

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

В. М. АДАМЯН, М. Я. СУШКО

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Методичні вказівки з курсу
“Методи математичної фізики”
для студентів фізичного факультету

Одеса
“Астропринт”
2007

Методичні вказівки зорієнтовано на студентів спеціальності 6.070100 – “фізика” денних відділень фізичних факультетів університетів, які приступають до вивчення курсу “Методи математичної фізики”. Вони створені на базі лекційного курсу та практичних занять, що на протязі багатьох років пропонувалися студентам фізичного факультету Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова. Курс розбито на шість модулів, вивчення кожного з яких завершується підсумковою контрольною роботою.

У вказівках наводяться: докладний перелік тем, охоплених окремими модулями; завдання для розв’язування на практичних заняттях і в ході самостійної роботи; контрольні питання; зразки контрольних робіт; список рекомендованої літератури.

Рецензент: О. В. Затовський, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри теоретичної фізики Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова

Друкується за рішенням Ученої ради фізичного факультету
Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова
Протокол № 5 від 30 січня 2006 року

Передмова

Згідно з установленим учбовим планом студенти спеціальності 6.070100 – “фізика” вивчають курс “Методи математичної фізики” в четвертому (весінньому) та п’ятому (осінньому) семестрах другого та третього років навчання. Він орієнтовно включає 36 год. лекцій та 18 год. практичних занять у весінньому семестрі (*модулі 1–3*) й відповідно 34 год. та 36 год. – в осінньому семестрі (*модулі 4–6*). Вивчення кожного модуля завершується підсумковою контрольною роботою.

Курс охоплює початковий мінімум засобів і прийомів математичної фізики. У першій половині розглядаються лінійна задача Коші для диференціальних рівнянь у частинних похідних у необмеженому просторі та поняття функції Гріна, за допомогою якої розв’язування задачі Коші зводиться до квадратур. Основна увага зосереджується на класичних і найбільш розроблених рівняннях теплопровідності й дифузії, хвильовому рівнянні. Паралельно наводяться необхідні елементи теорії узагальнених функцій і теорії інтегральних перетворень Фур’є. Друга половина починається викладом елементів варіаційного обчислення для функціоналів різних типів; потім розглядаються типові методи розв’язування крайових задач математичної фізики для однорідних систем та систем із розподіленими параметрами. Детально висвітлюються властивості власних значень і власних функцій відповідної крайової задачі Штурма–Ліувілля, прямі варіаційні методи.

У запропонованих вказівках наводяться: докладний перелік тем, розглядуваних у курсі; завдання для розв’язування на практичних заняттях і в ході самостійної роботи над курсом; контрольні питання та зразки контрольних робіт до кожного з модулів; список рекомендованої літератури, сформований на базі найбільш доступних джерел.

1. РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ

1.1. Весінний семестр

Модуль 1

Процес теплопровідності. Температура, тепловий потік, теплові джерела (стоки). Рівняння теплового балансу в інтегральній та диференціальній формах. Закон Фур'є. Рівняння теплопровідності. Лінійне неоднорідне та однорідне рівняння теплопровідності в необмеженому тривимірному просторі E_3 . Узагальнення на простори інших розмірностей.

Задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності в E_3 . Принцип максимального (мінімального) значення та єдиність розв'язку. Доведення єдиності формально-математичними методами.

Властивості симетрії лінійного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами в E_3 . Автомодельний розв'язок. Фундаментальний розв'язок та його формальні властивості. Розв'язання задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами в E_3 . Узагальнення на випадок задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності з просторово-залежними коефіцієнтами. Фізичний зміст функції Гріна рівняння теплопровідності.

Стаціонарна температура. Ньютонівський тепловий потенціал. Рівняння Пуассона. Гармонічні функції та їх поведінка в обмежених областях. Єдиність спадного розв'язку рівняння Пуассона в E_3 . Умови, за яких він збігається з ньютонівським потенціалом.

Вимушені теплові коливання. Формальний розв'язок задачі про теплові коливання під дією теплових джерел, що змінюються за гармонічним законом. Комплекснозначна амплітуда. Рівняння Гельмгольца. Функція Гріна рівняння Гельмгольца, її фізичний зміст. Сферична теплова хвиля.

Модуль 2

Процес дифузії. Концентрація, вектор густини потоку домішкових частинок, функція джерел. Закон збереження кількості частинок в інтегральній та диференціальній формах. Закон Фіка. Рівняння дифузії.

Імовірнісний опис руху домішкових частинок. Густина ймовірності знайти домішкову частинку в околі певної точки простору. Густина ймовірності переходу домішкової частинки з однієї точки простору в окіл іншої точки. Марковські процеси. Рівняння Чепмена–Колмогорова.

Броунівський рух. Вивід рівняння Ейнштейна–Смолуховського. Рівняння дифузії як наслідок останнього.

Фізичний зміст функції Гріна рівняння дифузії.

Поняття про узагальнені функції. Основні функції. Лінійність простору основних функцій. Поняття лінійного неперервного функціонала, заданого на просторі основних функцій. Регулярні та сингулярні функціонали. Сингулярні функціонали як границі послідовностей регулярних функціоналів.

Означення узагальненої функції (розподілу). Дельта-функція Дірака. Узагальнена функція як границя послідовності звичайних інтегровних функцій. Властивості таких послідовностей. Властивості складеної дельта-функції.

Диференціювання узагальнених функцій. Похідні дельта-функції, східчастої функції Хевісайда та знакової функції. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь. Приклади: фундаментальні розв'язки операторів Лапласа та Гельмгольца. Узагальнена задача Коші для лінійних диференціальних рівнянь. Побудова фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності (дифузії).

Метод відокремлення змінних. Плоскі хвилі. Принцип суперпозиції.

Інтегральне перетворення Фур'є. Рівномірна обмеженість та неперервність Фур'є-образів. Фур'є-образи характеристичної та східчастої функцій. Теорема Рімана–Лебега. Поняття абсолютно неперервної функції. Поведінка Фур'є-образів абсолютно неперервної функції та її похідних. Вивід формули обернення для перетворення Фур'є. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь за допомогою перетворення Фур'є.

Згортка інтегровних функцій. Інтегровність та комутативність згортки. Рівність Парсеваля–Планшереля. Перетворення Фур'є узагальнених функцій.

Перетворення Фур'є функцій багатьох змінних. Основні співвідношення для багатовимірних перетворень Фур'є.

Модуль 3

Рівняння руху ідеальної рідини. Рівняння неперервності. Рівняння стану. Лінеаризовані рівняння гідродинаміки. Потенціальні течії рідини в полі потенціальної об'ємної сили. Потенціал швидкості, його зв'язок із відхиленнями швидкості, масової густини та тиску від рівноважних значень при малих коливаннях рідини. Рівняння для потенціалу швидкості. Хвильове рівняння.

Задача Коші для хвильового рівняння у просторі E_3 . Єдиність розв'язку.

Побудова розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння у класі нескінченно диференційовних функцій, що швидко спадають разом зі своїми похідними, через Фур'є образи початкових функцій. Перехід до сферичних середніх від початкових функцій. Формула Пуассона. Принцип Гюйгенса.

Задача Коші для однорідного хвильового рівняння на необмеженій прямій. Формула Д'Аламбера, її фізичний зміст. Неоднорідна одновимірна задача. Двовимірні задачі Коші для хвильового рівняння.

Неоднорідне хвильове рівняння в E_3 . Побудова розв'язку неоднорідного хвильового рівняння у вигляді заганяючого потенціалу. Усталені коливання під дією джерел, що змінюються з часом за гармонічним законом. Амплітуда усталених коливань. Випадок точкового джерела. Розбіжні та збіжні сферичні хвилі. Умова випромінювання Зоммерфельда.

1.2. Осінній семестр

Модуль 4

Поняття функціонала. Основна задача варіаційного числення. Необхідна умова існування екстремуму функціонала найпростішого типу. Теорема Ейлера–Лагранжа. Інваріантність рівняння Ейлера–Лагранжа відносно перетворення координат.

Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера–Лагранжа. Приклади задач про відшукування екстремуму функціоналів найпростішого типу: задача про брахістохрону, задача Плато, задача про поширення світла в неоднорідному середовищі.

Крайові умови для рівняння Ейлера–Лагранжа. Задачі для кривих, кінці яких можуть вільно ковзати по вертикальних прямих. Модифікована задача про брахістохрону. Умови трансверсальності. Задача Больца.

Ізопериметричні задачі. Приклади: задача про ланцюгову лінію; задача про максимальну площу, обмежену гладкою кривою.

Достатня умова слабкого екстремуму для функціонала найпростішого типу. Посилені умови Лежандра та Якобі.

Узагальнення найпростішої варіаційної задачі на випадок, коли функціонал залежить від функції та її вищих похідних. Рівняння Ейлера–Пуассона. Крайові умови для рівняння Ейлера–Пуассона. Задачі про провисання стержня під власною вагою. Узагальнення найпростішої варіаційної задачі на випадок, коли функціонал залежить від кількох функцій. Просторові задачі та задачі про геодезичні.

Модуль 5

Необхідна умова існування екстремуму функціонала, який залежить від функції кількох змінних. Рівняння Ейлера–Остроградського. Крайові умови. Приклади: рівняння Лапласа для електростатичного поля; функція Лагранжа натягнутої струни та рівняння малих поперечних коливань струни; функція Лагранжа та рівняння малих поздовжніх коливань стержня; крайові умови для різних типів закріплення кінців стержня.

Закон збереження енергії в задачах про вільні коливання. Єдиність розв'язку крайової задачі для хвильового рівняння. Метод продовжень і формули Д'Аламбера для півпрямой. Відбиття хвиль від закріпленого та вільного кінців. Поширення крайового режиму. Розв'язок хвильового рівняння для відрізка та його зображення у вигляді ряду Фур'є. Стоячі хвилі.

Розв'язання крайової задачі про малі коливання обмеженої струни (стержня) методом відокремлення змінних. Власні коливання, власні частоти та власні функції однорідної струни із закріпленими кінцями. Енергія струни та її розподіл між власними коливаннями. Власні частоти та власні функції однорідної струни (однорідного стержня) для інших типів крайових умов.

Крайові задачі для одновимірних рівнянь теплопровідності та дифузії.

Розв'язання крайової задачі про коливання струни під дією зовнішньої сили. Вплив тертя на коливання струни. Редукція крайових задач. Неоднорідні крайові умови.

Модуль 6

Вимушені коливання струни під дією зовнішньої гармонічної сили. Амплітуда усталених коливань струни під дією гармонічної сили. Часова та частотна функції Гріна для струни із закріпленими кінцями, їх фізичний зміст. Побудова частотної функції Гріна як розв'язку певної крайової задачі: рівняння, крайові умови, умови зшивання. Узагальнення на випадок довільного закріплення кінців.

