

УДК 539.3

В. М. Воробель, В. В. Реут

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

БЕСКОНЕЧНО ДЛИННАЯ КОРОБЧАТАЯ ОБОЛОЧКА, ПОДКРЕПЛЕННАЯ ТОНКИМ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ЕЁ РЕБРАМ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
з математичних проблем механіки та математичної фізики ОНУ 31.03.2000

Розглядається задача про напружено-деформований стан нескінченно довгої коробчастої оболонки прямокутного перерізу з тонкостінним прямолінійним абсолютно жорстким включенням, паралельним ребрам оболонки. Використовується асимптотичний підхід [1,2,12], який дозволяє враховувати тільки згин пластин, які складають оболонку, при дії на оболонку навантаження, перпендикулярного її серединній поверхні. Побудовано графіки залежності осідання включення від зведеної довжини включення.

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии бесконечно длинной коробчатой оболочки прямоугольного сечения с тонкостенным прямолинейным абсолютно жестким включением, параллельным ребрам оболочки. Используется асимптотический подход [1,2,12], который позволяет учитывать только изгиб пластин составляющих оболочку, при действии на оболочку нагрузки, перпендикулярной ее срединной поверхности. Построены графики зависимости осадки включения от приведенной длины включения.

The problem of stress-deformed state of the infinitely long box shell of rectangular cross-section with the thin-walled linear absolutely rigid inclusion, parallel to the shell ribs is considered. The asymptotic approach [1,2,12] allowing to take into account only the bending of plates constituent the shell at the action of the loading perpendicular to its median surface, is used. The plots of the dependence of the inclusion settling on the reduced length of inclusion are constructed.

Введение. В настоящей работе исследуется задача, описывающая напряженно-деформированное состояние бесконечно длинной коробчатой оболочки прямоугольного сечения, подкрепленной по одной из граней прямолинейным тонким абсолютно жестким включением параллельным ребрам оболочки (Рис.1). Оболочка обжимается двумя сосредоточенными силами, действующими вдоль нормали к срединной поверхности оболочки, причем одна из них приложена к середине включения.

Первой работой, посвященной исследованию коробчатых оболочек, является, по-видимому, работа А. Ф. Смотровой [16], где учитывались только изгибные напряжения в предположении, что ребра оболочки не искривляются и играют роль жестких опор. В [13] для расчета прямоугольных пространственных коробок привлекался аппарат неразрезных пластин, идея использования которого принадлежит К. К. Лихареву [13, с.171]. Н. П. Флейшман рассмотрел задачи о коробчатой оболочке корытного и уголкового профилей [18,15], причем так же как у А. Ф. Смотровой учитывался только изгиб пластин, составляющих оболочку. П. Ф. Папкович [9] рассмотрел пустотелую трубчатую балку прямоугольного сечения, которая нагружена силами действующими в плоскостях стенок, и, в предположении малости отношения толщины оболочки h к наименьшему размеру поперечного сечения, считал, что пояски (полки)

и стенки балки находятся в условиях плоского напряженного состояния и взаимодействуют между собой только посредством касательных напряжений. В работах В. И. Моссаковского и его учеников [7,17] для расчета коробчатых оболочек предложен и разработан метод однородных решений, эффективный для частных случаев нагружения или для определения собственных частот колебаний.

В [11] Г. Я. Поповым и В. В. Реутом был предложен новый подход к расчету коробчатых оболочек, основанный на сведении к задаче о совместном плоско-изгибном напряженном состоянии фиктивной пластинки с дефектами, роль которых играют ребра оболочки.

Преимущество последнего подхода состоит в том, что, во-первых, он позволяет сократить количество дифференциальных уравнений (в общем случае в четыре раза – по числу ребер), во-вторых, упрощаются условия стыковки пластин, в-третьих, методика решения задач с дефектами различной природы хорошо разработана и изложена в [10]. Согласно этой методике задачи с дефектами после интегрального преобразования сводятся к одномерным разрывным краевым задачам [10], решая которые и обращая интегральное преобразование, получаем, в общем случае, систему интегральных уравнений (ИУ) относительно неизвестных на дефекте функций. Решение системы ИУ строится приближенно с помощью метода ортогональных многочленов [10], после применения которого получаются бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) с быстро убывающими недиагональными элементами, что позволяет эффективно урезать эти системы. На основе вышеуказанного подхода в [3] была решена задача, аналогичная рассматриваемой в настоящей статье, но подкрепленной вторым, симметрично расположенным относительно первого, включением.

