

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного та комп'ютерного моделювання

Дипломна робота

бакалавра

на тему: **«Розв'язання початково - крайової задачі
теплопровідності методом скінченних елементів»**

«Solution of the initial - boundary value problem of thermal conductivity by the finite element method»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 113 Математика
Боровський Денис Володимирович

Керівник:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Вербіцький В. В.

Рецензент:

канд. фіз.-мат. наук, доц. Гришин В. О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від «_____» _____ р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від «_____» ____ р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Розв’язання початково-крайової задачі теплопровідності методом скінченних елементів	5
2.1 Параболічні задачі	5
2.2 Варіаційне формулювання параболічної задачі	6
2.3 Напівдискретні апроксимації Гальоркіна	9
3 Пакет FreeFem++ розв’язання крайових задач методом скінченних елементів	11
3.1 Основні характеристики FreeFem++	11
3.2 Мова програмування FreeFem++	13
4 Розв’язання початково-крайової задачі за допомогою пакету FreeFem++	15
Висновки	20
Список літератури	21
Додаток А. Код програми	22

ВСТУП

Процеси теплопередачі грають винятково велику роль як у природі, так і у сучасній техніці. З одного боку ця галузь науки досить добре розроблена, отримані надійні дані, які можна використовувати при вирішенні тих чи інших конкретних завдань, що виникають під час проектування та експлуатації теплотехнічного обладнання. З іншого — проблемна, оскільки використання нових матеріалів, розширення діапазону дії теплотехнічних пристроїв вимагає створення нових, більш надійних методів розрахунку.

Об'єктом дослідження роботи є задача теплопровідності[6] математичного моделювання процесів, що зустрічаються у природі та техніці.

На сьогоднішній день питання, що пов'язані з методами, які чисельно розв'язують початково-крайові задачі, до яких відноситься задача теплопровідності — є цікавими та корисними для дослідження.

Метод скінченних елементів на даний час є одним з найефективніших методів чисельного розв'язання крайових та початково-крайових задач. З основами методу скінченних елементів та сучасним станом досліджень щодо його застосування до розв'язання початково-крайових задач можна ознайомитись в роботах [2–5, 7–9, 11, 13, 14].

Предметом дослідження роботи є апроксимації початково-крайових задач для рівнянь параболічного типу.

Мета роботи: отримання нових знань і практичного досвіду для створення ефективних схем методу скінченних елементів розв'язання початково-крайових задач.

Задля досягнення мети роботи треба побудувати скінченно-вимірну апроксимацію для конкретної задачі теплопровідності, використовуючи вказану схему методу скінченних елементів. Провести обчислювальні експерименти щодо дослідження збіжності та стійкості методу.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядеться задача про охолодження пластини повітрям. Треба знайти розподіл температури в пластині $(0; Lx) \times (0; Ly) \times (0; Lz)$ прямокутного перерізу $\Omega = (0; 6) \times (0; 1)$. Пластина оточена повітрям. Температура повітря u_e . Початкова температура пластини $u = u_0 + (x/L)u_1$. У площині перпендикулярній пластині, при $z = Lz/2$ температура мало змінюється з координатою z , Тому, у першому наближенні задача двовимірна.

Таким чином, маємо початково-крайову задачу. Знайти $u(x, y, t) \in \Omega \times (0, T)$, що

$$\partial_t u - \nabla(k \nabla u) = 0 \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0 + xu_1, \quad (1.2)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(u - u_e) = 0, \text{ на } \Gamma \times (0, T) \quad (1.3)$$

де Γ — межа Ω .

Тут коефіцієнт дифузії $k(x, y)$ приймає два значення: $k = k_0$, якщо $y \geq 0.5$, та $k = 10k_0$, якщо $y < 0.5$, щоб імітувати термостат. Член $\alpha(u - u_e)$ пояснює втрату температури за рахунок конвекції у повітрі. Математично це описується граничною умовою Фур'є (або Робена, або змішаною).

Треба знайти чисельний роз'язок задачі (1.1)–(1.3) методом скінченних елементів з використанням лінійних неперервних сплайнів.

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Параболічні задачі

Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння параболічного типу, яка полягає у знаходженні функції $u(x,t)$ такої, що задовольняє рівняння

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(x,t) \quad \Omega \times (0,T] \quad (2.1)$$

та початкової умови

$$u(x,t) = u_0 \quad \Omega, t = 0 \quad (2.2)$$

Тут $u(x,t)$ - шукана функція; A - додатно визначений оператор, який діє у гільбертовому просторі H ; Ω - обмежена область евклідового простору R^n . Уважатимемо, що границя Γ області Ω є ліпшицевою. Через $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ позначимо точку області Ω , а через t - часову змінну.

