{ij}\overline{n}$, $\overline{n} \times \overline{r}_i = c_{i\alpha}\overline{r}^{\alpha}$, де $c_{ij} = c^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$. Остаточно дістанемо

$$\delta\overline{n} = -\left(U^{\alpha} b_{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta}\right)\overline{r}^{\beta}.$$

Очевидно, вимога стаціонарності орта нормалі при QA-деформації рівносильна рівності (11). Лему доведено.

Отже, система трьох диференціальних рівнянь відносно трьох невідомих функцій U^1, U^2, U°

$$\begin{cases} U^{\alpha}_{,\alpha} - 2HU^{\circ} = -2\mu, \\ U^{\alpha} b_{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

описує аналітичну модель поставленої на початку пункту задачі. Мають місце

Теорема 2. *Для існування QA-деформації поверхні в класі C^2 зі стаціонарним ортом нормалі необхідно і достатньо, щоб для заданої неперервної функції $\mu, \mu \neq 0$ система рівнянь (13) мала ненульовий розв'язок.*

Теорема 3. *Якщо поверхня класу C^3, гауссова кривина K якої відмінна від нуля, допускає н. м. деформацію з заданим законом змінювання елемента площі $\mu \in C, \mu \neq 0$, при якій зберігається орт нормалі, то на цій поверхні існує таке поле контраваріантного вектора $U^{\alpha} \in C^1$, що*

$$U^{\alpha} = -U^{\circ}_{\beta} d^{\beta\alpha},\ U^{\circ}_{\beta} = \frac{\partial U^{\circ}}{\partial x^{\beta}}, \tag{14}$$

де $d^{\alpha\beta}$ – тензор, обернений до тензора $b_{\alpha\beta}$, а функція $U^{\circ} \in C^2$ є розв'язком рівняння

$$U^{\circ}_{\alpha,\beta} d^{\alpha\beta} - \frac{K_{\alpha}}{K} d^{\alpha\beta} U^{\circ}_{\beta} + 2HU^{\circ} = 2\mu. \tag{15}$$

Доведення. Нехай задана поверхня ($K \neq 0$) допускає QA-деформацію, при якій зберігається орт нормалі. На підставі теореми 2 система рівнянь (13) при заданій відмінній від нуля функції μ має ненульовий розв'язок ($U^{\alpha},\ U^{\circ}$). Покажемо, що на поверхні поле контраваріантного вектора U^{α} виражається за формулою (14), а функція U° є розв'язком рівняння (15).

Справді, (13_2) являє собою неоднорідну систему двох алгебраїчних рівнянь крамеровського типу відносно функції U°. Її детермінант $det(b_{ij}) = Kg \neq 0$. Тензор, обернений до b_{ij}, як відомо [6], має вигляд $d^{ij} = \dfrac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}, d^{i\alpha} b_{j\alpha} = \delta^{i}_{j}$. Якщо тепер домножимо тензорне рівняння (13_2) на $d^{\beta\gamma}$ та згорнемо по індексу β, то одержимо співвідношення (14).

Підставимо тепер в перше рівняння системи (13) U^{α} з (14), дістанемо:

$$U^{\circ}_{\alpha,\beta} d^{\alpha\beta} + U^{\circ}_{\beta} d^{\beta\alpha}_{,\alpha} + 2HU^{\circ} = 2\mu. \tag{16}$$

Здійснимо перетворення цього рівняння. Відомо, що для всякої C^3- поверхні ненульової гауссової кривини справджується тотожність [4]: $\left(Kd^{\alpha\beta}\right)_{,\alpha} = 0$. Застосувавши її до рівняння (16), отримаємо (15).

Таким чином, ми довели, що при QA-деформації з зазначеним обмеженням на поверхні існує поле зміщення $\overline{U} = U^{\alpha}\overline{r}_{\alpha} + U^{\circ}\overline{n}$, компоненти якого пов'язані співвідношеннями (14), (15). Теорему доведено.