Для упрощения постановки задачи в [1,2,12] был предложен асимптотический метод расчета пластинчатых оболочек, учитывающий малость параметра $\epsilon = h/d$ (h – толщина оболочки, d – характерный геометрический размер поперечного сечения оболочки). Тогда совместная плоско-изгибная задача разбивается на две последовательно решаемые задачи: изгибную и плоскую, с точностью до ϵ^2 . Причем изгибная задача представляет собой, по сути, задачу А. Ф. Смотровой о неразрезной пластинке, шарнирно опертой вдоль ребер, а плоская – задачу П. Ф. Папковича [9] о плоском напряженном состоянии пластинки с дефектом, на берегах которого заданы значения нормальных напряжений, получаемых из решения изгибной задачи, и выполняется условие непрерывности касательных усилий и перемещений. Там же показано, что перемещения и напряжения имеют различный порядок малости по ϵ в случае нагрузки, действующей в срединной плоскости оболочки и нормально к ней. В первом случае плоские перемещения u, v и прогибы w имеют порядок $O(1)$, плоские напряжения $\sigma_{пл} \sim O(1)$, а максимальные изгибные напряжения, вызванные изгибающим моментом $\sigma_{из} \sim O(\epsilon)$. Во втором случае u, v имеют порядок $O(\epsilon^{-1})$, $w \sim O(\epsilon^{-3})$, $\sigma_{пл} \sim O(\epsilon^{-1})$, $\sigma_{из} \sim O(\epsilon^{-2})$. Следовательно, в первом случае имеет смысл решать только плоскую задачу П. Ф. Папковича, а во втором случае – только задачу А. Ф. Смотровой, что совпадает с выводами полученными в работе [17].

На основе вышеупомянутых подходов и методов, предложенных и разработанных Г. Я. Поповым и его учениками в [1–6,8,14], были рассмотрены некоторые задачи для бесконечно длинных коробчатых оболочек с прямолинейными тонкостенными трещинами и абсолютно жесткими включениями, причем особую сложность составили задачи, когда трещина касается или пересекает ребро оболочки [5,8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим коробчатую оболочку бесконечной длины, представляющую собой четыре жёстко сочленённые между собой полосовидные пластины, которые подчиняются гипотезам Кирхгофа-Лява, сделаны из одного материала и толщина h которых мала по сравнению с характерным размером поперечного сечения оболочки (на Рис.1 изображена срединная поверхность оболочки). Одна из пластин оболочки по центру подкреплена тонким абсолютно жёстким включением, параллельным ее рёбрам. Оболочка обжимается двумя сосредоточенными силами, одна из которых приложена к центру включения, а другая приложена симметрично к противоположной грани оболочки. Поскольку нагрузка симметрична относительно плоскостей $x = 0, y = 0$, в дальнейшем, рассматривается только часть оболочки, расположенная в области $x \geq 0, y \geq 0$. На рисунке 2 изображена срединная плоскость полосовидной неразрезной пластины, шарнирно опёртой вдоль линий $x = x_1, x = x_2$.

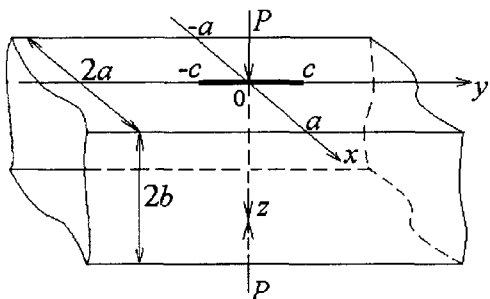


Рис. 1. Схема коробчатой оболочки

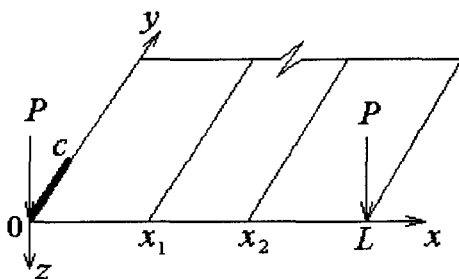


Рис. 2. Схема неразрезной пластины

Математическая постановка задачи сводится к решению бигармонического уравнения

$$\Delta^2 w(x,y) = P \delta(x-L) \delta(y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < +\infty, \quad x \neq x_i, \quad i = 1,2, \quad (1)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\varphi_x = 0, \quad V_x = \psi, \quad x = 0;$$

$$\varphi_x = 0, \quad V_x = 0, \quad x = L, \quad (2)$$

граничным условиям на торце при $y = 0$

$$\varphi_y = 0, \quad V_y = 0, \quad (3)$$

условиям на рёбрах при $x = x_i, \quad i = 1,2$

$$\langle \varphi_x \rangle = \langle M_x \rangle = \langle w \rangle = w = 0, \quad (4)$$