Одновимірні неоднорідні крайові задачі для рівнянь теплопровідності та дифузії. Частотна функція Гріна для теплових мод.

Крайова задача Штурма–Ліувілля (КЗШЛ). Дійсність та невід'ємність власних значень. Невиродженість власних значень. Ортогональність власних функцій, що відповідають різним власним значенням. Зведення КЗШЛ до варіаційної задачі. Екстремальний зміст найменшого власного значення. Відсутність вузлів у власної функції, що відповідає найменшому власному значенню. Відшукування другого та наступних власних значень. Зліченність множини власних значень. Ортонормована система власних функцій КЗШЛ. Нерівність Бесселя для ортогональних розкладів. Рівність Парсеваля як умова повноти системи власних функцій. Теорема Стеклова.

Варіаційні методи Релея та Релея–Рітца, оцінка власних значень КЗШЛ. Теорема Куранта про міні-максимальні властивості власних значень КЗШЛ. Рух власних частот при зміні параметрів коливальної системи.

Крайова задача для хвильового рівняння в обмежених областях тривимірного простору. Урахування симетрії задачі та перехід до криволінійних систем координат. Особливості формулювання крайових задач у криволінійних координатах. Приклади: сферично-симетричні власні функції та відповідні власні частоти коливань газу у сферичній порожнині з твердою оболонкою; власні радіальні коливання металевої кулі. Двовимірні задачі: коливання квадратної та круглої мембран.

Розв'язання крайових задач для рівнянь дифузії та теплопровідності в обмежених областях тривимірного простору. Критичний розмір реактора. Функція Гріна для тривимірних рівнянь теплопровідності та дифузії в обмежених областях. Асимптотичний розподіл власних значень для оператора Лапласа в обмежених областях.

2. РОБОЧИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

2.1. Весінний семестр

Модуль 1

1. Інтеграл Пуассона (Завдання 1.1, 1.2). Функція Гріна рівняння теплопровідності та її фізичний зміст (1.3–1.6).
2. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння теплопровідності (2.1–2.5).
3. Задача Коші для лінійних рівнянь теплопровідності та дифузії (3.1, 3.2). Вимушені теплові коливання (3.3–3.5).

Модуль 2

4. Дельта-функція Дірака (4.1). Перетворення Фур'є (4.2–4.5).
5. Рівність Парсеваля–Планшереля (5.1–5.3). Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь за допомогою перетворення Фур'є (5.4–5.5).
6. Тривимірне перетворення Фур'є (6.1). Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа (6.2). Функція Гріна та задача Коші для рівняння дифузії (6.3–6.5).

Модуль 3

7. Функція Гріна та задача Коші для лінійного хвильового рівняння (7.1–7.8).
8. Формули Д'Аламбера (8.1–8.3).
9. Двовимірне перетворення Фур'є (9.1). Двовимірні задачі для хвильового рівняння (9.2, 9.3).

2.2. Осінній семестр

Модуль 4

10. Поняття функціонала (10.1). Необхідна умова існування екстремуму функціонала найпростішого типу. Рівняння Ейлера–Лагранжа (10.2).
11. Випадки повної інтегровності рівняння Ейлера–Лагранжа (11.1–11.3).
12. Екстремальні принципи у фізиці (12.1–12.4).
13. Крайові умови: екстремалі, кінці яких можуть вільно ковзати по вертикалі (13.1, 13.2); умови трансверсальності (13.3–13.5). Задача Больца (13.6).
14. Ізопериметричні задачі (14.1–14.4). Функціонали, які залежать від функції та її вищих похідних (14.5–14.6).
15. Крайові умови для рівняння Ейлера–Пуассона (15.1, 15.2). Просторові задачі (15.3–15.5). Геодезичні (15.6).

Модуль 5

16. Рівняння Ейлера–Остроградського (16.1, 16.2). Рівняння малих коливань систем із розподіленими параметрами (16.3–16.6).
17. Метод відокремлення змінних. Крайова задача Штурма–Ліувілля (17.1).
18. Властивості власних значень і власних функцій КЗШЛ (18.1–18.5).
19. Вільні коливання одновимірних систем (19.1–19.3).
20. Одновимірні крайові задачі теплопровідності та дифузії (20.1–20.5).
21. Коливання одновимірних систем при наявності зовнішніх сил. (21.1, 21.2). Редукція крайових задач (21.3). Неоднорідні крайові умови (21.4).

РОБОЧИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Модуль 6

22. Вимушені коливання під дією гармонічної сили. Частотна функція Гріна (22.1–22.3).
23. Одновимірні неоднорідні крайові задачі для рівнянь теплопровідності та дифузії (23.1–23.3). Частотна функція Гріна для теплових мод (23.4).
24. Коливання багатовимірних систем (24.1–24.3). Сферично-симетричні розв'язки (24.4, 24.5).
25. Тривимірні крайові задачі для рівнянь теплопровідності та дифузії (25.1, 25.2).
26. Задачі зі спеціальними функціями (26.1–26.4).
27. Варіаційні методи Релея (27.1, 27.2) та Релея–Рітца (27.3–27.5).

3. ЗАВДАННЯ

Модуль 1

1.1 (А.1.3.6¹). Обчисліть інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

1.2. Обчисліть інтеграли ($\alpha, \beta > 0$):

а) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-x')^2} dx'$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+x')^2} dx'$;
в) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x')^2 - \beta x'^2} dx'$; г) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-x')^2 + \beta x'} dx'$.

1.3 (А.1.3.5). Покажіть, що функція Гріна однорідного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами справді його задовольняє.

1.4 (А.1.4.1). У момент часу $t = 0$ в нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}_0$ однорідного середовища², яке має нульову температуру, миттєво вводять Q_0 калорій тепла. Проаналізуйте подальші зміни температури середовища в довільній точці на відстані $r > 0$ від початку координат, максимальну температуру, яку можна в ній зафіксувати, та момент часу, коли вона досягається.

1.5. В однорідне середовище, яке має нульову температуру, в момент часу $t = 0$ вносять дві однакові кулі дуже малого радіуса. Кожна куля містить кількість тепла Q . Знайдіть температуру середовища посередині між кулями в довільний момент часу $t > 0$.

1.6. В однорідне середовище, яке має нульову температуру, в момент часу $t = 0$ вносять розжарене тіло. Знайдіть температуру, яку середовище матиме в заданій точці в довільний момент $t > 0$ та її максимальне значення в цій точці, якщо вноситься :

а) тонке кругове кільце радіусом R , одиниця довжини якого містить кількість тепла q , і досліджується температура в центрі кільця;

б) тонка сфера радіусом R , одиниця площі якої містить кількість тепла q , і досліджується температура в центрі сфери;

в) необмежена тонка пластина, одиниця площі якої містить кількість тепла q , і досліджується температура в точці $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Площина пластини збігається з площиною XOY ;

г) нескінченний тонкий циліндр радіусом R , одиниця площі якого містить кількість тепла q , і досліджується температура в початку координат. Вісь циліндра збігається з віссю OZ ;

д) нескінченна тонка нитка, одиниця довжини якої містить кількість тепла q , і досліджується температура в точці $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Нитка збігається з віссю OZ .

¹ Літера **A** передує номеру, під яким це завдання поміщено в посібнику [1].

² В усіх завданнях фізичні параметри середовища (коефіцієнти теплопровідності й дифузії, швидкість звуку, тощо) вважаються, якщо не обумовлено супротивне, відомими.

ЗАВДАННЯ

2.1. У момент часу $t = 0$ температура однорідної речовини дається виразом $T_0(\mathbf{r}) = T_0 e^{-\alpha y^2}$, $\alpha > 0$, $T_0 = \text{const}$. Знайдіть температуру в довільній точці речовини при $t > 0$.

2.2. Те саме для випадку $T_0(\mathbf{r}) = T_0 e^{-\beta x^2} e^{-\alpha z^2}$, $\alpha, \beta > 0$.

2.3 (A.1.4.2). Знайдіть розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності в необмеженому однорідному середовищі, початкова температура якого визначається функцією $T_0(\mathbf{r}) = T_0 e^{-\alpha |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}$, $\alpha > 0$.

2.4. Температура однорідного середовища в момент часу $t = 0$ описується виразом (A , $\alpha > 0$ – сталі):

$$\text{а) } T_0(\mathbf{r}) = A r e^{-\alpha r^2}; \quad \text{б) } T_0(\mathbf{r}) = A \frac{1 - e^{-\alpha r^2}}{r}; \quad \text{в) } T_0(\mathbf{r}) = A \frac{1 - \cos \alpha r}{r^2}.$$

Знайдіть температуру середовища в точці $\mathbf{r} = 0$ при $t > 0$.

2.5. У момент часу $t = 0$ півпростір $x < 0$ має нульову температуру, а півпростір $x > 0$ – температуру T_0 . Знайдіть температуру в довільній точці простору при $t > 0$. Проаналізуйте граничні випадки $t \downarrow +0$ і $t \rightarrow \infty$. Півпростори однорідні, їх теплові параметри однакові.

3.1. Температура однорідного середовища в момент часу $t = 0$ описується виразом (A , $\alpha > 0$ – сталі):

$$\text{а) } T_0(\mathbf{r}) = A \frac{e^{-\alpha r^2}}{r}; \quad \text{б) } T_0(\mathbf{r}) = A \frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

Знайдіть температуру середовища в довільній точці $\mathbf{r}$ при $t > 0$. Окремо розгляньте випадок $\mathbf{r} = 0$.

3.2. У момент часу $t = 0$ крапля домішки в необмеженій рідині має радіус R та концентрацію n_0 . Знайдіть концентрацію домішки в довільній точці рідини при $t > 0$.

3.3 (A.1.5.1). Нехай густина потужності теплових джерел

$$F(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} Q_0, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Знайдіть температуру, яка встановлюється в необмеженому однорідному середовищі при $t \rightarrow \infty$.

3.4. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань температури в необмеженому однорідному середовищі, викликаних дією точкового гармонічного джерела, що має частоту ω , нульову початкову фазу та загальну потужність q .

3.5 (A.1.7.3). Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань температури в необмеженому однорідному середовищі внаслідок дії гармонічних теплових джерел, густина потужності $F(\mathbf{r}, t) = F_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r}))$ яких має такі параметри:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2}, \quad F_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} q_0, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Модуль 2

4.1 (див. А.4.4.7). Обчисліть інтеграли ($\delta(x)$ – дельта-функція Дірака):

а) $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(5x)$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x^2 - 9)$; в) $\int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x^2 - 9)$;

г) $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x^2 - 2ax + 1)$ при $a < 1$ та $a > 1$; д) $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(\sin x)$.

