Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 15–21

УДК 517.5

Ан. А. Кореновский
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О ВЛОЖЕНИИ КЛАССА ГЕРИНГА В КЛАСС ГУРОВА – РЕШЕТНЯКА

Роботу виконано за фінансової підтримки
Державного фонду фундаментальних досліджень України, грант № Ф7/329-2001.

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару з теорії функцій ОНУ 20.09.2002 р.

Представлено нове доведення вкладення класу Герінга в клас Гурова – Решетняка.

Приведено новое доказательство вложения класса Геринга в класс Гурова – Решетняка.

The new proof of the embedding of the Gehring class into Gurov – Reshetnyk class is given.

При изучении различных операторов в пространствах с весом важнейшую роль играют так называемые классы весовых функций Макенхаупта. Для $1<p<\infty$ класс Макенхаупта A_p составляют неотрицательные на $\mathbb{R}^n$ (весовые) функции f, удовлетворяющие условию

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q f^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right\}^{p-1}<\infty\ , \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q\subset\mathbb{R}^n$, стороны которых параллельны координатным осям (только такие кубы рассматриваются в дальнейшем). Для чисел $0<\alpha,\beta<1$ предельный класс Макенхаупта $\mathrm{A}_\infty\equiv\mathrm{A}_\infty(\alpha,\beta)$ определяется таким условием

$$\left|\left\{x\in Q:\ f(x)>\beta\cdot f_Q\right\}\right|>\alpha|Q|\ , \tag{2}$$

где обозначено $f_Q=|Q|^{-1}\int_Q f(x)\,dx$, а (2) предполагается выполненным равномерно по всем кубам $Q\subset\mathbb{R}^n$. Впервые классы A_p были определены в работах [1,2]. В настоящее время имеется огромное количество публикаций, посвященных изучению этих классов и их приложениям.

Условие Геринга

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q f^q(x)\,dx\right\}^{1/q}\le c\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx\ , \tag{3}$$

где $1<q<\infty$, а постоянная $c>1$ не зависит от куба $Q\subset\mathbb{R}^n$, впервые было применено в [3] для изучения свойств квазиконформных отображений. Класс $\mathrm{G}_q\equiv\bigcup_{c>1}\mathrm{G}_q(c)$, где $G_q(c)$ – совокупность всех неотрицательных функций f, удовлетворяющих условию (3), впоследствии был назван классом Геринга. Классы G_q изучались многими авторами и нашли многочисленные применения в различных вопросах.

Условие Геринга (3) представляет собой “обратное неравенство Гельдера” с показателем $q>1$, равномерно выполненное по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$. Точно также и условие Макенхаупта (1) является “обратным неравенством Гельдера” с показателем $-1/(p-1)<0$. Связь между классами Макенхаупта и Геринга устанавливает

Теорема Койфмана – Феффермана ([4]). *Следующие три условия эквивалентны:*

a) функция f принадлежит классу A_p при некотором $p\in(1,\infty)$;

b) функция f принадлежит классу $A_\infty(\alpha,\beta)$ при некоторых $\alpha,\beta\in(0,1)$;

c) функция f принадлежит классу $G_q(c)$ при некоторых $q\in(1,\infty)$ и $c>1$.

В дальнейшем рядом авторов были получены другие характеризации классов Макенхаупта и Геринга, которые оказывались полезными в конкретных приложениях (см., например, [5]).

В работе Гурова [6] при изучении квазилоренцевых отображений рассматривалось такое условие на неотрицательную функцию f:

$$\Omega(f,Q) \equiv \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| f(x) - f_Q \right| dx \le \varepsilon \cdot \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\, dx \,, \tag{4}$$

где постоянная $\varepsilon\in(0,2)$ не зависит от куба $Q\subset\mathbb{R}^n$. Более детально класс $GR \equiv GR(\varepsilon)$ всех неотрицательных функций f, удовлетворяющих условию (4), был изучен в последующей работе Гурова и Решетняка [7], после чего его стали называть классом Гурова – Решетняка. Легко видеть, что неравенство (4) при $\varepsilon=2$ имеет место для любой локально суммируемой неотрицательной f, а при $\varepsilon<2$ оно, вообще говоря, неверно. Основное свойство функции из класса GR содержится в следующей теореме.