где $x_1 = a, \quad x_2 = L - a, \quad L = 2(a+b), \quad \langle f \rangle = f(x_i - 0, y) - f(x_i + 0, y)$, и условию на включении

$$w = \delta, \quad x = 0, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (5)$$

при выполнении условия равновесия на включении

$$\int_{-1}^1 V_x(0,y) dy = -P/2, \quad (6)$$

где δ — неизвестная осадка включения и введена неизвестная функция $\psi(y) = V_x(0,y), \quad \psi(y) \equiv 0, \quad |y| > 1$.

Здесь w — прогиб пластины в направлении оси z ; M_n, V_n, φ_n — изгибающий момент, обобщённая поперечная сила и угол наклона пластины по сечению с нормалью n , и введены безразмерные величины, обозначенные теми же буквами, что и соответствующие им физические величины, которые в отличие от первых помечены звёздочкой:

$$\begin{aligned} (x, y, a, b) &= (x_*, y_*, a_*, b_*)/c_*, \quad w(x, y) = D_1 \varepsilon^3 w_*(x_*, y_*)/c_*, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{n*}(x_*) D_1 \varepsilon^3, \\ M_n &= M_{n*}/E_* c_*^2, \quad V_n = V_{n*}/E_* c_*, \quad \psi(x) = \psi_*(x_*)/E_* c_*, \quad P = P_*/E_* c_*^2, \\ D_1 &= D_*/E_* h_*^3, \quad \varepsilon = h_*/c_*, \quad c = h = E = D = 1, \end{aligned} \tag{7}$$

где h_* , E_* , D_* – толщина, модуль Юнга и цилиндрическая жёсткость пластин.

2. Получение интегрального уравнения. Применение полубесконечного косинус-преобразования Фурье по переменной y приводит к одномерной разрывной краевой задаче

$$(d^2/dx^2 - \lambda^2)^2 w_\lambda(x) = 2^{-1} P \delta(x-L), \quad 0 < x < L, \quad x \neq x_i, \quad i=1,2 \tag{8}$$

$$w'_\lambda(0) = 0, \quad w'_\lambda(L) = 0$$

$$w''_\lambda(0) - (2-\nu)\lambda^2 w'_\lambda(0) = -\psi_\lambda, \quad w''_\lambda(L) - (2-\nu)\lambda^2 w'_\lambda(L) = 0 \tag{9}$$

$$\langle w_\lambda(x_i) \rangle = \langle w'_\lambda(x_i) \rangle = \langle w''_\lambda(x_i) \rangle = w_\lambda(x_i) = 0, \quad i=1,2 \tag{10}$$

решение которой записывается согласно [10]:

$$w_\lambda(x) = 4^{-1} P \tilde{G}_\lambda(x, L) - \psi_\lambda \tilde{G}_\lambda(x, 0), \tag{11}$$

где

$$\tilde{G}_\lambda(x, \xi) = \begin{vmatrix} G_\lambda(x, \xi) & G_\lambda(x, x_1) & G_\lambda(x, x_2) \\ G_\lambda(x_1, \xi) & G_\lambda(x_1, x_1) & G_\lambda(x_1, x_2) \\ G_\lambda(x_2, \xi) & G_\lambda(x_2, x_1) & G_\lambda(x_2, x_2) \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} G_\lambda(x_1, x_1) & G_\lambda(x_1, x_2) \\ G_\lambda(x_2, x_1) & G_\lambda(x_2, x_2) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

$G_\lambda(x, \xi)$ – функция Грина краевой задачи (8)–(9):

$$G_\lambda(x, \xi) = \Phi(x, \xi) + H(x, \xi), \quad \Phi(x, \xi) = e_\lambda(x - \xi) + e_\lambda(x + \xi), \tag{13}$$

$$e_\lambda(t) = \exp(-|\lambda t|) (1 + |\lambda t|) / 4|\lambda|^3$$

$$H(x, \xi) = \frac{\exp(-\lambda L)}{2\lambda^3 \operatorname{sh} \lambda L} \{ \operatorname{ch} \lambda x \operatorname{ch} \lambda \xi (1 + \lambda L (1 + \operatorname{cth} \lambda L)) - \lambda x \operatorname{sh} \lambda x \operatorname{ch} \lambda \xi - \lambda \xi \operatorname{sh} \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda x \}.$$