4.2 (А.4.4.1, 4.4.7, 4.6.1). Знайдіть Фур'є-образи таких функцій:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \quad a > 0, \\ 0, & |x| > a; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty); \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \quad a > 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-ax}, & x > 0, \quad a > 0; \end{cases}$

е) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; є) $f(y) = Ae^{-\alpha y^2}, \alpha > 0$;

ж) дельта-функція Дірака $\delta(x)$; з) $\delta'(x-3)$; и) $\delta(x^4 - a^4), a > 0$.

Відокремивши дійсну та уявну частини Фур'є-образу $\hat{f}(k)$ в д), покажіть, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos kx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin kx dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}.$$

4.3 (А.4.4.8). Доведіть: $\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} p$.

4.4 (див. А.4.4.9). Доведіть, що при $k > 0$ $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} e^{ipx} dx = \theta(k - |p|)$, де

$\theta(x)$ – східчаста функція Хевісайда. (Розривний множник Діріхле.)

4.5 (А.4.4.6). Знайдіть Фур'є-образ функції $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2T}, & |x| < 2T, \quad T > 0, \\ 0, & |x| > 2T, \end{cases}$

та перевірте, що

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 Tx}{Tx^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|k|}{2T}\right) e^{ikx} dk.$$

5.1 (див. А.4.5.3). Доведіть:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \pi|a|$; б) $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \min\{a, b\}, a, b > 0$.

5.2 (А.4.5.4). Запишіть рівність Парсеваля для функції $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$

та її Фур'є-образу і покажіть, що $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^4} d\xi = \frac{2\pi}{3}$.

5.3 (A.4.5.5). Обчисліть інтеграли:

$$I_1(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k^2 + b^2} \frac{dk}{k} = \frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab}), \quad I_2(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2 + b^2} dk = \frac{\pi}{b} e^{-ab} \quad (a, b > 0).$$

5.4 (A.4.5.6). Знайдіть розв'язок рівняння $-y'' + \gamma^2 y = Ce^{-b|x|}$, $\gamma, b > 0$, у класі двічі неперервно диференційовних функцій, що спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$.

5.5 (A.4.5.7). Вважаючи, що права частина рівняння $-y'' + \gamma^2 y = f(x)$ є довільною інтегрованою функцією, знайдіть його розв'язок у класі неперервних функцій, що мають абсолютно неперервні перші похідні та спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$. Подайте цей розв'язок у вигляді згортки функції $f(x)$ з деякою функцією $G_{-\gamma^2}(x)$, тобто за допомогою функції Гріна цього рівняння.

6.1 (A.4.7.2). Знайдіть тривимірні Фур'є-образи таких функцій:

$$\text{а) } f(r) = \frac{e^{-ar}}{r}, \quad a > 0; \quad \text{б) } f(r) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R; \end{cases} \quad \text{в) } f(r) = e^{-\alpha r^2}, \quad \alpha > 0.$$

6.2. Скориставшись перетворенням Фур'є, покажіть, що фундаментальний розв'язок оператора Лапласа в E_3 має вигляд $G(r) = -1/4\pi r$ та (див. A.1.6.4) переконайтеся, що цей вираз є гармонічною функцією скрізь у E_3 , за винятком початку координат. Чому дорівнює потенціал електростатичного поля електричного заряду, неперервно диференційовна густина $\rho(\mathbf{r})$ якого:

а) є фінітною функцією; б) спадає на нескінченності швидше за $1/r^2$?

6.3 (див. A.4.1.5). Знайдіть функцію Гріна рівняння дифузії, розв'язавши відповідну задачу Коші для однорідного рівняння дифузії за допомогою перетворення Фур'є.

6.4. У момент часу $t = 0$ концентрація домішки в однорідному середовищі дається виразом $n_0(\mathbf{r}) = n_0 e^{-\alpha y^2}$, $\alpha > 0$. Знайдіть концентрацію домішки в довільній точці середовища при $t > 0$, розв'язавши відповідну задачу Коші за допомогою перетворення Фур'є.

6.5. Те саме для випадку $n_0(\mathbf{r}) = Ae^{-\alpha r}/r$, A – стала.

Модуль 3

7.1. Функція Гріна хвильового рівняння при $t > 0$ в E_n ($\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) означається як розв'язок $G(\mathbf{r}, t) = G(r, t)$ задачі Коші для однорідного хвильового рівняння, який задовольняє узагальнені початкові умови $G(r, 0) = 0$, $G_t(r, 0) = \delta(\mathbf{r})$, де $\delta(\mathbf{r})$ – дельта-функція в E_n . Переконайтеся, що в термінах цієї функції Гріна:

а) розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння при початкових умовах $\psi(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r})$, $\psi_t(\mathbf{r}, 0) = v_0(\mathbf{r})$ має при $t > 0$ вигляд

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_n} d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) u_0(\mathbf{r}') + \int_{E_n} d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) v_0(\mathbf{r}');$$

б) розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння з функцією джерел $f(\mathbf{r}, t)$, який задовольняє нульові початкові умови $\psi(\mathbf{r}, 0) = 0$, $\psi_t(\mathbf{r}, 0) = 0$, має при $t > 0$ вигляд

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' \int_{E_n} d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t') f(\mathbf{r}', t').$$

7.2. Скориставшись перетворенням Фур'є, покажіть, що

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\sin akt}{ak}.$$

7.3. Покажіть, що в E_3

$$G(r, t) = \frac{1}{4\pi ar} \delta(at - r) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta(at - r), \quad t > 0,$$

і що розв'язки задач Коші для однорідного та неоднорідного хвильових рівнянь (див. *Завдання 7.1*) набирають вигляду відповідно формули Пуассона та загальної потенціалу.

7.4. Побудуйте розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в E_3 для випадку, коли початкові функції $u_0(\mathbf{r})$, $v_0(\mathbf{r})$ – гармонічні, та діють стаціонарні джерела, функція $f(\mathbf{r})$ яких – теж гармонічна. Задачу розв'яжіть двома способами: а) скориставшись теоремою єдиності; б) застосувавши формулу Пуассона та формулу для загальної потенціалу.

7.5. Те саме для випадку, коли функція джерел $f(\mathbf{r}, t) = g(t)f(\mathbf{r})$, де $g(t)$ – гладка функція, $f(\mathbf{r})$ – гармонічна.

7.6. У момент часу $t = 0$ в однорідній рідині, що знаходиться в стані спокою, виникає надлишковий тиск $\Delta P(\mathbf{r})$. Знайдіть проміжок часу, протягом якого тиск у точці $\mathbf{r} = 0$ відрізняється від рівноважного, а також значення надлишкового тиску в цій точці при $t > 0$ як функцію часу, якщо ($p_0 = \text{const}$):

$$\text{а) } \Delta P(\mathbf{r}) = \begin{cases} p_0, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R; \end{cases} \quad \text{б) } \Delta P(\mathbf{r}) = \begin{cases} p_0 \left(\frac{r}{r_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{r}{r_2} \right), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & 0 \leq r < r_1, \quad r > r_2; \end{cases}$$

$$в) \Delta P(\mathbf{r}) = \begin{cases} p_0 x^2 y^2 \sin \frac{\pi r}{R}, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

7.7 (А.3.5.2). Знайдіть потенціал швидкості для вимушених акустичних коливань однорідного середовища, викликаних джерелами, локалізованими в нескінченно малому околі початку координат.

7.8 (див. А.3.5.2). Однорідна рідина знаходиться в стані спокою. Починаючи з моменту часу $t=0$, у сферичній області з радіусом R і центром у початку координат генерується надлишковий тиск $\Delta P = p_0 \sin \omega t$. Знайдіть надлишкові тиск та густину при $t > 0$ в довільній точці рідини та покажіть, що на далеких відстанях від області збурення формується розбіжна сферична акустична хвиля, яка задовольняє умову випромінювання Зоммерфельда.

8.1. Покажіть, що функція Гріна хвильового рівняння на прямій $-\infty < x < \infty$

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), \quad t > 0,$$

та виведіть за її допомогою розв'язки задач Коші для однорідного та неоднорідного хвильових рівнянь (формули Д'Аламбера).

8.2 (А.3.4.3). Виведіть загальний розв'язок одновимірного однорідного хвильового рівняння у вигляді суперпозиції біжучих хвиль та формулу Д'Аламбера, не посилаючись на багатовимірні задачі Коші та поняття функції Гріна.

8.3. Знайдіть форму профілю $u(x, t)$ необмеженої однорідної струни в довільний момент часу t та зобразіть його графічно для моментів часу $t_k = lk/a$, $k = 0, 1, 2, 3$ (a – швидкість поширення поперечних збуджень уздовж струни), якщо в початковий момент $t = 0$ струна:

а) була деформована за законом $u(x, 0) = Ae^{-x^2/l^2}$ та мала нульову швидкість;

б) була недеформована, і лише всім точкам ділянки $0 \leq x \leq l$ надали однакової поперечної швидкості v_0 ;

в) знаходилася в рівновазі, але на всі точки ділянки $0 \leq x \leq l$ почала діяти поперечна сила зі сталою погонною густиною f_0 ;

г) знаходилася в рівновазі, і на точку $x = l$ почала діяти зосереджена поперечна гармонічна сила $F_0 \cos \omega t$.

9.1. Доведіть: $\frac{1}{2\pi} \int_{E_2} d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}} \frac{\theta(at - \rho)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} = \frac{\sin akt}{k}$, де $\mathbf{p} = (x, y)$.

9.2. Покажіть, що функція Гріна хвильового рівняння в E_2

$$G(\rho, t) = \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} \theta(at - \rho), \quad t > 0.$$

Побудуйте за її допомогою розв'язки двовимірних задач Коші для однорідного та неоднорідного хвильових рівнянь.

9.3 (А.3.4.1). Нехай початкові функції двовимірної задачі Коші для однорідного хвильового рівняння мають вигляд ($v_0(x, y) \geq 0$)

ЗАВДАННЯ

$$\psi(\rho, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi(\rho, 0)}{\partial t} = \begin{cases} v_0(x, y), & \rho < R, \\ 0, & \rho > R. \end{cases}$$

Знайдіть головний член асимптотичного розкладу розв'язку цієї задачі при $t \rightarrow \infty$ в довільній точці простору.