Має місце і обернена

Теорема 4. *Нехай на поверхні S класу C^3 ($K \neq 0$) існує поле контраваріантного вектора $U^{\alpha} \in C^1$, яке виражено у вигляді (14) через інваріант $U^{\circ} \in C^2$, що задовольняє рівняння (15), де $\mu \in C, \mu \neq 0$, — задана функція. Тоді така поверхня допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі. При цьому поле зміщення через функцію U° виражається однозначно*

$$\overline{U} = -d^{\beta\alpha} U^{\circ}_{\beta} \overline{r}_{\alpha} + U^{\circ}\overline{n}. \tag{17}$$

Доведення. Нехай U° є ненульовим розв'язком рівняння (15) при $\mu \neq 0$ і поле контраваріантного вектора U^{α} виражено через U° у вигляді (14). Покажемо, що в цьому випадку поверхня ($K \neq 0$) допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі. Для цього передусім переконаємося, що за умови теореми система рівнянь (13) задовольняється.

Дійсно, внесемо вираз для U^{α} з (14) в перше рівняння системи (13), тоді одержимо (16). Якщо тепер врахуємо тотожність $\left(Kd^{\alpha\beta}\right)_{,\alpha} = 0$, то рівнянню (16) надамо вигляду (15). Друге рівняння системи (13) теж виконується.

Таким чином, дана поверхня допускає QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі. При цьому поле зміщення при заданій функції μ має вигляд $\overline{U} = U^{\alpha}\overline{r}_{\alpha} + U^{\circ}\overline{n} = -d^{\beta\alpha}U^{\circ}_{\beta}\overline{r}_{\alpha} + U^{\circ}\overline{n}$ і через нормальну компоненту визначається однозначно. Теорему доведено.

Задача про квазіареальну QA-деформацію поверхні зі стаціонарним ортом нормалі звелась до відшукування розв'язків рівняння (15). До речі, це рівняння узагальнює відоме однорідне характеристичне рівняння Вейнгартена для н. м. згинань [6].

3. Деякі умови існування та єдиності QA-деформації поверхні від'ємної гауссової кривини. В рівнянні (15) коваріантну похідну виразимо через частинні похідні, тоді одержимо неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку відносно функції U° :

$$\frac{\partial^2 U^\circ}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} d^{\alpha\beta} - \left(\Gamma^\beta_{\alpha s} d^{\alpha s} + \frac{K_\alpha}{K} d^{\alpha\beta} \right) U^\circ_\beta + 2HU^\circ = 2\mu, \tag{18}$$

де $\Gamma^\beta_{\alpha s}$ — символи Христофеля другого роду. Дискримінант рівняння $\Delta = d^{11}d^{22} - (d^{12})^2 = \frac{b_{11}}{K}\frac{b_{22}}{K} - \frac{b^2_{12}}{K^2} = \frac{b}{K^2} = \frac{g}{K}$, очевидно, його знак залежить від знаку гауссової кривини.

Припустимо, що однозв'язна поверхня S гомеоморфна області G площини Ox^1x^2 і в цій області належить до класу C^3, а її гауссова кривина від'ємна ($K < 0$). Тоді дискримінант диференціального рівняння (18) теж всюди буде від'ємним $\Delta = \frac{g}{K} < 0$, а рівняння (18) гіперболічного типу. На поверхні від'ємної гауссової кривини існує дійсна регулярна сітка асимптотичних ліній. Приймемо цю сітку за координатну, тоді $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} = \sqrt{-Kg}$. Рівняння (18) у вибраній системі координат в області G набуває канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 U^\circ}{\partial x^1 \partial x^2} + a(x^1,x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^1} + b(x^1,x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^2} + c(x^1,x^2)U^\circ = b_{12}\mu, \tag{19}$$

де

$$a = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} g^{11} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} g^{12} + \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x^2} \right),$$

$$b = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} g^{12} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} g^{22} + \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial x^1} \right), c = Hb_{12}.$$

Тут коефіцієнти a, b, c — відомі неперервні функції точки поверхні, а $\mu \in C$ — заздалегідь задана функція.

3.1. Задача Коші. В області площини G задамо дугу кривої l, яка перетинається не більше ніж в одній точці з прямими, що паралельні осям координат. Її рівняння запишемо у вигляді $x^2 = g(x^1)$, при цьому будемо вважати, що існує похідна $g'(x^1)$, відмінна від нуля.

Уздовж дуги кривої l задамо значення U° та $\frac{\partial U^\circ}{\partial x^2}$:

$$U^\circ|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_0(x^1), \frac{\partial U^\circ}{\partial x^2}|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_1(x^1), \tag{20}$$

де $\varphi_0(x^1), \varphi_1(x^1)$ — задані функції класу C^1.

