

МЕХАНІКА

Mathematical Subject Classification: 74B05, 42A38
УДК 539.3

З. Ю. Журавлёва

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ПЛОСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ**

Доклад «Смешанная задача теории упругости для полуполосы» на конференции «Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 2014 г.

Доповідь «Плоска мішана задача теорії пружності для півнескінченної смуги» на конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 2014 р.

Журавльова З. Ю. Плоска мішана задача теорії пружності для напівнескінченної полоси. Розглядається плоска мішана задача для пружної навантаженої півполоси, один край якої защемлен, а на іншому виконуються умови гладкого контакту. Розв'язок задачі у трансформантах $-\sin$, $-\cos$ перетворення Фур'є будується точно як розв'язок векторної крайової задачі, та побудовано за допомогою апарату матриці Грина.

Ключові слова: напівнескінчена смуга, защемлення, гладкий контакт, матриця Грина, перетворення Фур'є, метод ортогональних многочленів.

Журавлёва З. Ю. Плоская смешанная задача теории упругости для полубесконечной полосы. Рассматривается плоская смешанная задача для упругой нагруженной полуполосы, один край которой защёмлён, а на втором выполняются условия гладкого контакта. Решение задачи в трансформантах $-\sin$, $-\cos$ преобразования Фурье строится точно как решение векторной краевой задачи, и построено с помощью аппарата матрицы Грина.

Ключевые слова: полуполоса, защемление, скользящая заделка, матрица Грина, преобразование Фурье, метод ортогональных многочленов.

Zhuravlyova Z. Yu. The plane mixed elastic problem for the semi-infinite strip. The loaded plane elastic semistrip, the one boundary of which is fixed and the second one is in the smooth contact condition, is considered. The solution of the problem in $-\sin$, $-\cos$ Fourier transformant's domain is constructed exactly as a solution of a vector boundary problem, and with the help of the Green's matrix apparatus.

Key words: semistrip, fixing, smooth contact, the Green's matrix, Fourier transformation, the orthogonal polynomials' method.

ВВЕДЕНИЕ. Эффективные методы решения плоских упругих задач теории упругости, в том числе и для полуполосы, разработаны в работах Г. В. Колосова [1] и Н. И. Мухелишвили [2] и опираются на использование теории функций комплексного переменного и интегралов типа Коши. Обширная библиография,

посвящённая применению метода интегральных преобразований для решения подобных задач, приведена в монографии Я. С. Уфлянда [3]. Достаточно часто используются стандартные методы, основанные на представлении решения в форме Папковича–Нейбера или представлении решения через комбинации нескольких гармонических функций [4]– [9].

В данной работе представлен подход, предложенный Г. Я. Поповым [10], основанный на применении интегральных преобразований непосредственно к уравнениям равновесия и граничным условиям исходной задачи, что сводит исходную краевую задачу к одномерной, которая решается с помощью аппарата векторной краевой задачи [11], [12].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановка задачи.

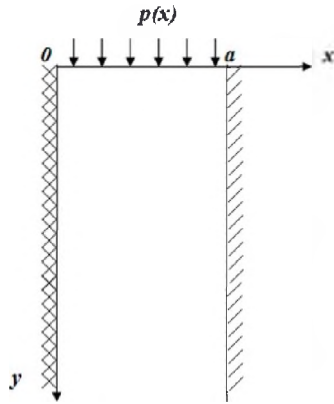


Рис. 1. Постановка задачи

Рассматривается упругая полуполоса, которая занимает область, описываемую в декартовой системе координат соотношениями $0 < x < a$, $0 < y < \infty$. Предполагается, что на грани $x = 0$, $0 < y < \infty$ выполняются условия жёсткой заделки, на грани $x = a$, $0 < y < \infty$ выполняются условия гладкого контакта

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, v(0, y) = 0, \frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

По границе $y = 0$, $0 < x < a$ заданы напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} &= 2G\mu_0 \left(\mu \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + (1 - \mu) \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} \right) = -p(x), \\ \tau_{yx}|_{y=0} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $p(x)$ — известная функция, μ — коэффициент Пуассона, G — модуль упругости, $\mu_0 = \frac{1}{1-2\mu}$.