Модуль 4

10.1 (Б.1.1.1)³. Знайдіть явний вигляд та область визначення таких функціоналів:

- а) довжина гладкої кривої $y = y(x)$;
- б) площа поверхні, утвореної обертанням кривої $y = y(x)$ навколо осі OX ;
- в) об'єм тіла, обмеженого поверхнею обертання кривої $y = y(x)$ навколо осі OX та площинами $x = x_1$, $x = x_2$;
- г) координати центра мас однорідної нитки, форма якої описується рівнянням $y = y(x)$.

10.2 (Б.1.3.1). Які з гладких кривих, що проходять через задані початкову й кінцеву точки, можуть бути екстремалами таких функціоналів:

- а) $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx y, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2;$
- б) $J[y] = \int_0^2 dx x y y', \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1;$
- в) $J[y] = \int_0^\pi dx (y^2 + y'^2 - 2y \sin x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1;$
- г) $J[y] = \int_0^3 dx \left[\frac{1}{(1+x)} y^2 + 4(1+x) y'^2 \right], \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 3/2;$
- д) $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2;$
- е) $J[y] = \int_0^1 dx x^{2/3} y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \text{ (приклад Гільберта);}$
- є) $J[y] = \int_0^{3/2} dx (2y + y'^3), \quad y(0) = 0, \quad y(3/2) = 1;$
- ж) $J[y] = \int_0^1 dx x^2 y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \text{ (приклад Вейерштрасса)?}$

³ Літера Б передує номеру, під яким це завдання поміщено в посібнику [2].

ЗАВДАННЯ

11.1 (Б.1.5.1). Для наведених функціоналів знайдіть можливі екстремалі, які проходять через задані точки:

а) $J[y] = \int_0^1 dx \cos y', \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \pi;$

б) $J[y] = \int_0^{\pi/4} dx (y^2 - y'^2), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1;$

в) $J[y] = \int_0^2 dx (y^2 x^2 + y^4), \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 2;$

г) $J[y] = \int_1^2 dx x^2 y'^2, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1;$

д) $J[y] = \int_0^1 dx e^y y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4;$

е) $J[y] = \int_0^3 dx (y'^3 - y'^2), \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 1;$

є) $J[y] = \int_1^2 dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1;$

ж) $J[y] = \int_0^7 dx (y'^2 - yy'^2), \quad y(0) = 2, \quad y(7) = 5;$

з) $J[y] = \int_0^1 dx (y^2 - y'^2) e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e;$

и) $J[y] = \int_0^4 dx y^2 y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y(4) = 3;$

і) $J[y] = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 \quad (y > 0).$

11.2 (Б.1.5.3). Знайдіть траєкторію, по якій повинен рухатися літак над поверхнею земної кулі, щоб при сталій швидкості, незмінній висоті польоту та відсутності повітряних потоків долетіти з початкової точки в кінцеву за найкоротший час. Обертанням земної кулі знехтуйте.

11.3. (Б.1.5.4). Серед усіх кривих, що з'єднують задані точки A й B у вертикальній площині (точки не лежать на одній вертикалі), віднайдіть ту, рухаючись уздовж якої під впливом сили тяжіння матеріальна точка пройде шлях від A до B за найкоротший час. Початкова швидкість точки дорівнює нулю, тертя та опір середовища нехтовно малі. (Задача про брахістохрону І. Бернуллі.)

ЗАВДАННЯ

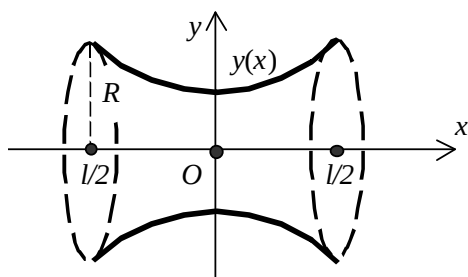


Рис. 12.1

12.1 (Б.1.6.1). Між двома дротяними кільцями радіусом R натягнули мильну плівку. Відрізок, що з'єднує центри кілець, є перпендикулярним до площин кілець і має довжину l (рис. 12.1). Вважаючи товщину плівки сталою та малою, знайдіть рівняння поверхні, утвореної плівкою. (Задача Плато про мінімальну поверхню обертання.)

12.2 (Б.1.6.2). У прозорому середовищі зі змінним показником заломлення $n(x, y)$ світло поширюється з точки $A(0, 0)$ у точку $B(l, h)$. Знайдіть траєкторію променя світла, якщо $n(x, y) = n_0(1 + \alpha y)$. Розгляньте граничні випадки слабо неоднорідного ($\alpha \ll 1$) та однорідного ($\alpha = 0$) середовищ.

12.3 (Б.1.6.4). Унаслідок неоднорідного розподілу густини повітря вздовж вертикалі промінь світла при поширенні в атмосфері може зазнавати повного внутрішнього відбиття. Це спричиняє появу в атмосфері одного чи декількох уявних зображень далеких предметів, які знаходяться поза межами прямої видимості (марева). Оцініть залежність відстані l між спостерігачем і спостережуваними предметами від градієнта $dn/dy = n_0\alpha = \text{const}$ показника заломлення середовища (див. Завдання 12.2.).

12.4 (Б.1.6.8). Доведіть, що з пункту A в пункт B , розташованих на одній горизонталі, при одній і тій самій витраті пального в деяких випадках можна доїхати швидше, якщо рухатися по дорозі зі схилами, ніж уздовж прямої AB (рис. 12.4).

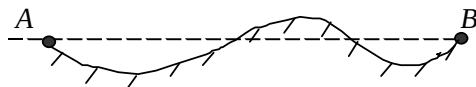


Рис. 12.4

13.1 (Б.2.1.1). У класі $C^1([x_1, x_2])$ кривих, кінці яких можуть вільно ковзати по вертикалях, знайдіть можливі екстремалі, що задовольняють задані крайові умови:

а) $J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 1;$

б) $J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 - y + 1), \quad y(0) = 0;$

в) $J[y] = \int_0^{\pi/4} dx (y'^2 - y^2), \quad y(0) = 1;$

г) $J[y] = \int_0^2 dx (y'^2 - y'x), \quad y(0) = 0;$

д) $J[y] = \int_1^e dx (xy'^2 + 2y), \quad y(1) = 0;$

е) $J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 - 2yy' + 2y^2), \quad y(1) = 1;$

$$\epsilon) J[y] = \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx (y'^2 - y'^2 + 4y \sin x), \quad y(\pi/2) = 0;$$

$$\text{ж) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 + y^2 + 4y \operatorname{sh} x), \quad y(0) = 0;$$

$$\text{з) } J[y] = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}, \quad y(0) = 1.$$

13.2 (Б.2.1.2). По якій кривій, розташованій у вертикальній площині $ХОУ$ (вісь $ОХ$ напрямлена горизонтально, вісь $ОУ$ – вертикально вниз), повинна рухатися матеріальна точка під дією сили тяжіння, щоб, відправившись із початку координат без початкової швидкості, перетнути вертикальну пряму $x=l$ за найкоротший час? (Модифікована задача про брахістохрону І. Бернуллі.)

13.3 (Б.2.2.1). Знайдіть найкоротшу відстань від точки $A(0,0)$ до кривої $y = \psi(x)$.

13.4 (Б.2.2.2). За який мінімальний час та в якій точці промінь світла, випущений із початку координат, досягне параболи $y = \frac{5}{4} + (x-2)^2$?

13.5 (Б.2.2.3). Нехай у функціоналі $J[y] = \int_{\Gamma} dx F(x, y, y')$, заданому на множині гладких кривих Γ , кінці яких можуть вільно ковзати по відомих гладких лініях $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$, ядро $F(x, y, y') = f(x, y) \sqrt{1+y'^2}$. Покажіть, що якщо значення функції f на лівому кінці не дорівнює нулю, то умова трансверсальності на ньому вироджується в умову ортогональності екстремалі $y = y(x)$ та лінії $y = \varphi(x)$: $y'(x_1) \varphi'(x_1) = -1$.

13.6 (Б.2.3.2). Розв'яжіть такі задачі Больца:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2 + 4y^2(0) - 5y^2(1); \quad \text{б) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 + y^2) - 2 \operatorname{sh} 1 y(1);$$

$$\text{в) } J[y] = \int_0^{\pi} dx (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi);$$

$$\text{г) } J[y] = \int_0^{e-1} dx (x+1) y'^2 + 2y(0)[y(e-1)+1];$$

$$\text{д) } J[y] = \int_1^2 dx x^2 y'^2 - 2y(1) + y^2(2);$$

$$\text{е) } J[y] = \int_0^1 dx x y'^2 + 2y^2(1), \quad y(0) = 0.$$

14.1 (Б.3.1.1). Знайдіть гладкі екстремалі функціоналів $J[y]$, що проходять через задані початкову та кінцеву точки, і для яких функціонали $L[y]$ набувають заданих значень:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 1;$$

$$\text{б) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 1;$$

$$\text{в) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 0;$$

$$\text{г) } J[y] = \int_0^\pi dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad L[y] = \int_0^\pi dx y \sin x = 1;$$

$$\text{д) } J[y] = \int_0^1 dx (y' + x)^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1/2, \quad L[y] = \int_0^1 dx x y = 1.$$

14.2 (Б.3.1.2). Знайдіть рівноважний профіль важкої однорідної гнучкої нерозтяжної нитки довжиною l , яка провисає під дією сили тяжіння. Кінці нитки закріплено на одному рівні. (Задача про ланцюгову лінію.)

14.3 (Б.3.1.3). Серед усіх кривих довжиною l , що з'єднують фіксовані точки A та B ($l \geq AB$), знайдіть ту, яка разом із відрізком AB обмежує плоску замкнену область із найбільшою площею.

14.4 (Б.3.1.5). Покажіть, що гладка екстремаль функціонала

$$I[X] = \frac{1}{2} \int_0^l [p(x) X'^2(x) + q(x) X^2(x)] dx + \frac{k_1}{2} X^2(0) + \frac{k_2}{2} X^2(l)$$

за умови, що інший функціонал

$$K[X] = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) X^2(x) dx$$

набуває сталого значення, є розв'язком крайової задачі Штурма–Ліувілля, що складається з однорідного диференціального рівняння

$$-\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) + q(x)X(x) = \lambda \rho(x)X, \quad 0 < x < l,$$

та однорідних крайових умов

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0,$$

де λ – стала, $h_1 \equiv k_1/p(0)$, $h_2 \equiv k_2/p(l)$.