Оскільки коефіцієнти рівняння (19) є неперевними функціями, то в деякому околі кривої l задача Коші (19), (20) має розв'язок і до того ж єдиний [7].

Взявши до уваги рівності (8) і $U^\circ = \overline{U}\overline{n}$, початкові умови (20) виразимо через вектор зміщення $\overline{U}$:

$$\overline{U}\overline{n}|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_0(x^1), \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\overline{U}\overline{n}\right)|_{x^2=g(x^1)} = \varphi_1(x^1). \tag{21}$$

З попереднього випливає, що при заданих функціях $\mu(x^1,x^2), \varphi_0(x^1), \varphi_1(x^1)$ рівняння (19) за умов (21) завжди має розв'язок, крім того, єдиний. При цьому тангенціальна компонента U^α вектора зміщення через його нормальну компоненту U° виражається за формулою (14).

Отже, вище доведена

Теорема 5. *За початкових умов (21), де $\varphi_0(x^1), \varphi_1(x^1)$ – задані функції класу C^1, однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини при заданій неперервній функції μ допускає, причому єдину, QA-деформацію, яка зберігає її орт нормалі.*

При $\mu = 0$ ця деформація є ареальною.

За умови $\mu = 0$, коли QA-деформація поверхні зводиться до ареальної, для однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 U^\circ}{\partial x^1 \partial x^2} + a(x^1, x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^1} + b(x^1, x^2)\frac{\partial U^\circ}{\partial x^2} + c(x^1, x^2)U^\circ = 0, \tag{22}$$

розглянемо задачу Коші з однорідними початковими умовами

$$\overline{U}\overline{n}|_{x^2=g(x^1)} = 0, \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\overline{U}\overline{n}\right)|_{x^2=g(x^1)} = 0. \tag{23}$$

Очевидно, задача Коші (22), (23) має лише нульовий розв'язок. Звідси випливає

Теорема 6. *За початкових умов (23), однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини є жорсткою відносно ареальної н. м. деформації, яка зберігає її орт нормалі.*

3.2. Задача Гурса. Асимптотичні лінії $x^1 = const, x^2 = const$ поверхні S є характеристиками рівняння (19). Задамо функцію U° на характеристиках $x^1 = x_0^1$ та $x^2 = x_0^2$:

$$U^\circ|_{x^1=x_0^1} = \psi_1(x^2), x_0^2 \leqslant x^2 \leqslant b,$$
$$U^\circ|_{x^2=x_0^2} = \psi_2(x^1), x_0^1 \leqslant x^1 \leqslant a. \tag{24}$$

При цьому вважаємо, що задані функції $\psi_1(x^2)$ та $\psi_2(x^1)$ мають неперервні похідні першого порядку і $\psi_1(x_0^2) = \psi_2(x_0^1)$. Оскільки коефіцієнти рівняння (19) є неперервними функціями, то в заданій області задача Гурса (19), (24) має розв'язок і до того ж єдиний [7]. Звідси випливають наступні теореми:

Теорема 7. *За початкових умов*

$$\overline{U}\overline{n}|_{x^1=x_0^1} = \psi_1(x^2),\ x_0^2 \leqslant x^2 \leqslant b,$$
$$\overline{U}\overline{n}|_{x^2=x_0^2} = \psi_2(x^1),\ x_0^1 \leqslant x^1 \leqslant a, \tag{25}$$

де $\psi_1(x^2), \psi_2(x^1) \in C^1$ і $\psi_1(x_0^2) = \psi_2(x_0^1)$, однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини при заданій неперервній функції μ допускає, причому єдину, QA-деформацію зі стаціонарним ортом нормалі.

При $\mu = 0$ ця деформація є ареальною.

Теорема 8. *За початкових умов*

$$\overline{U}\overline{n}|_{x^1=x_0^1} = 0,\ x_0^2 \leqslant x^2 \leqslant b,$$
$$\overline{U}\overline{n}|_{x^2=x_0^2} = 0,\ x_0^1 \leqslant x^1 \leqslant a \tag{26}$$

однозв'язна поверхня $S \in C^3$ від'ємної гауссової кривини є жорсткою відносно ареальної н. м. деформації зі стаціонарним ортом нормалі.