Требуется определить смещения и напряжения, удовлетворяющие краевым условиям (1), (2) и уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \mu_* \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \mu_* \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mu_* = 1 + \mu_0, u_x(x, y) \equiv u(x, y), v_x(x, y) \equiv v(x, y).$$

2. Сведение поставленной задачи к одномерной краевой задаче.

Введём неизвестную функцию $v(x, 0) = \chi(x)$, $\frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = \chi'(x)$. Тогда учитывая, что $\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = -\chi'(x)$, второе условие в (2) будет выполнено. Задача (1)–(3) сводится к одномерной краевой задаче путём применения интегрального $-\cos, -\sin$ преобразования Фурье по переменной y по схеме

$$\begin{bmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y) \cos \beta y dy \\ v(x, y) \sin \beta y dy \end{bmatrix}. \quad (4)$$

с формулами обращения

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} u_{\beta}(x) \cos \beta y d\beta \\ v_{\beta}(x) \sin \beta y d\beta \end{bmatrix} \quad (5)$$

В результате применения интегрального преобразования система уравнений равновесия примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_{\beta}(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa-1)u_{\beta}(x)}{\kappa+1} + \frac{2\beta}{\kappa+1} \frac{dv_{\beta}(x)}{dx} &= \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x), \\ \frac{d^2 v_{\beta}(x)}{dx^2} - \frac{\beta^2(\kappa+1)v_{\beta}(x)}{\kappa-1} - \frac{2\beta}{\kappa-1} \frac{du_{\beta}(x)}{dx} &= -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x), \\ u_{\beta}(0) = 0, u_{\beta}(a) = 0, \\ v_{\beta}(0) = 0, v'_{\beta}(a) = 0, \kappa = 3 - 4\mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Введём следующие вектора

$$\vec{y}_{\beta}(x) = \begin{pmatrix} u_{\beta}(x) \\ v_{\beta}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_{\beta}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) \end{pmatrix}$$

и матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Краевая задача (6) в векторном виде запишется так:

$$\begin{aligned} L_2 \vec{y}_{\beta}(x) = I \vec{y}'_{\beta}(x) + 2\beta Q \vec{y}'_{\beta}(x) - \beta^2 P \vec{y}_{\beta}(x) &= \vec{f}_{\beta}(x), \\ I \vec{y}_{\beta}(0) = 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}_{\beta}(a) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}'_{\beta}(a) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Решение векторной однородной задачи.

Чтобы получить решение уравнения (7), следует сначала построить решение матричного однородного уравнения $L_2 Y_{\beta}(x) = 0, 0 < x < a$ [13]. Подстановка $Y_{\beta}(x) = e^{\xi x} I$ приводит к равенству $L_2 e^{\xi x} I = M(\xi) e^{\xi x}$, где $M(\xi)$ — матрица порядка 2×2 :

$$M(\xi) = I \xi^2 + 2\beta Q \xi - \beta^2 P = \begin{pmatrix} \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & \frac{2\beta \xi}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta \xi}{\kappa-1} & \xi^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что решение полученного матричного уравнения строится по формуле

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} M^{-1}(\xi) d\xi,$$

где M^{-1} — матрица, обратная к $M(\xi)$, а контур C охватывает особые точки подинтегральной функции. Знаменатель подинтегрального выражения представляет собой определитель матрицы $M(\xi)$: $\det M(\xi) = (\xi - \beta)^2 \times (\xi + \beta)^2$. Как видно, он содержит два кратных полюса $\xi = \beta, \xi = -\beta$. Вычисляя контурный

интеграл с помощью теоремы о вычетах, и производя вычет в кратных полюсах $\xi = \beta, \xi = -\beta$, получаем следующие матричные решения

$$Y_1(x) = \frac{e^{\beta x}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\kappa - \beta x}{\beta(\kappa - 1)} & -\frac{x}{\kappa + 1} \\ \frac{x}{\kappa - 1} & \frac{\kappa + \beta x}{\beta(\kappa + 1)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$Y_2(x) = \frac{e^{-\beta x}}{2} \begin{pmatrix} \frac{-\kappa + \beta x}{\beta(\kappa - 1)} & \frac{x}{\kappa + 1} \\ -\frac{x}{\kappa - 1} & -\frac{\kappa - \beta x}{\beta(\kappa + 1)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда решение векторного уравнения в (7) имеет следующий вид:

$$\vec{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \vec{y}_{ps}(x), \quad (10)$$