Характерним прикладом рівняння параболічного типу (5.1) є рівняння теплопровідності. Для нього оператор A визначений співвідношеннями

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}; \quad (2.3)$$

$$u(x,t) = 0 \quad \Gamma \times (0; T] \quad (2.4)$$

Коефіцієнт ρ_0 рівняння теплопровідності (5.1) в операторі Au вигляду (5.3) такий:

$$\lambda_{ij}(x) = \lambda_{ji}(x) \quad (2.5)$$

та додатної визначеності

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (2.6)$$

для $\forall(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$, де $\lambda_0 = const, \lambda_0 > 0$. Уважатимемо також, що функції $\rho(x), c_v(x), \lambda_{ij}(x)$ достатньо гладкі: $u_0 \in L_2(\Omega); f(x, t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Варіаційне формулювання параболічної задачі

$$u - g \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

Уведемо деякий простір V . Домножимо рівняння (1.1) на умову (1.2) на довільну функцію $v(x) \in V$ і зінтегруємо в області Ω :

$$\int_{\Omega} \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} A u v d\Omega = \int_{\Omega} f u d\Omega, \forall v \in V \quad (2.8)$$

$$\int_{\Omega} \rho_0 (u(x, 0) - u_0) v d\Omega = 0. \quad (2.9)$$

Уведемо позначення

$$m(u, v) = \int_{\Omega} \rho_0 u v d\Omega; \quad (2.10)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A u v d\Omega; \quad (2.11)$$

$$l(u) = \int_{\Omega} f u d\Omega; \quad (2.12)$$

$$u' = \frac{du}{dt}$$

Наведемо варіаційне формулювання задачі. Знайти функцію $u(x, t) \in L_2(0, T; V)$ таку, що задовольняє рівняння

$$m(u', v) + a(u, v) = l(v), \forall v \in V; \quad (2.13)$$

$$m(u(x,0) - u_0, v) = 0. \quad (2.14)$$

Розв'язок варіаційної задачі (2.7) та (2.8) назвемо слабким розв'язком початково-крайової задачі (1.1) та (1.2).

Зазначимо, що умову (2.8) можна записати також іншим шляхом, зокрема

$$(u(x,0) - u_0, v) = 0$$

де

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega;$$

З подальшого буде зрозуміло, чому співвідношення (2.8) вибране саме у такому вигляді.

Для задачі нестационарної теплопровідності білінійна форма $a(u, v)$ матиме вигляд

$$a(u, v) = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} v d\Omega. \quad (2.15)$$

З використанням формули Гріна та врахуванням граничних умов (1.4) перетворимо її до симетричного вигляду

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\Omega. \quad (2.16)$$

Простір V ідентифікуємо співвідношенням

$$V = \left\{ u(x) : v(x) \in W_2^{(1)}, v(x) = 0, x \in \Gamma \right\} \quad (2.17)$$

Сформулюємо властивості білінійних форм $m(u, v)$, $a(u, v)$ у двох лемах.
Лема 1. Нехай $u, v \in H$ ($H = L_2(\Omega)$). Білінійна форма $m(u, v)$ - симетрична та H - еліптична.

Доведення. Властивість симетрії є очевидно. Із запису (1.9) випливає, що виконується нерівність

$$m(u, v) \geq c_1 \|u\|_0,$$

де

$$\|u\|_0 = \int_{\Omega} u^2 d\Omega,$$

$$c_1 = \min_{\Omega} \{\rho c_v\}; \quad c_1 > 0.$$

Це й доводить H - еліптичність білінійної форми $m(u,v)$.

Наслідок 1. Як наслідок з доведеної леми впливає подвійна нерівність

$$c_1 \|u\|_0 \leq m(u,v)^{1/2} \leq C_1 \|u\|_0.$$

Лема 2. Нехай $u, v \in V$ Білінійна форма $a(u,v)$ - симетрична та V - еліптична.