Теорема Гурова – Решетняка ([7]). *Если неотрицательная функция f удовлетворяет условию Гурова – Решетняка* (4) *при некотором достаточно малом $\varepsilon>0$, то она принадлежит также классу Геринга G_q при некотором $q>1$.*

В работе [8] было показано, что в одномерном случае при любом $\varepsilon\in(0,2)$ условие (4) влечет принадлежность функции f некоторому классу Геринга G_q, а также найдена верхняя грань таких значений q. Различные доказательства теоремы Гурова – Решетняка и ее разновидностей были получены рядом других авторов, однако при $n\ge 2$ вопрос о ее справедливости для любого $\varepsilon<2$ долгое время оставался открытым. В недавней работе Лернера, Стоколоса и автора данной статьи [9] установлено, что условие Гурова – Решетняка (4) равносильно условию (2) при любых $n\ge1$ и $\varepsilon<2$. Точнее, при всех $n\ge1$ справедливо равенство

$$\bigcup_{0<\varepsilon<2} GR(\varepsilon) = \bigcup_{0<\alpha,\beta<1} A_\infty(\alpha,\beta)\,.$$

Вместе с теоремой Койфмана – Феффермана это означает, что условие Гурова – Решетняка (4) может служить еще одним характерным свойством функций из классов

Геринга и Макенхаупта. В частности, получаем, что теорема Гурова – Решетняка обратима в том смысле, что любой класс Геринга $\mathrm{G}_q(c)$ содержится в классе Гурова – Решетняка $\mathrm{GR}(\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon<2$. Цель данной работы заключается в прямом доказательстве этого факта, не опирающемся на теорему Койфмана – Фефферманa.

Как отмечается в [10], при $q\geq 2$, $1<c<\sqrt{5}$ вложение $\mathrm{G}_q(c)\subset\mathrm{GR}\left(\sqrt{c^2-1}\right)$ мгновенно следует из такого неравенства

$$\Omega^2(f,Q)\leq\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|f(x)-f_Q\right|^2dx=$$

$$=\frac{1}{|Q|}\int_Q f^2(x)\,dx-\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx\right)^2\leq$$

$$\leq\left(c^2-1\right)\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx\right)^2. \tag{5}$$

При любых $n\geq 1$, $q>1$ и $c>1$ вложение $\mathrm{G}_q(c)\subset\mathrm{GR}(\varepsilon)$ гарантируется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть неотрицательная на* $\mathbb{R}^n$ *функция* f *удовлетворяет условию*

$$\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q f^q(x)\,dx\right\}^{1/q}\leq c\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q f^q(x)\,dx,\quad Q\subset\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

при некоторых $q>1$ и $c>1$. *Тогда найдется такое* ε, $0<\varepsilon<2$, *что справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|f(x)-f_Q\right|dx\leq\varepsilon\cdot\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\,dx,\quad Q\subset\mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный куб $Q\subset\mathbb{R}^n$ и обозначим $E=\left\{x\in Q:\ f(x)\geq f_Q\right\}$, $E^C=Q\setminus E$. Можем считать, что $f_Q>0$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}=\frac{1}{f_Q}\frac{2}{|Q|}\int_E\left(f(x)-f_Q\right)dx=2\frac{|E|}{|Q|}\frac{1}{f_Q}\frac{1}{|E|}\int_E f(x)\,dx-2\frac{|E|}{|Q|}\leq$$

$$\leq 2\frac{|E|}{|Q|}\frac{1}{f_Q}\left(\frac{1}{|E|}\int_E f^q(x)\,dx\right)^{1/q}-2\frac{|E|}{|Q|}\leq$$

$$\leq 2\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1-1/q}\frac{1}{f_Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f^q(x)\,dx\right)^{1/q}-2\frac{|E|}{|Q|}.$$