где $\vec{y}_{ps}(x)$ — частное решение уравнения равновесия в (7), $c_i, i = \overline{1, 4}$ — неизвестные постоянные. Для их отыскания запишем граничные условия в (6) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(0) \\ v_\beta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\beta(a) \\ v_\beta(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты c_i определяются как решения следующей матричной системы

$$\begin{cases} Y_1(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(0) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\vec{y}_\beta(0), \\ Y_1(a) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(a) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = -\vec{y}_\beta(a). \end{cases} \quad (11)$$

4. Построение матрицы Грина.

С целью найти частное решение $\vec{y}_{ps}(x)$ векторного уравнения (7) построим матрицу Грина $G_B(x, \xi)$. Это реализовано методом интегральных преобразований для краевой задачи

$$L_2 \vec{y}(x) = I \vec{y}''(x) + 2\beta Q \vec{y}'(x) - \beta^2 P \vec{y}(x) = \vec{f}(x), \quad (12)$$

$$y_1(0) = 0, y_2'(0) = 0, y_1(a) = 0, y_2'(a) = 0. \quad (13)$$

Ядро интегрального преобразования выбирается в виде

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Уравнение (12) умножается на ядро (14) и интегрируется по частям на отрезке $[0, a]$. Заметим, что $H''(x, \alpha_n) = -\alpha_n^2 H(x, \alpha_n)$.

Введём два граничных функционала

$$U_0[\vec{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(0) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}'(0),$$

$$U_1[\vec{y}(x)] = \alpha_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(a) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}'(a).$$

Граничные условия

$$U_0 [\vec{y}(x)] = 0, \quad U_1 [\vec{y}(x)] = 0 \quad (15)$$

эквивалентны граничным условиям (13). После интегрирования уравнение (12) примет вид

$$\left[-I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\tilde{Q} - \beta^2 P \right] \vec{y}_n = \vec{f}_n.$$

$$M_\beta(\alpha_n) = -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\tilde{Q} - \beta^2 P = \begin{pmatrix} -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa+1} \\ -\frac{2\beta\alpha_n}{\kappa-1} & -\alpha_n^2 - \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \end{pmatrix} = M_\beta^{-1}(\alpha_n) \vec{f}_n, \quad \vec{f}_n = \int_0^a H(x, \alpha_n) \vec{f}(x) dx, \quad (16)$$

$$y_{n1} = \int_0^a \sin(\alpha_n x) y_1(x) dx, \quad y_1(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} i y_{n1} \sin(\alpha_n x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} ' y_{n1} \sin \alpha_n x,$$

$$y_{n2} = \int_0^a \cos(\alpha_n x) y_2(x) dx, \quad y_2(x) = \frac{y_{02}}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} y_{n2} \cos(\alpha_n x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} ' y_{n2} \cos \alpha_n x,$$

$$y_{02} = \int_0^a y_2(x) dx,$$

где ' означает, что нулевой член умножается на $\frac{1}{2}$.

Объединив эти результаты, получим:

$$\vec{y}_n = \int_0^a H(x, \alpha_n) \vec{y}(x) dx, \quad \vec{y}(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) \vec{y}_n. \quad (17)$$

Обращаем (16) согласно (17)

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) M_\beta^{-1}(\alpha_n) \vec{f}_n = \\ &= \int_0^a \left[\frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) M_\beta^{-1} H(\xi, \alpha_n) \right] \vec{f}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Матрица Грина краевой задачи $L_2 \vec{y}(x) = \vec{f}(x), 0 < x < a, U_0 [\vec{y}(x)] = 0, U_1 [\vec{y}(x)] = 0$ согласно (18) имеет вид:

$$G_B(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} ' H(x, \alpha_n) M_\beta^{-1} H(\xi, \alpha_n).$$