Доведення. Доведення леми впливає з того, що оператор A є додатно визначений. Зокрема, оператор задачі теплопровідності

$$Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

з вибраною граничною умовою Діріхле

$$u = 0 \text{ на } \Gamma$$

теж є додатно визначеним. Для задачі теплопровідності наведемо доведення цієї теореми у повному вигляді. Симетрія форми $a(u,v)$ впливає з властивості симетрії (1.5) коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_{i,j}$. Якщо ж урахувати властивість додатної визначеності (1.6), то отримаємо

$$a(u,u) \geq \lambda_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega.$$

Далі, використовуючи нерівність Фрідрікса

$$c_1 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega \geq \|u\|_{W_2^{(1)}}^2,$$

де $c_2 = \lambda_0/c_1$. Очевидно, що $c_2 > 0$. Це й доводить V - еліптичність білінійної форми $a(u,v)$.

Наслідок 2. Як наслідок з доведеної леми впливає подвійна нерівність

$$c_2 \|u\|_{W_2^{(1)}} \leq a(u,u)^{1/2} \leq C_2 \|u\|_{W_2^{(1)}}.$$

Напівдискретні апроксимації Гальоркіна

Виберемо у просторі V лінійно незалежну, повну послідовність функцій $\{\phi_j^h\}$. Нехай V_h - скінченновимірний підпростір простору V , який утворюється на базисі $\phi_j^h, j = 1, \dots, N$.

Для отримання наближеного розв'язку задачі

$$m(\dot{u}, v) + a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V; \quad (2.18)$$

$$m(u(x, 0) - u_0, v) = 0 \quad (2.19)$$

використаємо напівдискретне подання

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^N U_j(t) \phi_j^h(x) \quad (2.20)$$

Від задачі (3.1), (3.2) перейдемо до її наближеної форми

$$m(\dot{u}_h, v_h) + a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h; \quad (2.21)$$

$$m(u_h(x, 0) - u_0, v_h) = 0 \quad (2.22)$$

Підставимо формулу (3.3) замість розв'язку u_h у рівняння (3.4) та (3.5) і згідно з методом Гальоркіна виберемо за функції v базисні функції ϕ_i^h . Отримаємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^N \left\{ m_{ij} \dot{U}_j(t) + a_{ij} U_j(t) \right\} = l_i(t), \quad t \in (0, T], \quad i = 1, \dots, N; \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} U_j(0) = p_i, \quad (2.24)$$

де

$$m_{ij} = m(\phi_i^h, \phi_j^h); \quad a_{ij} = a(\phi_i^h, \phi_j^h);$$

$$l_i(t) = l(\phi_i^h); \quad p_i = m(u_0, \phi_i^h).$$

У матричних значеннях

$$M = \{m_{ij}\}; \quad A = \{a_{ij}\};$$

$$U(t) = \{U_i(t)\}; \quad L(t) = \{l_i(t)\}; \quad P = \{p_i\}$$

(M, A - квадратні матриці, U, L, P - матриці-стовпці) задачу (3.6), (3.7) можна записати у такому вигляді

$$MU'(t) + AU(t) = L(t), \quad t \in (0, T]; \quad (2.25)$$

$$MU(0) = P; \quad (2.26)$$

Зазначимо, що як наслідок попереднього матриці M та A є матрицями з відмінними від нуля визначниками, вони є симетричними та додатно визначеними.

Наведених властивостей вистачає, щоб розв'язок задачі Коші (3.8), (3.9) існував та був єдиним.

РОЗДІЛ 3

ПАКЕТ FREEFEM++ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Основні характеристики FreeFem++

Рівняння з частними похідними — це відношення між функцією декількох змінних та її (частковими) похідними. Багато проблем з фізики, техніки, математики і навіть банківської справи моделюються одним або декількома диференціальними рівняннями з частковими похідними.

FreeFem++ — це програма для чисельного розв'язання цих рівнянь. Як випливає з назви, це таке безкоштовне програмне забезпечення, що базується на основі методу скінченних елементів; це інтегрований продукт із власною мовою програмування високого рівня.

З точки зору додатків, FreeFem++ дозволяє вирішувати безліч двох або тривимірних завдань фізики, інженерних розрахунків, математики, економіки та багатьох інших галузей науки, що описуються одним або декількома рівняннями в приватних похідних. Ефективність моделювання підвищується завдяки можливості автоматичної адаптації сітки під час виконання програми. Гнучкість мови дозволяє моделювати також пов'язані системи, такі як, взаємодія рідина-поверхня, пружні деформації-теплопровідність, взаємовплив океану та атмосфери, вплив електромагнетизму на процес виливки металів та багато інших. При вирішенні цих завдань можна використовувати для кожної системи різні скінченно-елементні апроксимації та розрахункові сітки.