После обратного преобразования Фурье и реализации условия (5) получим интегральное уравнение, которое продолжено на весь интервал $(-1, 1)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(\eta) K(y, \eta) d\eta = f(y), \quad |y| < 1, \tag{14}$$

$$f(y) = w_p(y) - \delta, \quad w_p(y) = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \tilde{G}_\lambda(0, L) d\lambda,$$

$$K(y, \eta) = \int_0^\infty \cos \lambda y \cos \lambda \eta \tilde{G}_\lambda(0, 0) d\lambda.$$

Для возможности применения метода ортогональных многочленов [10] (МОМ) выделим из ядра $K(y, \eta)$ его нерегулярную часть, для которой собственными функциями являются ортогональные многочлены. Воспользуемся интегралом [3]

$$\int_0^\infty [\cos \lambda t - 1 + 2^{-1} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda}] \lambda^{-3} d\lambda = 2^{-1} t^2 \ln|t| - 3t^2/4 \tag{15}$$

и учтём следующую асимптотику

$$\tilde{G}_\lambda(0, 0) = A_0 + o(1), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad A_0 = \operatorname{const} \neq 0,$$

$$\tilde{G}_\lambda(0, 0) = (2\lambda^3)^{-1} + O(\exp(-2\lambda x_1)), \quad \lambda \rightarrow \infty. \tag{16}$$

В результате приходим к ИУ первого рода с непрерывным ядром

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \psi(\eta) \left[(y-\eta)^2 \ln|y-\eta| + R(y, \eta) \right] d\eta = f(y), \quad |y| < 1, \quad (17)$$

$$R(y, \eta) = -1,5 \cdot (y-\eta)^2 + 2 \int_0^{\infty} \left[(k(\lambda) - 1) \cos \lambda y \cos \lambda \eta + 1 - 2^{-1} \lambda^2 (y-\eta)^2 e^{-\lambda} \right] \lambda^{-3} d\lambda$$

($R(x, \xi)$ – бесконечно дифференцируемая функция, и введено обозначение $k(\lambda) = 2\lambda^3 \tilde{G}_\lambda(0,0)$). В [10] показано, что оно не имеет интегрируемых решений и там же было предложено искать решение в классе функций, допускающих неинтегрируемые особенности вида $(1-\eta^2)^{-3/2}$, с привлечением аппарата регуляризации расходящихся интегралов.

3. Приведение к бесконечной системе. Согласно MOM [10] решение будем искать в виде

$$\psi(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \pi_{2k}(\eta) \quad (18)$$

где

$$\pi_0(\eta) = (1-\eta^2)^{-1/2}, \quad \pi_n(\eta) = 2\sqrt{\pi n!} \Gamma^{-1}(n-1/2) (1-\eta^2)^{-3/2} P_{n-3/2, -3/2}(\eta), \quad n \geq 1 \quad (19)$$

При выборе вида $\pi_n(\eta)$ учтено, что $P_0^{-3/2, -3/2}(\eta) \equiv \text{const}$, $P_2^{-3/2, -3/2}(\eta) \equiv \text{const}$ и поэтому система стандартных многочленов Якоби $P_n^{-3/2, -3/2}(\eta)$ не является полной (и к тому же является линейно зависимой). Поэтому многочлен $P_0^{-3/2, -3/2}(\eta)$ заменен на многочлен второй степени $1-\eta^2$.

Подставив (19) в (18), учтём спектральное отношение, вытекающее из A13.3 [10]

$$\int_{-1}^1 (y-\eta)^2 \ln|y-\eta| \pi_{2k}(\eta) d\eta = 2\pi P_{2k}(y), \quad |y| \leq 1 \quad (20)$$

$$P_{2k}(y) = (2k-2)_3^{-1} \pi_{2k}(y) (1-y^2)^{3/2}, \quad k \geq 2$$

$$P_0(y) = -8^{-1} (2 \ln 2 - 1 + (4 \ln 2 - 6)y^2), \quad P_2(y) = -2^{-1} (\ln 2 - 1 - y^2),$$