14.5 (Б.2.4.2). Серед кривих класу $C^2([x_1, x_2])$ відшукайте ті, які задовольняють усі необхідні умови існування екстремуму таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y''^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y(1) = y'(1) = 1;$$

$$\text{б) } J[y] = \int_0^{\pi/2} dx (y''^2 - y^2 + x^2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = -1;$$

$$\text{в) } J[y] = \int_0^1 dx e^{-x} y''^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e;$$

$$\text{г) } J[y] = \int_1^e dx xy''^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y(e) = e, \quad y'(e) = 2;$$

$$\text{д) } J[y] = \int_0^1 dx (y'' - y)^2, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \text{sh} 1, \quad y'(1) = \text{sh} 1 + \text{ch} 1.$$

14.6 (Б.2.4.5). Тонкий однорідний стержень довжиною L замуровано в точках A та B , що лежать на одній горизонталі (рис. 14.6). Знайдіть форму профілю стержня внаслідок провисання під власною вагою. Погонна густина стержня ρ .

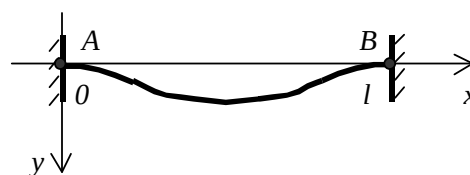


Рис. 14.6

15.1 (Б.2.4.1). Знайдіть необхідні умови існування екстремуму функціонала

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y', y'') \quad \text{у класі } C^2([x_1, x_2]) \text{ кривих, праві кінці яких жорстко}$$

закріплено під фіксованим кутом до осі OX , а ліві:

а) можуть вільно ковзати по вертикальній прямій $x = x_1$, утворюючи з нею однаковий фіксований кут (маючи в точці x_1 заданий кут нахилу дотичної);

б) закріплено в точці x_1 шарнірно (тобто в точці x_1 вони можуть утворювати довільні кути з віссю OX);

в) можуть вільно ковзати по вертикальній прямій $x = x_1$, утворюючи з нею довільні кути (маючи в точці x_1 дотичні довільних напрямів).

15.2 (Б.2.4.6). Знайдіть форму профілю стержня внаслідок провисання під власною вагою, якщо:

а) обидва кінці стержня закріплено шарнірно в точках $x = 0$ та $x = L$ горизонтальної осі;

б) обидва кінці стержня спираються на тверді вертикальні стінки в цих точках;

в) кінець $x = 0$ спирається на стінку, а кінець $x = L$ замуровано в стінку;

г) кінець $x = 0$ замуровано в стінку, а кінець $x = L$ вільний.

15.3 (Б.2.5.1, 2.5.4). Нехай швидкість світла в неоднорідному середовищі є відомою функцією просторових координат: $u = u(x, y, z)$. Сформулюйте задачу про знаходження шляху, по якому промінь світла поширюється з точки $A(x_1, y_1, z_1)$ у точку $B(x_2, y_2, z_2)$. Випишіть рівняння Ейлера-Лагранжа для здобутого функціонала та знайдіть їх загальний розв'язок для однорідного середовища.

15.4 (Б.2.5.3). Знайдіть гладкі криві, які проходять через задані початкову й кінцеву точки та можуть реалізовувати екстремум таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y, z] = \int_0^1 dx (y'^2 + z'^2 + 2y - zx^2), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1;$$

$$\text{б) } J[y, z] = \int_0^1 dx (y'z' + 6yx + 12zx^2), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1;$$

$$\text{в) } J[y, z] = \int_0^{\pi/2} dx (y'^2 + z'^2 + 2yz), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1, \quad z(\pi/2) = -1;$$

$$\text{г) } J[y, z] = \int_0^1 dx (y'^2 + z'^2 - 2yz), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = \text{sh}1, \quad z(1) = -\text{sh}1;$$

$$\text{д) } J[y, z] = \int_0^1 dx (y^2 + z^2 + 2y'z'), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = \text{sh}1.$$

15.5 (Б.2.5.7). Установіть вид крайових умов для екстремалей функціонала

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x; y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \quad \text{у класі гладких просторових}$$

кривих, ліві кінці яких жорстко закріплено, а праві можуть вільно ковзати по площині $x = x_2$. Користуючись отриманим результатом, серед кривих згаданого класу знайдіть можливі екстремалі таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y, z] = \int_0^2 dx (y'^2 + z'^2 + y'z'), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(2) = 2;$$

$$\text{б) } J[y, z] = \int_0^{\pi} dx (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2), \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 2, \quad y(\pi) = 0;$$

$$\text{в) } J[y, z] = \int_0^1 dx \left(\frac{y'^2 + z'^2}{2} + yz \right), \quad y(0) = z(0) = 1;$$

$$\text{г) } J[y, z] = \int_0^1 dx \left(\frac{y'^2 + z'^2}{2} - yz \right), \quad y(0) = z(0) = 1;$$

$$\text{д) } J[y, z] = \int_0^1 dx \left(\frac{y'^2 + z'^2}{2} - yz \right), \quad y(1) = z(1) = 1.$$

15.6 (Б.2.6.1, Б.2.6.3). Знайдіть геодезичні лінії поверхні:

а) кругового циліндра радіусом R ;

б) кругового конуса $x = az \cos \varphi$, $y = az \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq H$.

Модуль 5

16.1 (Б.4.1.1). Випишіть рівняння Ейлера–Остроградського для задачі про мінімальну площу поверхні, натягнутої на гладкий контур Γ .

16.2 (Б.4.1.3). Покажіть, що потенціал електростатичного поля у вакуумі задовольняє рівняння Лапласа $\Delta\varphi(\mathbf{r}) = 0$.

16.3 (Б.4.2.2). Виведіть рівняння малих поперечних коливань мембрани із закріпленим краєм при наявності поперечних потенціальних зовнішніх сил.

16.4 (Б.4.2.3). Виведіть рівняння малих поздовжніх коливань пружного стержня⁴ та крайові умови на його кінцях, якщо вони:

а) закріплені пружно, тобто на кожний кінець діє з боку кріплення поздовжня сила, пропорційна зміщенню та напрямлена протилежно до нього;

б) закріплені жорстко;

в) вільні, тобто не закріплені.

16.5 (Б.4.2.4). Виведіть рівняння та крайові умови, які описують малі згинальні коливання пружного стержня із закріпленим лівим кінцем, якщо його правий кінець:

а) закріплено жорстко; б) закріплено шарнірно; в) вільний.

Розгляньте частковий випадок однорідного стержня.

16.6 (Б.4.2.5). Виведіть рівняння, яке описує малі згинальні коливання пружного стержня при наявності зовнішньої сили $f(x, t)$, перпендикулярної до його рівноважного профілю і розрахованої на одиницю довжини.

17.1. Знайдіть власні значення і власні функції крайової задачі Штурма–Ліувілля для малих поздовжніх коливань однорідного стержня, якщо:

а) кінці стержня жорстко закріплено;

б) кінці стержня вільні;

в) лівий кінець жорстко закріплено, а правий – вільний;

г) лівий кінець вільний, а правий – жорстко закріплено;

д) лівий кінець закріплено жорстко, а правий – пружно за допомогою пружинки з жорсткістю k_2 ;

е) лівий кінець закріплено пружно за допомогою пружинки з жорсткістю k_1 , а правий – жорстко;

є) кінці стержня закріплено пружно за допомогою пружинок із жорсткістю k_1 (зліва) і k_2 (справа).

В останньому прикладі розгляньте граничні випадки, що ведуть до видів закріплення а) – е).

18.1. Безпосереднім інтегруванням покажіть ортогональність власних функцій, знайдених у Завданні 17.1.

18.2. Вимагаючи, щоб власні функції, знайдені в Завданні 17.1, були нормовані на одиницю, випишіть їх нормувальні множники.

18.3. Знайдіть власні значення і нормовані власні функції КЗШЛ, що складається з рівняння

⁴ У завданнях про коливання обмежених струн і стержнів їх недеформована довжина l .

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + q(x)X = \lambda\rho(x)X, \quad 0 < x < l,$$

зі сталими ρ , p та $q \neq 0$ і крайових умов а) – є) Завдання 17.1.

18.4. Знайдіть власні значення та нормовані власні функції таких КЗШЛ:

а) $x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < 2, \quad y(1) = y(2) = 0;$

б) $x^2 y'' + 2xy' + \lambda x^2 y = 0, \quad 1 < x < 2, \quad y'(1) = y(2) = 0.$

18.5. Для наведених функцій $f(x)$ побудуйте їх ряди Фур'є за власними функціями КЗШЛ, що складається з рівняння $X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l$, та заданих крайових умов:

а) $f(x) = x, \quad X_n(0) = X_n(l) = 0;$

б) $f(x) = x, \quad X_n(0) = X'_n(l) = 0;$

в) $f(x) = \delta(x - x_0)$ – дельта-функція Дірака, $0 < x_0 < l$,

$$X'(0) - h_1 X(0) = X'(l) + h_2 X(l) = 0.$$

19.1. Знайдіть зміщення $u(x, t)$ точок однорідної струни $0 \leq x \leq l$ із закріпленими кінцями в довільний момент часу $t > 0$, якщо початкові умови мають вигляд $u(x, 0) = A\left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l}\right)$, $u_t(x, 0) = B \sin \frac{2\pi x}{l}$, A, B – сталі.

Поясніть отриманий результат.

19.2. Плоским жорстким молоточком шириною 2δ б'ють у точці $x = c$ струни з жорстко закріпленими кінцями, передаючи їй при цьому імпульс P . Опишіть рух точок струни після удару та знайдіть енергію окремих гармонік.

19.3. Пружний стержень із закріпленим лівим та вільним правим кінцями стиснено вздовж осі силою F , прикладеною до правого кінця. Опишіть коливання стержня, які виникають після того, як дія сили припиняється в момент $t = 0$.

20.1. Пластину товщиною l , яка має температуру t^0 C, опускають у потік рідини, температура якої 0^0 C. Знайдіть розподіл температури в пластині в довільний момент часу. Оцініть проміжок часу, за який середня температура пластини впаде до значення $\approx (0,1 t)^0$ C.

20.2. Розчинена речовина, початкова концентрація якої c_0 , дифундує з розчину, який міститься між площинами $x = 0$ і $x = h$, у розчинник, обмежений площинами $x = h$ і $x = l$. Сформулюйте та розв'яжіть крайову задачу для процесу вирівнювання концентрації, вважаючи, що границі $x = 0$ та $x = l$ непроникні для речовини.

20.3. Бічна поверхня та кінці тонкого однорідного стержня⁵ теплоізолювані. Знайдіть розподіл температури в стержні в довільний момент часу, а також температуру, яка усталюється в ньому після закінчення релаксаційних процесів (при $t \rightarrow \infty$), якщо його початкова температура дорівнює сталому значенню T_0 .

⁵ У завданнях про теплопровідність усередині тонких стержнів останні збігаються з відрізком $0 \leq x \leq l$.