Це програмне забезпечення працює на всіх ОС UNIX (з g++ 3.3 або пізнішої версії та OpenGL), на Windows XP, Vista та 7,8,10 та на MacOS 10 intel.

Більше того, FreeFem++ є високоадаптивним. Багато явищ стосуються декількох пов'язаних систем, наприклад: взаємодії рідини і структури, сили Лоренца для лиття алюмінію та проблеми океану і атмосфери. Для них потрібні різні скінченні елементи апроксимації та поліноміальні ступені на

різних сітках. Деякі алгоритми, такі як метод декомпозиції домену Шварца, також вимагають інтерполяції даних у декількох сітках в межах однієї програми.

FreeFem ++ може впоратися з цими труднощами, тобто довільним скінченним елементом простору на довільних неструктурованих та адаптованих двовимірних сітках.

Характеристиками FreeFem ++ такі.

Опис проблеми (реальна або комплексна оцінка) за їх варіаційними формулюваннями, з доступом до внутрішніх векторів та матриць, якщо це необхідно.

Багатозмінні, багаторівневі, двомірні та трьохмірні статичні або залежні від часу, лінійні або нелінійні пов'язані системи; однак від користувача вимагається описати ітераційні процедури, які зводять проблему до набору лінійних задач.

Простота геометричного введення за допомогою аналітичного опису меж по частинах; однак ця частина не є системою САД; наприклад, коли дві межі перетинаються, користувач повинен вказати точки перетину.

Автоматичний генератор сітки на основі алгоритму Делоне-Вороного; внутрішня щільність точок пропорційна щільності точок на межах.

Метрична анізотропна адаптація сітки. Метрику можна обчислити автоматично з гессіана будь-якої функції FreeFem ++.

Мова введення високого рівня, зручна для введення, з алгеброю аналітичних функцій та функцій скінченних елементів.

Кілька сіток з скінченними елементами в межах однієї програми з автоматичною інтерполяцією даних на різні сітки та можливим збереженням матриць інтерполяції.

Велика різноманітність трикутних скінченних елементів: лінійні, квадратичні елементи Лагранжа та багато іншого, розривні елементи $P1$ та Равіарта-Томаса, елементи не скалярного типу, міні-елемент. . . (але без чотирикутників).

Інструменти для визначення розривних формулювань скінченних

елементів Гальоркіна $P_0, P1dc, P2dc$ та ключових слів: стрибок, середнє, кількість.

Велика різноманітність лінійних прямих та ітеративних методів вирішення (LU, Cholesky, Crout, CG, GMRES, UMFPACK, MUMPS, SuperLU ...) та методів вирішування власних значень та власних векторів (ARPACK).

Майже оптимальна швидкість виконання (порівняно зі скомпільованими реалізаціями C ++, запрограмованими безпосередньо).

Інтернет—графіка, генерація файлів .txt, .eps, .gnu, mesh для подальших маніпуляцій із вхідними та вихідними даними.

Багато прикладів та навчальних посібників: еліптичні, параболічні та гіперболічні проблеми, потоки Нав'є-Стокса, еластичність, взаємодія структури рідини, метод розкладання області Шварца, проблема власних значень, індикатор залишкової помилки.

Мова програмування FreeFem++

По суті, FreeFem++ є компілятором: його мова є типізованою, поліморфною. Кожна змінна має бути оголошена певного типу в декларативній формі. Мова дозволяє маніпулювати основними типами цілих чисел (int), дійсних (real), рядків (string), масивів (приклад: real[int]), двовимірних (2D), сіток скінченних елементів (mesh), 2D скінченні простори елементів (fespace), аналітичні функції (func), масиви скінченноелементних функцій (func[basic type]), лінійні та білінійні оператори, розріджені матриці, вектори тощо. Оголошення типів є обов'язковими у FreeFem++.

У список пакету FreeFem++ входять такі основні типи даних: bool використовується для логічного виразу та керування потоком (результатом порівняння є логічний тип); int оголошує ціле число; string оголошує змінну для зберігання закритого тексту; real оголошує змінну для збереження подвійного числа; ofstream, щоб оголосити вихідний файл; ifstream, щоб оголосити вхідний файл; real[int] оголошує змінну, яка зберігає кілька дійсних чисел із цілим індексом; func визначає функцію без аргументу (якщо незалежними змінними є x, y, сітка створює триангуляцію); fespace визначає новий тип простору скінченних елементів (задача оголошує слабку форму часткової

диференціальної задачі без її розв'язування); solve оголошує проблему та вирішує її [10]. Розглянемо декілька аспектів більш детально.