Но из условия (6) следует, что $\left(f_Q\right)^{-1}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f^q(x)\,dx\right)^{1/q}\leq c$, так что

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q} \le 2\left(c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{1-1/q} - \frac{|E|}{|Q|}\right). \tag{8}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda)=c\cdot\lambda^{1-1/q}-\lambda$, $\lambda>0$. Анализируя ее производную, легко убедиться в том, что φ возрастает на $(0,\lambda_0)$ и убывает на (λ_0,∞), где $\lambda_0=(c(q-1)/q)^q$. Заметим также, что из очевидного неравенства

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}=2\,\frac{|E^C|}{|Q|}\,\frac{1}{|E^C|}\int_{E^C}\left(1-\frac{f(x)}{f_Q}\right)dx\le 2\,\frac{|E^C|}{|Q|}$$

следует

$$\frac{|E|}{|Q|}=1-\frac{|E^C|}{|Q|}\le 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}. \tag{9}$$

Рассмотрим сначала случай

$$c<\left(\frac{q}{q-1}\right)^{(q-1)/q}. \tag{10}$$

В этом случае

$$\lambda_0<\left(\left(\frac{q}{q-1}\right)^{(q-1)/q}\frac{q-1}{q}\right)^q=\frac{q-1}{q}<1.$$

Предположим, что

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\ \ge\ 2(1-\lambda_0). \tag{11}$$

Тогда $\lambda_0\ge 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}$, а из (8) и (9), в силу монотонности функции φ на $(0,\lambda_0)$, следует

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\le 2\,\varphi\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)\le 2\,\varphi\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\right)=$$

$$=2\left(c\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\right)^{1-1/q}-\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\right)\right)=$$

$$=2\,c\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\right)^{1-1/q}-2+\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}.$$

Отсюда получаем

$$c\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\right)^{1-1/q}\ \ge\ 1,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q} \le 2\left(1-c^{-q/(q-1)}\right). \tag{12}$$

Сравнивая это неравенство с (11), находим

$$1-\lambda_0 \le 1-c^{-q/(q-1)}. \tag{13}$$

Но $\lambda_0 = \left(c(q-1)/q\right)^q$, так что (13) равносильно неравенству

$$c \ge \left(\frac{q}{q-1}\right)^{(q-1)/q},$$

которое противоречит (10). Таким образом, в случае (10) неравенство (11) выполненным быть не может и, стало быть, из (10) следует, что

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q} < 2\left(1-\lambda_0\right). \tag{14}$$

Но тогда $\lambda_0 < 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}$, а учитывая еще, что λ_0 – точка максимума функции φ, из (8) получим

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q} \le 2\,\varphi\left(\frac{|E|}{|Q|}\right) \le 2\,\varphi(\lambda_0) = 2\,\varphi\left(\left(c\,\frac{q-1}{q}\right)^q\right) =$$

$$= 2\left[c\left(\left(c\,\frac{q-1}{q}\right)^q\right)^{1-1/q} - \left(c\,\frac{q-1}{q}\right)^q\right] = 2\,c^q\,\frac{(q-1)^{q-1}}{q^q} =$$

$$= \frac{2}{q-1}\lambda_0 < \frac{2}{q-1}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}\right) = \frac{2}{q-1} - \frac{1}{q-1}\cdot\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q}.$$

Отсюда вытекает

$$\left(1+\frac{1}{q-1}\right)\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q} \le \frac{2}{q-1},$$

то есть

$$\frac{\Omega(f,Q)}{f_Q} \le \frac{2}{q}. \tag{15}$$

Заметим, что условие (10) равносильно тому, что

$$\frac{2}{q} < 2\left(1-\lambda_0\right).$$

Это неравенство означает, что оценка (15) сильнее, нежели (14).