ЗАВДАННЯ

20.4. У закритій горизонтальній хімічній пробірці довжиною l знаходиться суміш атмосферного повітря з парфумами, що мають масу m ; тиск та температура суміші дорівнюють атмосферним. Яка маса парфумів залишиться в пробірці до моменту часу t , якщо в момент $t = 0$:

а) пробірку відкрили; б) пробку пробірки замінили пористою перегородкою?

20.5. Бічна поверхня тонкого однорідного стержня теплоізолювана. Знайдіть розподіл температури $T(x, t)$ в стержні в довільний момент часу, а також температуру, яка усталюється в ньому при $t \rightarrow \infty$, якщо:

а) кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а його початкова температура $T(x, 0) = T_0 x(l - x)/l^2$, $T_0 = \text{const}$;

б) кінці стержня теплоізолювані, ліва половина стержня в початковий момент часу має температуру T_1 , а права – T_2 ;

в) лівий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, на правому відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має нульову температуру, і початкова температура стержня $T(x, 0) = T_0 x/l$.

21.1. Натягнену струну з жорстко закріпленими кінцями утримують у горизонтальному положенні. Опишіть поперечні коливання струни в полі тяжіння після того, як її відпускають без початкової швидкості.

21.2. Струна із закріпленими кінцями коливається у в'язкому середовищі, сила опору якого пропорційна швидкості струни. Знайдіть кількість тепла, що виділяється в системі до моменту часу t , якщо в момент $t = 0$ усім точкам струни надали поперечної швидкості v_0 , і вона була в рівноважному стані.

21.3. Вертикальний пружний стержень вільно падає разом із ліфтом, до якого його жорстко закріплено верхнім кінцем. Нижній кінець стержня вільний. Досягнувши швидкості v_0 , ліфт різко зупиняється. Опишіть позовжні коливання стержня.

21.4. Лівий кінець горизонтального стержня жорстко закріплено, а на правий уздовж осі стержня діє періодична сила $F_0 \sin \omega t$. Опишіть коливання стержня та дослідіть явище резонансу.

Модуль 6

22.1. Знайдіть частотну функцію Гріна однорідної струни з жорстко закріпленими кінцями та спектр власних частот струни.

22.2. Однорідна струна з жорстко закріпленими кінцями здійснює усталені вимушені коливання під дією сили $F = F_0 \cos \omega t$, прикладеної до точки, віддаленої на одну чверть довжини струни від лівого кінця. Знайдіть значення амплітуди коливань: а) у точці, де прикладено силу; б) посередині струни; в) у точці, віддаленій на одну чверть довжини струни від правого кінця.

22.3. Знайдіть частотну функцію Гріна і спектр власних частот пружного стержня з жорстко закріпленим лівим та вільним правим кінцями, а також значення амплітуди усталених вимушених коливань, здійснюваних стержнем під дією позовжньої сили $F = Ax(2l - x) \cos \omega t$, у точках: а) $x = l$; б) $x = l/2$.

ЗАВДАННЯ

23.1. Бічна поверхня тонкого однорідного стержня теплоізольована, його початкова температура дорівнює нулю. Знайдіть розподіл температури в стержні в довільний момент часу t та її усталене значення при $t \rightarrow \infty$, якщо:

а) кінці стержня теплоізольовані, і в ньому діють теплові джерела з погонною густиною потужності $q(x,t) = q_0 e^{-\gamma x} + q_1 \cos(\pi x/l)$, $\gamma > 0$;

б) кінці підтримуються при сталих температурах T_1 (зліва) і T_2 (справа).

23.2. На бічній поверхні тонкого однорідного стержня відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем. Температура середовища та початкова температура стержня дорівнюють нулю, лівий кінець стержня підтримується при сталій температурі T_1 . Знайдіть розподіл температури в стержні в довільний момент часу, якщо :

а) правий кінець стержня підтримується при сталій температурі T_2 ;

б) на правому кінці відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем;

в) правий кінець підтримується при температурі $T(t) = T_1 + \Delta T \sin \omega t$.

23.3. Тонкий однорідний дріт із площею поперечного перерізу S нагрівається постійним струмом, густина якого j_0 . Питомий опір дротика змінюється з температурою за законом $\rho(T) = \rho_0 [1 + \gamma(T - T_0)]$. Якщо довжина дротика є більшою за певне критичне значення l_c , він плавиться. Оцініть l_c .

23.4. Знайдіть частотну функцію Гріна та спектр теплових мод у задачі про теплопровідність у довгому тонкому однорідному стержні з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо:

а) кінці стержня підтримуються при нульовій температурі;

б) кінці стержня теплоізольовані;

в) лівий кінець стержня теплоізольований, а правий підтримується при нульовій температурі;

г) лівий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а на правому відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має нульову температуру.

24.1. Тонку прямокутну пластинку шириною a й довжиною b жорстко закріпили в площині XOY уздовж довшої сторони $x = 0$; решта країв вільні. Для поперечних коливань пластинки знайдіть:

а) власні частоти та нормовані власні функції;

б) зміщення точок пластинки та енергію окремих гармонік у довільний момент часу після того, як у початковий момент часу всім її точкам надали однакової поперечної швидкості v_0 ;

в) те саме, якщо в початковий момент часу пластинку зігнули за край $x = a$ і відпустили. Мала початкова деформація описується формулою $u_0(x, y) = \alpha x^2$;

г) амплітуду усталених вимушених коливань під дією поперечної періодичної сили з одиничною амплітудою й частотою ω , прикладеної до середини пластинки. Сила адіабатично “вмикається” в момент часу $t = -\infty$.

24.2. Покажіть, що власні значення задачі про поперечні коливання квадратної пластинки із закріпленими краями вироджені.

ЗАВДАННЯ

24.3. Знайдіть власні частоти та нормовані власні функції коливань камертона, виготовленого у формі паралелепіпеда з довжиною a , шириною b й висотою c , жорстко закріпленого за одну з основ $a \times b$.

24.4. Знайдіть власні значення та нормовані власні функції в задачі про радіальні коливання повітря:

а) усередині сферичної порожнини радіусом R , яка має тверду оболонку;

б) між твердими концентричними сферичними оболонками, якщо зовнішній радіус меншої оболонки становить R_1 , а внутрішній радіус більшої – R_2 .

24.5. Знайдіть частоти радіальних коливань металевої кулі радіусом R .

25.1. Однорідна куля радіусом R із центром у початку координат має початкову температуру $T_0 = \text{const}$. Знайдіть:

а) закон остигання кулі, якщо на її поверхні підтримується нульова температура;

б) те саме, якщо на поверхні кулі відбувається теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має нульову температуру;

в) температуру кулі в довільний момент часу, якщо всередину кулі через її поверхню подається потік тепла, стала густина якого j ;

г) те саме, якщо на поверхні кулі підтримується нульова температура, а всередині діють джерела тепла, стала густина потужності яких q .

25.2. Знайдіть критичний радіус кубічного (з ребром a) та сферичного (радіусом R) реакторів із поглинаючими стінками. Як зміниться відповідь, якщо стінки реакторів непроникні для нейтронів?

26.1. Край круглої мембрани радіусом R жорстко закріплено в площині XOY ; центр мембрани збігається з початком координат. Для малих поперечних коливань мембрани знайдіть:

а) власні частоти та нормовані власні функції;

б) зміщення точок мембрани в довільний момент, якщо в початковий момент часу всім її точкам надали однакової поперечної швидкості v_0 ;

в) те саме, якщо в початковий момент часу мембрану прогнули й відпустили без початкової швидкості. Мала початкова деформація описується в полярних координатах формулою $u_0(\rho, \varphi) = \alpha(R - \rho)^2 \cos 2\varphi$;

г) зміщення точок мембрани в довільний момент часу під дією падаючої звукової хвилі, яка створює на поверхні мембрани рівномірно розподілений тиск $p = p_0 \cos \omega t$.

26.2. Знайдіть розподіл температури при $t > 0$ в нескінченному однорідному стержні радіусом R , якщо його початкова температура дорівнює нулю, а температура поверхні підтримується сталою на значенні T_0 . Як зміниться відповідь, якщо всередині стержня, починаючи з моменту $t = 0$, додатково діють теплові джерела зі сталою густиною потужності q ?

26.3. Те саме для нескінченної однорідної труби $R_1 \leq r \leq R_2$.

26.4. Знайдіть стаціонарну температуру всередині металевої кулі радіусом R , верхня половина поверхні якої підтримується при сталій температурі T_0 , а нижня – при нульовій температурі.

ЗАВДАННЯ

27.1. Оцініть варіаційним методом Релея частоту основного тону коливань, використовуючи запропоновані пробні функції $X(x)$ (A, B, C – сталі):

а) однорідної струни із закріпленими кінцями, $X(x) = Ax(l - x)$;

б) однорідного стержня із закріпленим лівим та вільним правим кінцями, $X(x) = Ax(2l - x)$;

в) однорідного стержня з жорстко закріпленими лівим та пружно закріпленим правим кінцями, $X(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Порівняйте здобуті значення з точними.

27.2. Натягнена струна із закріпленими кінцями має густину $\rho(x)$ та потенціальну енергію $\frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) u_x^2(x, t) dx$. Оцініть найменшу власну частоту поперечних коливань цієї струни, якщо (ρ_0, T_0 – сталі):

а) $\rho(x) = \rho_0 \left(1 + \alpha \frac{x}{l}\right)$, $|\alpha| < 1$, $p(x) = T_0$; б) $\rho(x) = \rho_0$, $p(x) = T_0 \left(1 + \frac{x}{2l}\right)$;

в) $\rho(x) = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{2l}\right)$, $p(x) = T_0 \left(1 + \frac{x}{2l}\right)$; г) $\rho(x) = \begin{cases} \rho_0, & x < \frac{l}{2}, \\ 2\rho_0, & x > \frac{l}{2}, \end{cases} \quad p(x) = T_0$.

27.3. Користуючись варіаційним методом Релея–Рітца, знайдіть наближене значення для найменшого власного значення і відповідної власної функції крайової задачі

$$-\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{du}{dx} \right) - \gamma u = \lambda x^2 u, \quad u(0) \neq 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Пробну функцію візьміть у вигляді: а) $u(x) = Ae^{-\alpha x^2}$; б) $u(x) = Ae^{-\beta x}$. Порівняйте відповідь із точним значенням $\lambda_1 = -\gamma^2/4$. (Задача про основний стан атома водню.)

27.4. Те саме для крайової задачі

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda e^{-\gamma x} u, \quad u(0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

і пробної функції $u(x) = Axe^{-\alpha x}$.