Масиви. У масиві зберігаються кілька об'єктів, і існує два види масивів: перший схожий на векторний, тобто масиви з цілими індексами, а другий тип — це масиви з рядковими індексами. У першому випадку розмір масиву повинен бути відомий під час виконання та реалізації. Існують `int`, `real`, `complex` масиви з двома операторами (`.in`, `.re`) для створення реального та уявного реального масиву з комплексного масиву (без копіювання).

Функція однієї змінної. Елементарні функції позначають для нас клас функцій (поліноміальні, експоненціальні, логарифмічні, тригонометричні, кругові), які були отримані за допомогою чотирьох арифметичних дій (додавання, віднімання, добутку, ділення) і композиції $f(g(x))$, кожна з яких застосована скінченну кількість разів. Таким чином, у FreeFem++ можна створити всі елементарні функції. Похідна елементарної функції також є елементарною функцією; однак невизначений інтеграл від елементарної функції не завжди можна виразити через елементарні функції.

Триангуляція. Команда `square` ($m \times n$) генерує сітку ($m \times n$) в одиничному квадраті $[0; 1]^2$). Ключове слово `square` дозволяє створювати лише структуровані сітки. Більш загальні сітки можна створити за допомогою ключових слів `border` і `buildmesh` - дає змогу визначити сітку для відкритих наборів, межі яких описуються параметризованими кривими.

Простір скінченних елементів (F.E.S.) — це, як правило, простір поліноміальних функцій на елементах τ_h трикутників, з певними властивостями відповідності на ребрах, вершинах, визначається як: `fespace $Vh(Th, P1)$` , де $P1$ — кусково-лінійний неперервний скінченний елемент (2d, 3d), ступені свободи є значеннями вершин.

Синтаксис операторів введення/виведення подібний до синтаксису багатьох мов програмування. Щоб записати у файл (відповідно читати з нього), оголошіть нову змінну: `ofile("filename");` або `ofstream ofile("ім'я файлу додати);` (відповідно `ifstream ifile("ім'я файлу");`). Слово `append` в `ofstream ofile("filename append|binary);` означає відкриття файлу в режимі доповнення.

РОЗДІЛ 4

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТУ FREEFEM++

На проміжку $(0, T)$ визначимо рівномірні сітку з кроком δ та вузлами

$$t_j = \delta j, \quad j = 0, 1, \dots, N_T, \quad \delta = \frac{T}{N_T}.$$

Позначимо через $u^j = u^j(x, y)$ наближений розв'язок задачі (1.1)-(1.3) на прямій $t = t_j$. Використовуючи апроксимацію

$$\partial_t u \approx \frac{u^j - u^{j-1}}{\delta},$$

для задачі (1.1)-(1.3) визначимо напівдискретну початково-крайову задачу. Знайти такі функції u^j , що

$$\frac{u^j - u^{j-1}}{\delta} - \nabla(k \nabla u^j) = 0 \text{ в } \Omega, \quad j = 1, 2, \dots, N_T, \quad (4.1)$$

$$u^0(x, y) = u_0 + x u_1, \quad (4.2)$$

$$k \frac{\partial u^j}{\partial n} + \alpha(u^j - u_e^j) = 0, \text{ на } \Gamma, \quad j = 1, 2, \dots, N_T. \quad (4.3)$$

Якщо функцію u^{j-1} уже знайдено, то u^j знаходимо розв'язуючи крайову задачу (4.1), (4.3). Оскільки функція u^0 відома (початкова умова (4.2)), то функції u^j можна знаходити послідовно.