затем умножим обе части на $\pi_{2n}(y)$ и проинтегрируем по y от -1 до 1 . В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\psi_n + \sum_{k=0}^{\infty} R_{n,k} \psi_k = \delta f_n^\delta + f_n^p, \quad n = \overline{0, \infty} \quad (21)$$

в которой элементы, стоящие вне главной диагонали и свободные члены экспоненциально убывают на бесконечности, откуда следует, что двойной ряд, составленный из недиагональных элементов, абсолютно сходится и, значит, она является нормальной в смысле Пуанкаре-Коха. Для нахождения осадки δ учтём структуру правой части (14) и представим $\psi(\eta)$ в виде

$$\psi(\eta) = \delta \psi_\delta(\eta) + \psi_p(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta \psi_k^\delta + \psi_k^p) \pi_{2k}(\eta), \quad (22)$$

где $\{\psi_k^\delta\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\psi_k^p\}_{k=0}^{\infty}$ – решения системы (21) с правыми частями $\{f_n^\delta\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n^p\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно. Подставляя (22) в (6) и учитывая свойство ортогональности многочленов Якоби, получим

$$\delta = -(P/2\pi + \psi_0^p) / \psi_0^\delta. \quad (23)$$

4. Численные расчеты. Полученные бесконечные системы решались с помощью метода редукции, возможность применения которого следует из квазирегулярности этих систем. Для получения удовлетворительной точности, порядок урезанных систем брался в диапазоне от 2 до 5 в зависимости от параметров c_*/a_* и a_*/b_* . На рисунке 3 построены графики зависимости величины $\bar{\delta} \cdot 10^{-3}$ (где $\bar{\delta} = \delta / (P \epsilon^2 D_1) = \delta_* E_* h_* / P_*$ – приведенная осадка включения) от приведенной длины включения c_*/a_* для $a_*/b_* = 0.5; 1; 2; 4$ (соответственно графики 1,2,3,4), $h_*/a_* = 0.01, \nu = 0.4$. Пунктиром изображен график, взятый из работы [3] для $a_*/b_* = 1$, где рассматривалась задача с двумя включениями расположенными симметрично на противоположных гранях оболочки.

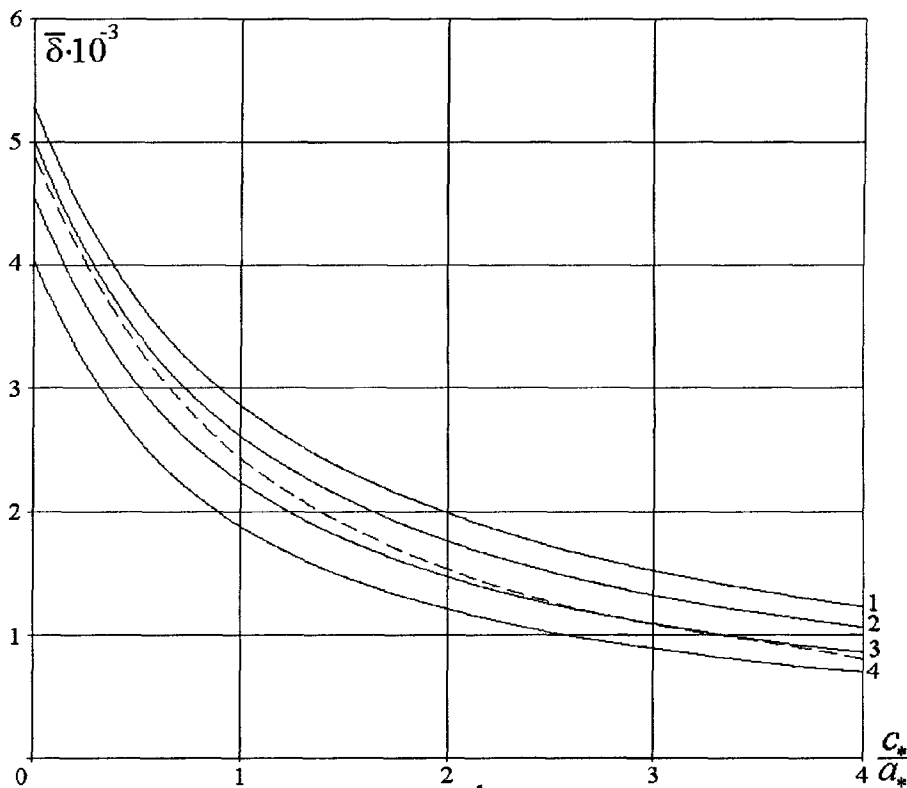


Рис.3. График приведенной осадки включения

В таблице 1 приведены значения, по которым были построены графики.