Она представима в виде билинейного разложения, и удовлетворяет граничным условиям (15). Компоненты матрицы Грина приводятся ниже:

$$G_{11}(x, \xi) = \frac{\kappa \cosh(\beta(\xi - a + x)) - \kappa \cosh(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta \sinh(a\beta)(\kappa - 1)} - \frac{1}{2(\sinh(a\beta))^2(\kappa - 1)} \times \\ \times [\sinh(a\beta)(\xi \sinh(\beta(\xi - a + x)) + x \sinh(\beta(\xi - a + x)) - \\ - a \sinh(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|) a \sinh(\beta(a - |\xi - x|)) - \\ - a \cosh(a\beta)(\cosh(\beta(\xi - a + x)) - \cosh(\beta(a - |\xi - x|)))],$$

$$G_{12}(x, \xi) = \frac{1}{2\sinh(a\beta)(\kappa + 1)} \left[-\frac{a \cosh(a\beta)}{((\cosh(a\beta))^2 - 1)(\kappa + 1)} (\sinh(\beta(\xi - a + x)) - \\ - \operatorname{sign}(x - \xi) \sinh(\beta(a - |\xi - x|))) + (\cosh(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) - \\ - \operatorname{sign}(x - \xi) \cosh(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|)) \right],$$

$$G_{21}(x, \xi) = \frac{1}{2\sinh(a\beta)(\kappa - 1)} \left[-\frac{a \cosh(a\beta)}{((\cosh(a\beta))^2 - 1)(\kappa - 1)} (\sinh(\beta(\xi - a + x)) + \\ + \operatorname{sign}(x - \xi) \sinh(\beta(a - |\xi - x|))) + (\cosh(\beta(\xi - a + x))(\xi - a + x) + \\ + \operatorname{sign}(x - \xi) \cosh(\beta(a - |\xi - x|))(a - |\xi - x|)) \right],$$

$$G_{22}(x, \xi) = -\frac{\cosh(\beta(\xi - a + x)) + \cosh(\beta(a - |\xi - x|))}{2\beta \sinh(a\beta)} + \frac{1}{2\beta(\sinh(a\beta))^2(\kappa + 1)} \times \\ \times [\sinh(a\beta)(\cosh(\beta(\xi - a + x)) + \cosh(a - |\xi - x|)) + \\ + \beta((a - x - \xi) \sinh(\beta(\xi - a + x)) - (a - |\xi - x|) \sinh(\beta(a - |\xi - x|))) + \\ + a\beta \cosh(a\beta)(\cosh(\beta(\xi - a + x)) - \cosh(\beta(a - |\xi - x|)))].$$

Окончательно частное решение будет иметь вид

$$\vec{y}_{ps}(x) = \int_0^a G_B(x, \xi) \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(\xi) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Вернёмся к краевой задаче (7). В данном случае $y_1(x) = u_\beta(x)$, $y_2(x) = v_\beta(x)$.

Общее решение неоднородной краевой задачи (7) строится в виде суперпозиции общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\vec{y}_\beta(x) = Y_1(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y_2(x) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G_B(x, \xi) \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(\xi) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(\xi) \end{pmatrix} d\xi.$$

Это позволит записать выражения для трансформант смещений:

$$u_\beta(x) = Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4 + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_B^{11}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_B^{12}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi, \quad (19)$$

$$v_\beta(x) = Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_B^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi - \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a G_B^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Постоянные коэффициенты $c_i, i = \overline{1, 4}$ найдены из граничных условий

$$u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, \quad (21)$$

$$v(0, y) = 0, v'(a, y) = 0, \quad (22)$$

Детализируя условия (15), которым по построению должна удовлетворять матрица Грина, получим, что интегральные слагаемые в соотношении (19) зануляются.

При реализации условий (22) интегральные слагаемые в (20) сохраняются, например, такие $\int_0^a G_B^{21}(0, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \int_0^a G_B^{22}(0, \xi) \chi(\xi) d\xi$. Причём второй из них можно преобразовать к виду

$$\int_0^a G_B^{22}(0, \xi) \chi(\xi) d\xi = \phi_B^{22}(0, a) \chi(a) - \int_0^a \phi_B^{22}(0, \xi) \chi'(\xi) d\xi, \quad \chi(0) = 0,$$

где $\phi_B^{22}(x, \xi)$ — первообразная функции $G_B^{22}(x, \xi)$. Учтём также, что $\phi_B^{22}(x, a) = 0$.