Для крайової задачі (4.1), (4.3) запишем варіаційну задачу. Знайти $u^j(x, y) \in H^1(\Omega)$, так що

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u^j - u^{j-1}}{\delta} w + k \nabla u^j \nabla w \right) + \int_{\Gamma} \alpha (u^j - u_e^j) w = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega). \quad (4.4)$$

Знайдемо наближений розв'язок варіаційної задачі (4.4) методом Бубнова-Гальоркіна. Введемо позначення. Ω_h — деяка триангуляція області Ω . h — параметр триангуляції. V_h — простір лінійних неперервних сплайнів, що

визначаються триангуляцією Ω_h . Варіаційну задачу (4.4) апроксимуємо скінченно-вимірною варіаційною задачею. Знайти $u_h^j(x,y) \in V_h$, так що

$$\int_{\Omega} \left(\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\delta} w_h + k \nabla u_h^j \nabla w_h \right) + \int_{\Gamma} \alpha (u_h^j - u_e^j) w_h = 0 \quad \forall w_h \in V_h. \quad (4.5)$$

u_h^j — скінченно-елементний розв'язок крайової задачі (4.1),(4.3). Таким чином, числовий розв'язок початково-крайової задачі (1.1)-(1.2) — це послідовність скінченно-елементних розв'язків u_h^j , $j = 1, 2, \dots, N_T$

Опишемо, як вирішити поставлену задачу за допомогою програмного пакету FreeFem++.

Задамо початкову умову:

```
func u0 =10+90*x/6;
```

Задамо коефіцієнт теплопровідності:

```
func k = 1.8*(y<0.5)+0.2;
```

Задамо температуру повітря, яке оточує пластину:

```
real ue = 25, alpha=0.25, T=5, dt=0.1 ;
```

Будуємо триангуляцію Th в області Ω :

```
mesh Th=square(30,5, [6*x,y]);
```

На Рис. 4.1 приведена область Ω .

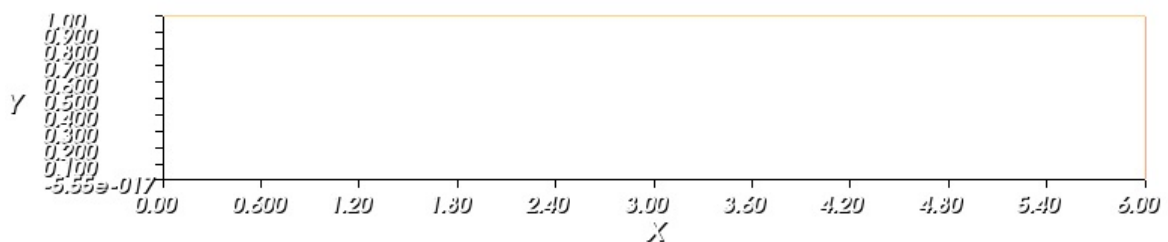
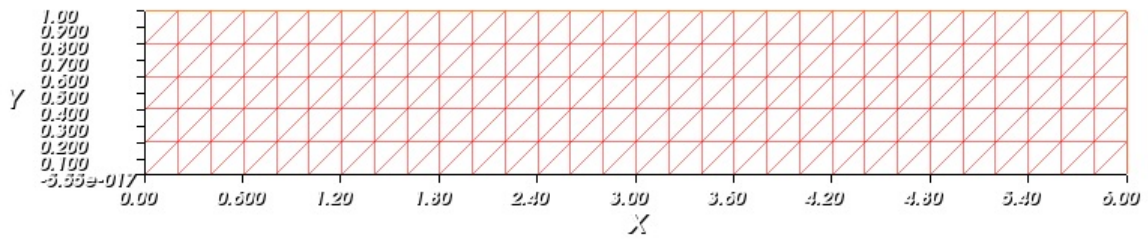


Рис. 4.1. Область Ω

На Рис. 4.2 приведена триангуляція області Ω .

Рис. 4.2. Триангуляція Ω_h області Ω

Побудуємо скінченновимірний підпростір Vh простору $H_0^1(\Omega)$ який є простором лінійних неперервних сплайнів, що визначається триангуляцією Th :

```
fespace Vh(Th,P1);
```

Визначаємо білінійну $a(u,v)$ варіаційного формулювання задачі та граничні умови. Далі пакет автоматично знаходить розв'язок скінченновимірної варіаційної задачі:

```
Vh u=u0,v,uold;
problem thermic(u,v)= int2d(Th)(u*v/dt + k*(dx(u)
* dx(v) + dy(u) * dy(v)))
+ int1d(Th,1,3)(alpha*u*v)
- int1d(Th,1,3)(alpha*ue*v)
- int2d(Th)(uold*v/dt) + on(2,4,u=u0);
ofstream ff("thermic.dat");
for(real t=0;t<T;t+=dt){
uold=u;
thermic;
ff<<u(3,0.5)<<endl;
plot(u);
}
```

На Рис. 4.3 приведена температура області Ω в залежності від збільшення параметру T .