Осталось рассмотреть случай

$$c \ge \left(\frac{q}{q-1}\right)^{(q-1)/q}. \tag{16}$$

Если мы предположим, что выполнено условие (11), то, как и выше, получим, что справедливо неравенство (12). Иначе справедливо противоположное к (11) неравенство (14), из которого следует также (15).

Заметим, что из (14) вытекает

$$1-\lambda_0 \le \frac{1}{q} \le 1-c^{-q/(q-1)}.$$

Из вышесказанного получаем, что наилучшая из трех оценок (12), (14) и (15), которую можно гарантировать при условии (16), это оценка (12).

Окончательно, полагая

$$\varepsilon\equiv\varepsilon(c,q)=\begin{cases} 2/q, & \text{если} \quad c<\left(q/(q-1)\right)^{(q-1)/q}, \\ 2\left(1-c^{-q/(q-1)}\right), & \text{если} \quad c\ge\left(q/(q-1)\right)^{(q-1)/q}, \end{cases}$$

получим (7).

Теорема доказана.

Замечание 1. Полученное при доказательстве теоремы 1 значение $\varepsilon(c,q)\to 2-0$ при $c\to\infty$ и любом фиксированном $q>1$, и это по существу. Действительно, для $b>1$ рассмотрим функцию $f_b(x)=b\cdot\chi_{(-\infty,0)}(x)+\chi_{[0,+\infty)}(x)$, $x\in\mathbb{R}$, где χ_E – характеристическая функция множества E. Несложные вычисления показывают, что $f_b\in \mathrm{GR}(\varepsilon_0)$, где минимально возможное $\varepsilon_0\equiv\varepsilon_0(b)=2\left(\sqrt{b}-1\right)/\left(\sqrt{b}+1\right)\to 2-0$, если $b\to\infty$. Кроме того, $f_b\in \mathrm{G}_q$ для любого $q>1$. Это означает, что ни при каком $\varepsilon<2$ класс Геринга G_q не содержится в классе Гурова – Решетняка $\mathrm{GR}(\varepsilon)$. Более того, приведенный пример показывает, что и $\bigcap_{q>1}\mathrm{G}_q$ не содержится в каком-либо $\mathrm{GR}(\varepsilon)$ при $\varepsilon<2$. С другой стороны, если $q>1$ и $c\to 1$, то полученное в доказательстве теоремы 1 значение $\varepsilon(c,q)=2/q$ не стремится к нулю. В этом смысле $\varepsilon(c,q)$ в теореме 1 существенно завышено. В самом деле, как следует из (5), при $q\ge 2$ во вложении $\mathrm{G}_q(c)\subset \mathrm{GR}(\varepsilon)$ при $c\to 1$ можно гарантировать $\varepsilon\to 0$.

Замечание 2. Зафиксируем $c>1$. Тогда $\varepsilon(c,q)\to 2(c-1)/c$ при $q\to\infty$. Другими словами, справедливо такое вложение

$$\bigcap_{1<q<\infty}\mathrm{G}_q(c)\subset\bigcap_{\varepsilon_1<\varepsilon<2}\mathrm{GR}(\varepsilon), \tag{17}$$

где $\varepsilon_1=2(c-1)/c>0$. Нам неизвестно наименьшее значение $\varepsilon_1(c)$, зависящее, быть может, еще и от размерности пространства n, при котором вложение (17) остается справедливым. Заметим, что (17) теряет силу, если положить $\varepsilon_1=0$. Более того, для определенной в замечании 1 функции f_b при $b=c$ получим, что $f_c\in \mathrm{G}_q(c)$ для любого $q>1$. В то же время, как отмечено в замечании 1, $f_c\notin \mathrm{GR}(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon<\varepsilon_0(c)=2\left(\sqrt{c}-1\right)/\left(\sqrt{c}+1\right)$. Таким образом, вложение (17) теряет силу, если только $\varepsilon_1<2\left(\sqrt{c}-1\right)/\left(\sqrt{c}+1\right)$ и притом, как легко видеть, в пространстве любой размерности $n\ge 1$. Итак, для наименьшего значения $\varepsilon_1(c)$, при котором (17) имеет место, справедливо такое неравенство

$$2\left(\sqrt{c}-1\right)/\left(\sqrt{c}+1\right)\le \varepsilon_1(c)\le 2(c-1)/c\ .$$