В итоге соотношения (19)–(20) примут вид

$$\begin{aligned} u_\beta(x) &= Y_1^{11}(x)c_1 + Y_1^{12}(x)c_2 + Y_2^{11}(x)c_3 + Y_2^{12}(x)c_4, \\ v_\beta(x) &= Y_1^{21}(x)c_1 + Y_1^{22}(x)c_2 + Y_2^{21}(x)c_3 + Y_2^{22}(x)c_4 + \\ &+ \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \int_0^a G_B^{21}(x, \xi) \chi'(\xi) d\xi + \beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \int_0^a \phi_B^{22}(x, \xi) \chi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (23)$$

5. Решение сингулярного интегрального уравнения.

Подставив в формулы (10) полученную ранее фундаментальную матричную систему решений $Y_1(x), Y_2(x)$, постоянные $c_i, i = \overline{1, 4}$ и обратив полученные трансформанты согласно формулам (5), получим выражения для перемещений в виде повторных интегралов.

Непосредственно подставить данные выражения в оставшееся граничное условие

$$\sigma_y|_{y=0} = 2G\mu_0 \left(\mu \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + (1-\mu) \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} \right) = -p(x)$$

нельзя, так как интегралы, входящие в представления для $u(x, y)$ и $v(x, y)$, являются слабо сходящимися (а значит, их производные будут расходящимися интегралами). Для преодоления этой проблемы предварительно выделены слабо сходящиеся части в представлении перемещений.

С помощью линейной замены переменных $x_* = \frac{x}{a}$ переходим к промежутку интегрирования $[0, 1]$. В итоге получаем интегральное уравнение следующего вида:

$$\int_0^1 \chi'(\xi) \left[\frac{a_1}{\xi-x} + \phi(\xi, x) \right] d\xi = r(x), x \in [0, 1], \quad (24)$$

где $\phi(\xi, x)$ — известная функция, a_1 — известная постоянная, $r(x)$ — функция, зависящая от нагрузки $p(x)$.

Схема метода ортогональных многочленов [14] диктует разложение функции $\chi'(\xi)$ в ряд с учётом характера её особенности:

$$\chi'(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^\alpha (1-\xi)^\beta P_n^{\alpha, \beta}(1-2\xi) \quad (25)$$

где $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ — многочлен Якоби, α и β найдены из [3].

Представление (25) подставляется в уравнение (24) с учётом соотношения из [11]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-y)^\alpha (1+y)^\beta P_m^{\alpha, \beta}(y) dy}{y-x} = \text{ctg}(\pi\alpha) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{\alpha, \beta}(x).$$

Применение стандартной схемы метода ортогональных многочленов приводит к получению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений вида

$$c_m + \sum_{n=0}^{\infty} c_n d_{mn} = f_m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где c_m — искомые коэффициенты, d_{mn}, f_m — известные величины. Решая систему методом редукции по схеме, изложенной в [14], подставляем найденные коэффициенты в выражение для неизвестной функции (25), которое затем учитывается в формулах (23), определяющих искомые смещения $u(x, y), v(x, y)$.

6. Обсуждение численного результата.

Численные расчёты проводились для упругой полосы ($G = 82.03125$ МПа, $\mu = 0.28$) при значении параметра $a = 10$, нагрузке $p(x) = 1$. Они были верифицированы путём сопоставления значений $\sigma_y(x, 0), u(0, y), u(a, y), v(0, y), v(a, y)$ с заданными краевыми условиями (1)–(2). Результаты расчётов совпадают с заданными значениями с точностью 10^{-4} .

Было проведено исследование напряжений $\sigma_y(x, y)$ и $\sigma_x(x, y)$ на линии $x = 5, 0 < y < 10$. На рисунке 2 кривая 1 соответствует изменениям напряжений $\sigma_y(5, y)$, а кривая 2 — изменениям напряжений $\sigma_x(5, y)$. Как видно, абсолютное значение напряжений $\sigma_y(5, y)$ примерно в 2 раза выше напряжений $\sigma_x(5, y)$. По мере удаления от места приложения нагрузки абсолютные значения уменьшаются, оставаясь отрицательными.

На рисунке 3 изображена динамика изменения смещений вдоль линии $x = 5, 0 < y < 10$. Кривая 1 соответствует изменениям перемещений $u(5, y)$, а кривая 2 — изменениям перемещений $v(5, y)$. Анализ показывает, что с увеличением расстояния от места приложения нагрузки, смещения начинают существенно убывать, причём абсолютные значения $u(5, y)$ существенно выше, чем $v(5, y)$.