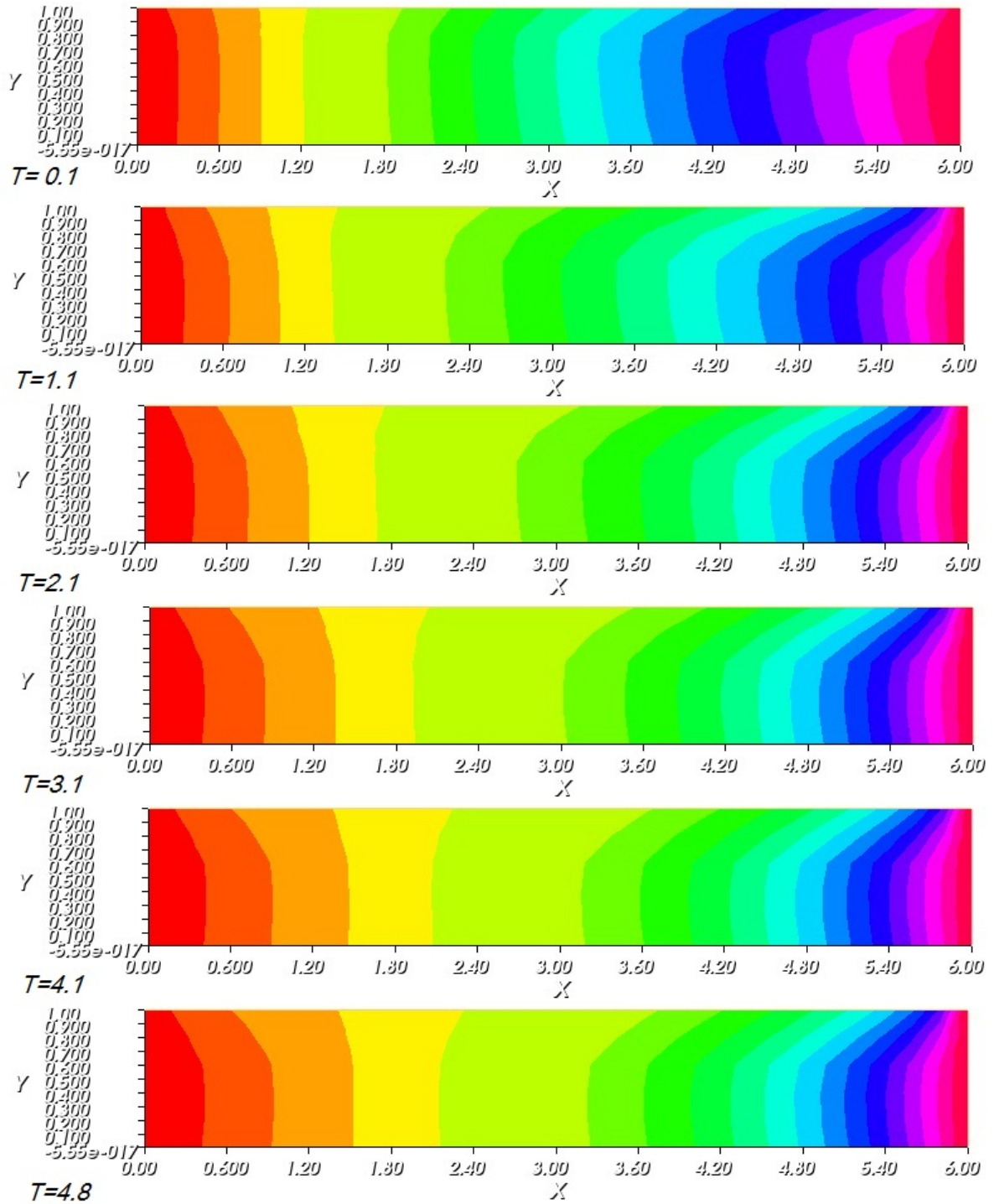


Рис. 4.3. Температура в залежності від збільшення параметру T .

На Рис. 4.4 приведено роз'язок варіаційної задачі. Температура пластини при $T = 4,9$.