Таблица 1.

$\frac{b_*}{a_*}$	$\frac{c_*}{a_*}$								
	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
0.5	4.871	3.702	2.864	2.346	1.990	1.727	1.524	1.363	1.232
1	4.607	3.446	2.618	2.112	1.767	1.517	1.328	1.180	1.061
2	4.153	3.029	2.249	1.785	1.476	1.257	1.094	0.969	0.869
4	3.657	2.596	1.888	1.479	1.214	1.029	0.893	0.788	0.706

Заключение. Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- 1) при увеличении длины включения его осадка монотонно убывает;
- 2) при уменьшении длины включения его осадка стремится к значению прогиба под точкой приложения силы в задаче об обжатии оболочки сосредоточенными силами [1], а также совпадает с результатом работы [3];
- 3) сравнение с работой [3] показывает, что при наличии второго включения осадка включения уменьшается, т.е. второе включение усиливает конструкцию.

1. Гришин В. А. Расчёт пластинчатых оболочек: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Днепропетр. гос. ун-т. – Днепропетровск, 1990. – 15 с.
2. Гришин В. А., Попов Г. Я., Реут В. В. Расчёт коробчатых оболочек прямоугольного сечения // Прикл. математика и механика. – 1990. – Т. 54, вып. 4. – С. 605–612.
3. Гришин В. А., Реут В. В. Напряженное состояние коробчатой оболочки, подкрепленной парой симметричных включений, параллельных ребру оболочки // Прикл. математика и механика. – 1995. – Т. 59, вып. 5. – С. 849–852.
4. Мигдальский В. И., Реут В. В. О напряженном состоянии коробчатой оболочки, ослабленной трещиной // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 1998. – № 3. Фіз.-мат. науки. – С. 43–49.
5. Мигдальский В. И., Реут В. В. Задача о напряженном состоянии коробчатой оболочки, ослабленной трещиной, выходящей на ребро // Изв. АН. России. Сер. мех. твердого тела. – 1996. – № 2. – С. 145–151.
6. Мигдальский В. И., Реут В. В. Задача о произвольно ориентированной трещине в коробчатой оболочке // Прикл. мех. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 48–54.
7. Моссаковский В. И., Куликов Д. В. Метод однородных решений для коробчатых оболочек при динамическом нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 1. – С. 24–27.
8. Овчинников Н. Ю., Реут В. В. Напряженное состояние коробчатой оболочки, ослабленной трещиной, пересекающей ее ребро // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. – 1999. – Т. 4, вып. 4. Фіз.-мат. науки. – С. 160–164.
9. Папкович П. Ф. Теория упругости. – М.; Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
10. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле пгтампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
11. Попов Г. Я., Реут В. В. Расчёт коробчатых оболочек // Труды 14 Всес. конф. по пластинкам и оболочкам. – Тбилиси: Изд. Тбилисского ун-та, 1987. – С. 327–332.
12. Попов Г. Я., Реут В. В. Асимптотический подход к задачам о напряженном состоянии коробчатых упругих тел // Аннот. докл. VII Всес. съезда по теор. и прикл. механике. – М., 1991. – С. 291–292.
13. Расчеты на прочность в машиностроении / Под ред. С. Д. Пономарева. – Т. 2. – М.: Машгиз, 1958. – 975 с.
14. Реут В. В., Воробель В. М. Концентрация напряжений вблизи концов продольной трещины в коробчатой оболочке // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (випуск 2): В 3-х т. / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 2. – С. 316–319.
15. Савула Я. Г., Флейшман Н. П., Шинкаренко Г. А. Расчет пластинчатых конструкций методом конечных элементов // Тр. 10 Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Кутаиси, 1975. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – С. 660–666.
16. Смотров А. Ф. Жесткие коробки. – М.; Л.: ГНТИ, 1931. – 40 с.
17. Тихомиров В. В. К расчёту коробчатой оболочки прямоугольного профиля // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 48–55.
18. Флейшман Н. П., Розенталь Ю. Г., Марковська О. В., Аккерман І. А. Напруження місцевого згину в вантажопідійомниках автотранспорту та електротранспорту // Прикл. механіка. – 1964. – Т. 10, вип. 5. – С. 533–546.