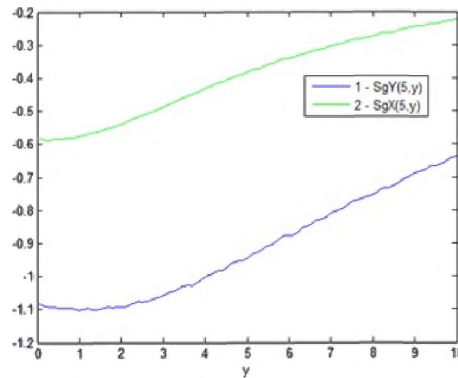


Рис. 2. Нормальные напряжения $\sigma_y(5, y), \sigma_x(5, y)$

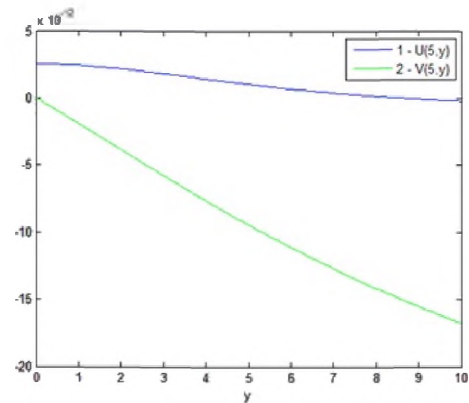


Рис. 3. Перемещения $u(5, y), v(5, y)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Получено решение плоской задачи для полуполосы путём непосредственного применения метода интегральных преобразований к уравнениям равновесия. Указанный подход позволяет свести задачу в пространстве трансформант к одномерной векторной краевой задаче, решение которой строится точно с помощью аппарата матричного дифференциального исчисления. Указанный подход позволяет решить аналогичную задачу для полуполосы при различных граничных условиях на её границах.

1. **Колосов Г. В.** Применение комплексных диаграмм и теории функции комплексной переменной к теории упругости / Колосов Г. В. – М.: ОНТИ, 1935. – 224 с.
2. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Мусхелишвили Н. И. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Уфлянд Я. С. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
4. **Bogy D. B.** Solution of the plane end problem for a semi-infinite elastic strip / D. B. Bogy // Appl. Math. Phys. – 1975. – Vol. 26. – P. 749–769.
5. **Bogy D. B.** The plane solution for joined dissimilar elastic semistrips under tension / D. B. Bogy // Journal of Applied Mechanics. – 1974. – Vol. 42.
6. **Gregory R. D.** The semi-infinite strip $x \geq 0, -1 \leq y \leq +1$; completeness of the Papkovitch–Fadle eigenfunctions when ϕ_{xx} and ϕ_{yy} are prescribed / R. D. Gregory // J. Elastic. – 1980. – Vol. 10. – P. 57–80.
7. **Johnson M. W.** The semi-infinite elastic strip / M. W. Johnson // Q. Appl. Math. – 1965. – Vol. 22. – P. 335–344.
8. **Vorovich I. I.** Some problems in the theory of elasticity for a semi-infinite strip / I. I. Vorovich, V. V. Kopasenko // J. Appl. Math. Mech. – 1966. – Vol. 30. – P. 128–136.
9. **Hussein N. S.** Solution of a problem linear plane elasticity with mixed boundary conditions by the method of boundary integrals / N. S. Hussein // Mathematical Problems in Engineering. – 2014. – Vol. 2014, Article ID 323178.

10. **Попов Г. Я.** О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях в применении к краевым задачам механики / Г. Я. Попов // Прикладная математика. – 2003. – Т. 39, №12. – С. 46–73.
11. **Попов Г. Я.** Избранные работы в 2 томах. Т.1 / Г. Я. Попов. – Одесса, ВУВ, 2007. – с. 268–272
12. **Математичні** проблеми механіки неоднорідних структур : зб. наук. праць / Під заг. редакцією І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Л. : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – 24–26 с.
13. **Попов Г. Я.** Осесимметричная задача о напряжённом состоянии дважды усечённого конуса / Г. Я. Попов, Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, №1. – С. 185–197.
14. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов разрезов тонких включений и подкреплений / Попов Г. Я. – М. : Наука, 1966. – 707 с.