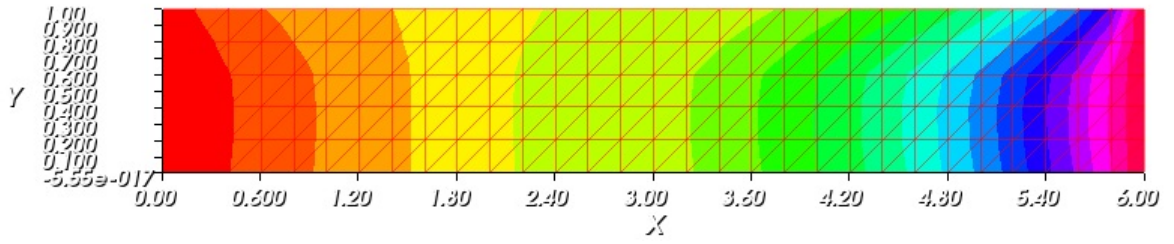


Рис. 4.4. Роз'язок варіаційної задачі. Температура пластини при $T = 4,9$.

На Рис. 4.5 приведено графік зменшення температури за часом у точці $x = 3, y = 0,5$.

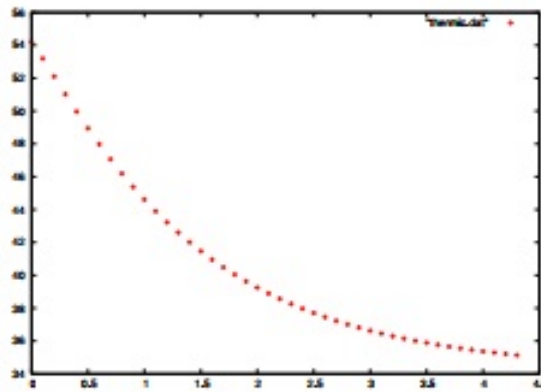


Рис. 4.5. Зменшення температури за часом у точці $x = 3, y = 0,5$.

ВИСНОВКИ

Для початково-крайової задачі теплопровідності побудовано скінченно-вимірну апроксимацію, використовуючи схему методу скінченних елементів з лінійними неперервними сплайнами. Триангуляцію області визначення розв'язку побудовано з використанням скінченних елементів, що мають форму трикутників. Скінченно-елементний розв'язок являє собою послідовність лінійних неперервних сплайнів, що визначаються побудованою триангуляцією.

Розв'язок скінченно-елементної апроксимації знайдено за допомогою пакету FreeFem++.

Проведено обчислювальний експеримент, що підтверджує збіжність та стійкість методу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вербіцький В.В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник — Одеса: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2017.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация . — М.: Мир, 1986.
3. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики.—Львів, Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004.
4. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс — Москва: Мир, 1977. — 352 с.
5. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. — б-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
7. M. Ainsworth, J. Tinsley Oden. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis. — Wiley, New York, 2000.
8. M. Asadzadeh. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations. John Wiley & Sons, Inc., 2021.
9. Brenner S. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. Brenner, L. Scott — Springer, 2008, 3ed — 400 p.
10. Hecht.F. FreeFem++ // Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris. <http://www.ljll.math.upmc.fr/hecht.exe>.
11. Sung W. Lee; Peter W. Chung. Finite Element Method for Solids and Structures: A Concise Approach. — : Cambridge University Press, 2021.
12. J. Nečas. Direct Methods in the Theory of Elliptic Problems. — Springer-Verlag, Berlin, 2012.
13. V. Thomée. Galerkin finite element methods for parabolic problems, volume 25 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006.
14. R. Verfürth. Adaptive Finite Element Methods. / R. Verfürth — Ruhr-Universität Bochum: Lecture notes. — 2011. — 129 p.

ДОДАТОК А. КОД ПРОГРАМИ

```

func u0 =10+90*x/6;
func k = 1.8*(y<0.5)+0.2;
real ue = 25, alpha=0.25, T=5, dt=0.1 ;
mesh Th=square(30,5,[6*x,y]);
fespace Vh(Th,P1);
Vh u=u0,v,uold;
problem thermic(u,v)= int2d(Th)(u*v/dt + k*(dx(u)
* dx(v) + dy(u) * dy(v)))
+ int1d(Th,1,3)(alpha*u*v)
- int1d(Th,1,3)(alpha*ue*v)
- int2d(Th)(uold*v/dt) + on(2,4,u=u0);
ofstream ff("thermic.dat");
for(real t=0;t<T;t+=dt){
uold=u;
thermic;
ff<<u(3,0.5)<<endl;
plot(u);
}
for(int i=0;i<20;i++) cout<<dy(u)(6.0*i/20.0,0.9)<<endl;

```