В другом предельном случае $q\to 1$ и фиксированном $c>1$ имеем $\varepsilon(c,q)\to 2-0$. Это означает, что

$$\bigcup_{1<q<\infty} \mathrm{G}_q(c)\subset \bigcup_{0<\varepsilon<2} \mathrm{GR}(\varepsilon). \tag{18}$$

Все тот же пример функции f_b , определенной в замечании 1, показывает, что справа в (18) вместо 2 нельзя записать никакое число, меньшее 2. В самом деле, нетрудно убедиться в том, что при фиксированном $b>1$ функция $f_b\in \mathrm{G}_q\left(c_{q,b}\right)$, где наименьшее возможное значение

$$c_{q,b}=\frac{(q-1)^{(q-1)/q}}{q}\,\frac{b^q-1}{(b-1)^{1/q}}\,\frac{1}{\left(b^q-b\right)^{(q-1)/q}}\to 1+0\ \text{ при } q\to 1. \tag{19}$$

Зафиксируем $c>1$, $\varepsilon_1<2$ и найдем столь большое $b>1$, что справедливо неравенство $\varepsilon_0(b)=2\left(\sqrt{b}-1\right)/\left(\sqrt{b}+1\right)>\varepsilon_1$. Тогда для полученного b , в силу (19), найдется такое $q>1$, что $c_{q,b}<c$, так что $f_b\in \bigcup\limits_{1<q<\infty} \mathrm{G}_q(c)$. Вместе с тем, очевидно, $f_b\notin \bigcup\limits_{0<\varepsilon<\varepsilon_1} \mathrm{GR}(\varepsilon)$.

Заключение. Приведенная теорема 1 проясняет связь между классами Гурова – Решетняка и Геринга. Метод доказательства этой теоремы может быть использован при исследовании связей с другими подобными классами функций.

1. **Muckenhoupt B.** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc.– 1972.– V. 165.– P. 207–226.
2. **Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. L.** Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert Transform // Trans. Amer. Math. Soc.– 1973.– V. 176.– P. 227–251.
3. **Gehring F. W.** The L^p -integrability of the partial derivatives af a quasiconformal mapping // Acta Math.– 1973.– V. 130.– P. 265–277.
4. **Coifman R. R., Fefferman Ch.** Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals // Studia Math.– 1974.– V. 51, № 3.– P. 241–250.
5. **Strömberg J. O., Torchinsky A.** Weighted Hardy Spaces // Lecture Notes in Math.– 1989.– V. 1381.– P. 1–193.
6. **Гуров Л. Г.** Об устойчивости преобразований Лоренца. Оценки для производных // Докл. АН СССР.– 1975.– Т. 220, № 2.– С. 273–276.
7. **Гуров Л. Г., Решетняк Ю. Г.** Об одном аналоге понятия функции с ограниченным средним колебанием // Сиб. матем. журн.– 1976.– Т. 42, № 3.– С. 540–546.
8. **Кореновский А. А.** О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций // Матем. сборник.– 1990.– Т. 181, № 12.– С. 1721–1727.
9. **Korenovskyy A. A., Lerner A. K., Stokolos A. M.** A note on the Gurov – Reshetnyak condition // Math. Research Letters.– 2002.– V. 9, № 5–6.– P. 579–584.
10. **Bojarski B.** Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.– 1985.– V. 10.– P. 89–94.

Получено 11.10.2002 г.