27.5. Користуючись варіаційним методом Релея–Рітца, знайдіть наближені вирази для першого та другого власних значень і відповідних власних функцій крайової задачі про коливання однорідного стержня з жорстко закріпленим лівим та пружно закріпленим правим кінцями. Пробні функції візьміть у вигляді (A, B, C, D – сталі)

$$X(x) = A \left(\sin \frac{\pi x}{l} + B \sin \frac{2\pi x}{l} \right), \quad Y(x) = C \left(\sin \frac{3\pi x}{l} + D \sin \frac{4\pi x}{l} \right).$$

4. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

Модуль 1

1. Запишіть рівняння теплопровідності в загальному випадку та поясніть зміст величин, що входять до нього. За яких умов це рівняння стає лінійним?
2. Як спрощується рівняння теплопровідності у випадку однорідного простору, у якому відсутні джерела та поглиначі тепла?
3. Сформулюйте задачу Коші для лінійного рівняння теплопровідності. З якого принципу випливає єдиність розв'язку цієї задачі? Сформулюйте відповідну математичну теорему єдиності.
4. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності в необмеженому просторі у вигляді квадратур.
5. Запишіть функцію Гріна $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ для рівняння теплопровідності в необмеженому однорідному просторі та перевірте, що вона справді задовольняє це рівняння.
6. З'ясуйте, до якої границі прямують інтеграли від добутку $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ з довільними гладкими фінітними функціями при $t \rightarrow 0$.
7. Визначте фізичний зміст функції Гріна рівняння теплопровідності.
8. Для незалежної від часу густини потужності джерел запишіть вираз для стаціонарної температури у вигляді ньютонівського потенціалу. З'ясуйте, за яких умов цей вираз дає єдиний спадний розв'язок рівняння Пуассона.
9. З'ясуйте, чи може стаціонарна температура набувати найменшого або найбільшого значень усередині області, у якій немає джерел тепла?
10. Як відновити гладку фінітну функцію після дії на неї оператором Лапласа?
11. Запишіть вираз для амплітуди вимушених коливань температури, що встановлюються під дією джерел, які змінюються з часом за гармонічним законом. Яке неоднорідне диференціальне рівняння вона задовольняє?
12. Чому дорівнює загальний розв'язок рівняння Гельмгольца для амплітуди вимушених коливань температури, що встановлюються під дією гармонічних джерел, густина яких повільно зростає на нескінченності?
13. Який фізичний зміст має функція Гріна рівняння Гельмгольца, якому підпорядковуються комплексні амплітуди коливань температури?
14. Дайте означення вектора густини потоку частинок у середовищі. На які частини можна розкласти цей вектор?
15. Скориставшись цим розкладом та законом збереження кількості частинок, виведіть рівняння дифузії при відсутності джерел домішкових частинок.
16. Сформулюйте задачу Коші для рівняння дифузії та запишіть її загальний розв'язок у випадку однорідного нерухомого простору.
17. Дайте означення: а) густини ймовірності знайти броунівську частинку в околі даної точки простору; б) густини ймовірності переходу з однієї точки простору в інші його точки; в) марковського процесу. Для частинки, що здійснює броунівський рух, виведіть рівняння Чепмена–Колмогорова.
18. Запишіть рівняння Ейнштейна–Смолуховського для густини ймовірності знайти броунівську частинку в околі даної точки простору та отримайте з нього рівняння дифузії.

Модуль 2

1. Дайте означення множини основних функцій. Покажіть, що основні функції утворюють лінійний простір.
2. Дайте означення неперервного лінійного функціонала, заданого на множині основних функцій. Покажіть, що такі функціонали утворюють лінійний простір.
3. Дайте означення регулярного функціонала. У чому полягає різниця між регулярними та сингулярними функціоналами? Дайте приклад останнього.
4. Покажіть, що функціонал, який кожній основній функції ставить у відповідність її значення в певній точці, є неперервним, але не є регулярним.
5. Про що йдеться, коли кажуть, що послідовність регулярних функціоналів збігається до сингулярного функціонала? Наведіть приклад послідовності регулярних функціоналів, яка збігається до δ -функції Дірака.
6. За якою формулою обчислюється функціонал, якому відповідає складена узагальнена функція $\delta(h(x))$, де $h(x)$ – диференційовна на дійсній осі функція? Укажіть умови, за яких ця формула справджується.
7. Дайте означення звичайних та частинних похідних узагальнених функцій. Чому дорівнюють узагальнені похідні від дельта-функції однієї змінної і функції Хевісайда?
8. Дайте означення узагальненого розв'язку лінійного диференціального рівняння. Чому дорівнюють узагальнені розв'язки рівнянь Пуассона й Гельмгольца з дельта-функціями у правих частинах?
9. Дайте означення перетворення Фур'є узагальнених функцій. Чому дорівнюють Фур'є-образи дельта-функції однієї змінної та її похідних?
10. Поясніть фізичний зміст частинних розв'язків рівняння теплопровідності у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить лише від часу, а інша – лише від координат. Який вигляд має функція, що описує часову залежність? Яке рівняння задовольняє координатно-залежний множник?
11. Які частинні розв'язки рівняння Гельмгольца називаються плоскими хвилями? Знайдіть розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, якщо початкова температура має вигляд: а) плоскої хвилі; б) їх суперпозиції.
12. Дайте означення перетворення Фур'є інтегровної функції. Доведіть обмеженість та неперервність відповідного Фур'є-образу.
13. Сформулюйте теорему Рімана–Лебега. Перевірте її істинність на прикладі східчастих інтегровних функцій.
14. Дайте означення абсолютно неперервної функції. Вважаючи, що абсолютно неперервна функція інтегровна й має неперервну похідну, виразіть Фур'є-образ її похідної через Фур'є-образ самої функції.
15. Виведіть формулу обернення для перетворення Фур'є.
16. Дайте означення згортки інтегровних функцій. Доведіть інтегровність згортки та комутативність операції згортки.
17. Знайдіть Фур'є-образ згортки інтегровних функцій та запишіть відповідну формулу обернення.
18. Виведіть рівність Парсеваля–Планшереля.

Модуль 3

1. Запишіть систему рівнянь, що описують поширення акустичних коливань в ідеальній рідині. Які члени цієї системи роблять її нелінійною?
2. Які течії ідеальної рідини можна описувати за допомогою потенціалу швидкості? Як за його допомогою знайти відхилення швидкості, масової густини й тиску, що виникають при малих коливаннях рідини (газу)?
3. Поставте задачу Коші для однорідного хвильового рівняння Д'Аламбера та сформулюйте для неї теорему єдиності.
4. У класі нескінченно диференційовних функцій, що швидко спадають разом зі своїми похідними, запишіть розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння через перетворення Фур'є початкових функцій.
5. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння у тривимірному просторі за допомогою сферичних середніх (формула Пуассона).
6. Поясніть, у чому полягає принцип Гюйгенса для хвильового рівняння у тривимірному просторі.
7. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння в необмеженому двовимірному просторі.
8. Поясніть, чому принцип Гюйгенса не справджується для хвильового рівняння у двовимірному просторі.
9. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного одновимірного хвильового рівняння на дійсній осі.
10. Чи справджується принцип Гюйгенса для хвильового рівняння на дійсній осі? Поясніть.
11. На які частини можна розбити загальний розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння у тривимірному просторі?
12. Подайте розв'язок неоднорідного хвильового рівняння, який усталюється з часом, у вигляді загальної потенціалу.
13. Запишіть розв'язок неоднорідного хвильового рівняння, який усталюється з часом, для випадку, коли потенціал об'ємної сили змінюється за гармонічним законом із частотою ω . Який вигляд має функція, що описує координатно-залежний множник?
14. Яке рівняння задовольняє амплітуда усталених коливань хвильового поля під дією гармонічного джерела з частотою ω ? Запишіть його розв'язок.
15. Які розв'язки рівняння Гельмгольца називаються збіжними та розбіжними хвилями? Яка умова на нескінченності дозволяє виділити розбіжні хвилі?
16. Запишіть формулу для перетворення Фур'є функцій двох змінних та відповідну формулу обернення. Те саме для функцій трьох змінних.
17. Знайдіть Фур'є-образ згортки інтегровних функцій двох змінних та запишіть відповідні формули обернення. Те саме для функцій трьох змінних.
18. Виведіть рівності Парсеваля–Планшереля для функцій двох і трьох змінних.

Модуль 4

1. Дайте означення функціонала, заданого на множині функцій, гладких на відрізку $[x_1, x_2]$. Наведіть приклад такого функціонала.
2. У чому полягає основна задача варіаційного числення? Сформулюйте лему, яка постійно використовується при відшукуванні необхідних умов існування розв'язку цієї задачі.
3. Виведіть рівняння, яке повинна задовольняти крива $y_0(x)$ класу $C^2([x_1, x_2])$, яка реалізує екстремум функціонала $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y')$ з ядром F , двічі диференційовним за своїми аргументами.
4. Які криві можуть бути екстремальними функціонала найпростішого типу, якщо його ядро залежить лише від y' ? Відповідь обґрунтуйте.
5. Знайдіть загальний інтеграл рівняння Ейлера–Лагранжа для випадку, коли ядро функціонала найпростішого типу не залежить від y .
6. Знайдіть перший інтеграл рівняння Ейлера–Лагранжа для випадку, коли ядро функціонала найпростішого типу не залежить від x .
7. Знайдіть крайові умови, які задовольняє екстремаль класу $C^1([x_1, x_2])$ функціонала найпростішого типу, якщо її лівий кінець виходить із точки (x_1, y_1) , а правий вільно ковзає по прямій $x = x_2$.
8. Які крайові умови задовольняє екстремальна гладка крива функціонала $\int_{\Gamma} dx F(x, y, y')$, якщо її лівий кінець виходить із точки (x_1, y_1) , а правий вільно ковзає вздовж кривої $y = \varphi(x)$? До якої умови зводиться умова на правому кінці, якщо ядро функціонала має вигляд $f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$?
9. Виведіть рівняння, яке повинна задовольняти крива $y_0(x)$ класу $C^4([x_1, x_2])$, яка реалізує екстремум функціонала $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y', y'')$ у класі кривих $C^2([x_1, x_2])$ із кінцями, закріпленими під фіксованими кутами. Функція F вважається двічі диференційовною за своїми аргументами.
10. Виведіть крайові умови для рівняння Ейлера–Пуассона в задачах для кривих, кінці яких можуть вільно ковзати по вертикальних прямих під фіксованими кутами.
11. Сформулюйте найпростіший варіант ізопериметричної задачі. Посилаючись на теорему Ейлера, опишіть алгоритм її розв'язку.
12. Виведіть необхідну умову існування екстремуму функціонала, який залежить від гладких просторових кривих, що з'єднують дві фіксовані точки.