Висновки. В даній роботі досліджується QA-деформація поверхні від'ємної гауссової кривини зі стаціонарним ортом її нормалі (у просторі E_3). Ця задача звелась до дослідження одного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно однієї невідомої функції. Основні результати роботи сформульовані в теоремах 3, 4, 5, 7.

1. **Mikes J.** Differential geometry of special mappings / J. Mikes, E. Stepanova, A. Vanzurova. –Palacky University, Olomouc, 2015. – 570 p.
2. **Velimirovic L. S.** Analysis of Gaudi surfaces at small deformations /L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic, M. S. Ciric, N. Velimirovic // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – V. 218, № 13. – P. 6999–7004.
3. **Robah S.** On stable constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$ /S. Robah // Trans. Amer. Math. Soc. – 2010. – V. 362, № 6. – P. 2845–2857.
4. **Безкоровайна Л. Л.** Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки / Л. Л. Безкоровайна. – Одеса: Астропринт, 1999. – 168 с.
5. **Безкоровайна Л. Л.** Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3 / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Proc. Intern. Geom. Center. – 2014. – T. 7, № 2.– C. 6–19.
6. **Векуа И. Н.** Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
7. **Кошляков Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

Безкоровайная Л. Л., Хомич Ю. С.
QA-деформация поверхности отрицательной гауссовой кривизны

Резюме

Для поверхности трехмерного евклидова пространства в статье рассмотрели бесконечно малую деформацию, при которой элемент площади поверхности изменяется по заранее заданному закону. Такая деформация в статье названа бесконечно малой квазиареальной деформацией или кратко QA-деформацией. Задача об отыскании QA-деформации, при которой сохраняется орт нормали к поверхности, сводится к исследованию одного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка относительно одной неизвестной функции. Для поверхностей отрицательной гауссовой кривизны указаны начальные условия, при которых существует одна и только одна QA-деформация со стационарным ортом нормали. При этом для упомянутого уравнения были применены теории задач Коши и Гурса. Начальные условия этих задач выражены через вектор смещения.
Ключевые слова: бесконечно малая деформация, поле смещения, вариация, орт нормали .

Bezkorovaina L. L., Khomych Yu. S.
QA-deformation of surface of negative Gaussian curvature

Summary

An infinitesimal deformation with the given law of changing the element of area of a surface in Euclidean three-space was considered in this article. Such deformation in the article

was called the quasiareal infinitesimal deformation or, briefly, the QA-deformation. The problem of finding the QA-deformation, under which the unit normal vector to the surface is preserved, was reduced to the study of one nonhomogeneous partial differential equation of the second order with respect to one unknown function. The initial conditions, under which the only one QA-deformation with the stationary unit normal vector exists, were defined for the surfaces of a negative Gaussian curvature. In this case, for the above equation, the Cauchy and Goursat problems were applied. The initial conditions of these tasks were expressed through the deforming vector.
Key words: infinitesimal deformation, displacement field, variation, unit normal vector.

References

1. Mikes J., Stepanova E., Vanzurova A. (2015). *Differential geometry of special mappings.* Palacky University, Olomouc, 570 p.
2. Velimirovic L. S., Cvetkovic M. D., Ciric M. S., Velimirovic N. (2012). Analysis of Gaudi surfaces at small deformations. *Applied Mathematics and Computation.*, Vol. 218, №13, P. 6999–7004.
3. Robah S. (2010) On stable constant mean curvature surfaces in $S^2 \times R$ and $H^2 \times R$ /S. Robah *Trans. Amer. Math. Soc.*Vol. 362, № 6, P. 2845–2857.
4. Bezkorovaina L. L. (1999). *Arealni neskinchenno mali deformatsiyi i vrivnovazheni stany pruzhnoyi obolonky [Areal infinitesimal deformations and stability states of elastic shell].* Odessa: Astroprint, 168 p.
5. Bezkorovaina L. L., Khomych Yu. S. (2014). Kvaziarealna neskinchenno mala deformatsiya poverkhni v E_3 [Quaziareal infinitesimal deformation of the surface in E_3]. *Proc. Intern. Geom. Center*, Vol. 7, №2. – P. 6–19.
6. Vekua I. N. (1988). *Obobshchennyye analiticheskiye funktsii [Generalized analytic functions].* M.: Nauka, 512 p.
7. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1970). *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Equations in partial derivatives of mathematical physics].* M.: Vysshaya shkola, 710 p.