Модуль 5

1. Знайдіть необхідну умову існування екстремуму функціонала

$$J[z] = \iint_D dx dy F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right)$$

у класі функцій, які визначені й диференційовні в області D площини $ХОУ$ та набувають заданих значень на її кусково-гладкій межі Γ .

2. Знайдіть крайову умову на межі Γ області D площини $ХОУ$, яку має задовольняти функція $z(x, y)$, що реалізує екстремум функціонала

$$J[z] = \iint_D dx dy F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) + \oint_{\Gamma} dl f(z(x, y)),$$

де $f(z)$ – гладка функція.

3. Знайдіть функцію Лагранжа натягнутої струни із закріпленими кінцями.
4. Знайдіть функцію Лагранжа однорідного стержня із закріпленими кінцями.
5. Знайдіть рівняння коливань натягнутої струни із закріпленими кінцями.
6. Знайдіть крайові умови на пружно закріплених кінцях стержня.
7. Поставте задачу Коші для вільних коливань стержня з пружно закріпленими кінцями.
8. Скориставшись методом продовження, знайдіть загальний розв'язок задачі Коші для вільних коливань напівобмеженої однорідної струни із закріпленим кінцем.
9. Скориставшись методом продовження, опишіть алгоритм розв'язку задачі Коші для вільних коливань однорідної струни із закріпленими кінцями.
10. Скориставшись результатами теорії рядів Фур'є, знайдіть загальний розв'язок задачі Коші для вільних коливань однорідної струни із закріпленими кінцями.
11. Виразіть енергію вільних коливань струни через початкові функції та знайдіть частку енергії, яка припадає на кожне власне коливання.
12. Знайдіть частоти згасаючих власних коливань струни із закріпленими кінцями при наявності тертя.

Модуль 6

1. Знайдіть частинний розв'язок крайової задачі про вимушені коливання обмеженої струни під дією зовнішньої сили при нульових початкових умовах.
2. Запишіть часову функцію Гріна для задачі про вимушені коливання обмеженої струни під дією зовнішньої сили у вигляді розкладу за власними функціями. Який її фізичний зміст?
3. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань обмеженої струни під дією гармонічної сили. Запишіть частотну функцію Гріна для цієї задачі у вигляді розкладу за власними функціями. Який зміст має ця функція?
4. Знайдіть частотну функцію Гріна для задачі про вимушені коливання струни під дією гармонічної сили як певний розв'язок рівняння Штурма–Ліувілля.
5. Доведіть додатність власних значень крайової задачі Штурма–Ліувілля для струни.
6. Доведіть, що власні функції крайової задачі Штурма–Ліувілля, які відповідають різним власним значенням, ортогональні.
7. З'ясуйте екстремальний зміст найменшого власного значення крайової задачі Штурма–Ліувілля.
8. Доведіть, що власна функція, яка відповідає найменшому власному значенню крайової задачі Штурма–Ліувілля, не має вузлів.
9. З'ясуйте екстремальний зміст другого та вищих власних значень крайової задачі Штурма–Ліувілля. Яку властивість щодо наявності вузлів мають відповідні власні функції?
10. Сформулюйте теорему про *mini-max*. Які наслідки випливають із цієї теореми щодо руху власних частот при змінах жорсткості та маси коливальної системи? Як зростають послідовні власні частоти ω_n неоднорідної струни із зростанням номера n ?
11. Виведіть нерівність Бесселя для ортогональних розкладів. Поясніть, у яких випадках ця нерівність перетворюється на рівність Парсеваля.
12. Доведіть повноту системи власних функцій крайової задачі Штурма–Ліувілля.
13. Знайдіть власні частоти та відповідні власні функції для прямокутної мембрани із закріпленими краями.
14. Поставте задачу Коші про коливання прямокутної мембрани із закріпленими краями й запишіть її загальний розв'язок.
15. Доведіть додатність власних значень для коливань прямокутної мембрани із закріпленими краями.
16. Покажіть, як тривимірні задачі для сферично-симетричних розв'язків зводяться до одновимірних.
17. Поставте задачу Коші про остигання рівномірно нагрітої однорідної кулі й запишіть її розв'язок.
18. Знайдіть критичний радіус сферичного реактора.

5. ЗРАЗКИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Контрольна робота №1

1. Запишіть рівняння теплопровідності в загальному випадку та поясніть зміст величин, що входять до нього.
2. Запишіть функцію Гріна для рівняння теплопровідності в необмеженому однорідному просторі та перевірте, що вона справді задовольняє це рівняння.
3. Скориставшись законом збереження кількості частинок, виведіть рівняння дифузії при відсутності джерел домішкових частинок.
4. Обчисліть інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x+x')^2 - \beta x'^2} dx'$, $\alpha, \beta > 0$.
5. У момент часу $t = 0$ температура однорідної речовини описується виразом $T(\mathbf{r}, 0) = T_0 e^{-\alpha y^2}$, $\alpha > 0$. Вважаючи коефіцієнт температуропровідності відомим, знайдіть температуру в довільній точці речовини при $t > 0$.

Контрольна робота №2

1. Дайте означення множини основних функцій. Покажіть, що основні функції утворюють лінійний простір.
2. Які частинні розв'язки рівняння Гельмгольца називаються плоскими хвилями? Знайдіть розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, якщо початкова температура має вигляд: а) плоскої хвилі; б) їх суперпозиції.
3. Дайте означення згортки інтегровних функцій. Доведіть інтегровність згортки та комутативність операції згортки.
4. Знайдіть Фур'є-образ функції $f(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$.
5. Обчисліть інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(9x^2 - 16)$.

Контрольна робота №3

1. Запишіть систему рівнянь, що описують процес поширення акустичних коливань в ідеальній рідині. Які члени цієї системи роблять її нелінійною?
2. Яке рівняння задовольняє амплітуда усталених коливань хвильового поля під дією гармонічного джерела з частотою ω ? Запишіть його розв'язок.
3. Запишіть загальний розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння у тривимірному просторі за допомогою сферичних середніх (формула Пуассона).
4. Знайдіть тривимірний Фур'є-образ від функції $f(r) = e^{-\alpha r^2}$, $\alpha > 0$.
5. Запишіть тривимірну рівність Парсеваля–Планшереля для функції $f(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$, $\alpha > 0$.

ЗРАЗКИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Контрольна робота №4

1. У чому полягає основна задача варіаційного числення? Сформулюйте лему, яка постійно використовується при відшукуванні необхідних умов існування розв'язку цієї задачі.
2. Які крайові умови задовольняє екстремальна гладка крива функціонала $\int_{\Gamma} dx F(x, y, y')$, якщо її лівий кінець виходить із точки (x_1, y_1) , а правий вільно ковзає вздовж кривої $y = \varphi(x)$? До якої умови зводиться умова на правому кінці, якщо ядро функціонала має вигляд $f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$?
3. Випишіть рівняння Ейлера–Лагранжа (його не розв'язуйте) для функціонала $J[y] = \int_0^1 (2y^3 + 3y'^2) dx$.
4. Знайдіть гладку екстремаль функціонала $J[y]$, яка проходить через задані початкову й кінцеву точки, і для якої функціонал $L[y]$ набуває заданого значення: $J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $L[y] = \int_0^1 x^3 y dx = 1$.
5. Тонкий стержень довжиною l замуровано в точках A і B , що лежать на одній горизонталі. Знайдіть форму профілю стержня внаслідок провисання під власною вагою. Погонна густина стержня ρ .

Контрольна робота №5

1. Знайдіть функцію Лагранжа натягнутої струни із закріпленими кінцями.
2. Скориставшись методом продовження, знайдіть загальний розв'язок задачі Коші про вільні коливання напівобмеженої однорідної струни із закріпленим кінцем.
3. Сформулюйте одновимірну крайову задачу про вирівнювання температури в однорідній пластині товщиною l , один бік якої теплоізолюваний, а інший підтримується при нульовій температурі. Початкова температура пластини відома.
4. Знайдіть нормовані власні функції в задачі про власні коливання стержня з жорстко закріпленим лівим і пружно закріпленим правим кінцями.
5. Початкова концентрація домішки в скляній трубці довжиною l описується формулою $n(x, 0) = n_0 x(l - x)/l^2$. Знайдіть концентрацію домішки в точці $x = l/2$ у довільний момент часу, якщо кінці трубки відкриті.

Контрольна робота №6

1. Знайдіть частотну функцію Гріна для задачі про вимушені коливання струни під дією гармонічної сили як певний розв'язок рівняння Штурма–Ліувілля.
2. З'ясуйте екстремальний зміст другого та вищих власних значень крайової задачі Штурма–Ліувілля. Яку властивість щодо наявності вузлів мають відповідні власні функції?

ЗРАЗКИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

3. Доведіть додатність власних значень для коливань прямокутної мембрани із закріпленими краями.
4. На однорідну струну довжиною l , закріплену в точках $x=0$ та $x=l$, діє зосереджена сила $f \cos \omega t$, прикладена до точки $x=l/3$. Знаючи силу натягу T та погонну густину ρ струни, знайдіть амплітуду вимушених коливань струни в точці $x=2l/3$.
5. Знайдіть рівняння для відшукування власних значень, що відповідають сферично-симетричним розв'язкам крайової задачі для рівняння дифузії в області між концентричними сферичними стінками із внутрішнім радіусом R_1 та зовнішнім R_2 , якщо внутрішня стінка миттєво поглинає частинки, а зовнішня є для них непроникною.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Адамян В. М., Сушко М. Я.* Вступ до математичної фізики. Introduction to Mathematical Physics. – Одеса: Астропринт, 2003. – 320 с.
2. *Адамян В. М., Сушко М. Я.* Варіаційне числення. – Одеса: Астропринт, 2005. – 128 с.
3. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
4. *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 311 с.
5. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980. – 688 с.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
7. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
8. *Кошляков С. Н., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2 – М.: Наука, 1981. – 656 с.; Т. 4 – М.: ГИФМЛ, 1958. – 812 с.; Т. 4, часть 2 – М.: Наука, 1981. – 552 с.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 724 с.

ЗМІСТ

Передмова.....	3
1. РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ	
1.1. Весінній семестр.....	4
1.2. Осінній семестр.....	6
2. РОБОЧИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ	
2.1. Весінній семестр.....	8
2.2. Осінній семестр.....	8
3. ЗАВДАННЯ	
Модуль 1.....	10
Модуль 2.....	12
Модуль 3.....	14
Модуль 4.....	16
Модуль 5.....	23
Модуль 6.....	25
4. КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ.....	29
5. ЗРАЗКИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ.....	35
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	38