Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Диференціальні властивості функції розподілу та рівновимірної перестановки»

«Differential properties of the distribution function and equimeasurable rearrangement»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Ларіна Анастасія Денисівна

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доц. Шанін Р.В.
Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Кореновський А.О.

Рекомендовано до захисту:	Захищено на засіданні ЕК № ____________
Протокол засідання кафедри	Протокол № ___ від ____________ 2024 р.
№ ___ від ____________ 2024 р.	Оцінка ________ / ________ / ________
Завідувач кафедри	Голова ЕК
________ ________________	________ ____________________

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Вперше перестановки з'явилися у XIX столітті в роботах Й. Штайнера [14] та Х.А. Шварца [12], де вперше було досліджено симетрії множин та функцій. Однак систематичне вивчення перестановок функцій та послідовностей почалося значно пізніше в роботах Г.Х. Гарді та Д.Е. Літтлвуда кінця двадцятих років, присвячених дробовим інтегралам та максимальним функціям.

Цінність використання переставлень зумовлена їх екстремальними властивостями. Найважливішими з них є різноманітні варіаційні властивості. Дослідження змін деяких варіаційних функціоналів (довжин кривих, площ поверхонь) під дією симетрій були започатковані Й. Штайнером та Х.А. Шварцем. Ці дослідження були продовжені в книзі Г. Поля та Г. Шего [11] (для функціоналів, що залежать від градієнтів) і пізніше багатьма іншими авторами.

Мета та задачі дослідження.

Об'єктом дослідження в кваліфікаційній роботі є перестановки функцій та функції розподілу.

Предметом дослідження кваліфікаційної роботи є диференціальні властивості функції розподілу.

Метою кваліфікаційної роботи є встановлення диференціальних властивостей функцій розподілу.

Досягненню мети сприяє виконання наступних завдань:

1. Вивчення перестановок функцій та функцій розподілу;

2. Встановлення основних властивостей перестановок функці та функції розподілу;

3. Дослідження відношення функції з її перестановкою;

4. Доведення теореми Гарді–Літтлвуда;

5. Вивчення властивостей перестановки диференційовної функції;

6. Встановлення базових співвідношень;

7. Доведення інтегральних нерівностей;

Структура кваліфікаційної роботи. Кваліфікаційна робота загальним обсягом 45 сторінок складається з вступу, трьох розділів, які поділяються на підрозділи, прикладів та переліку використанної літератури, що містить 16 найменування та висновку.

РОЗДІЛ 1

ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ТА РІВНОВИМІРНИХ ПЕРЕСТАНОВОК ФУНКЦІЇ

1.1 Означення і попередні результати

Нагадаємо деякі означення та теореми, які знадобляться нам для подальшого викладення матеріалу (див., наприклад, [9]).

Означення 1.1. Нехай E — множина з простору $\mathbb{R}$. Функція f називається *необмеженою*, якщо для будь-якого скінченного додатнього числа M знайдеться така точка x множини E, щоб виконувалась нерівність $|f(x)| > M$.

Тепер нагадаємо ідеологію неперервної та монотонної функції.

Означення 1.2. Нехай $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ та функція f задана на інтервалі (a, b). Функцію f називають строго зростаючою (спадаючою) на інтервалі (a, b), якщо для будь-яких $x, y \in (a, b)$, таких, що $x < y$, виконується нерівність $f(x) < f(y)$ $\ (f(x) > f(y))$.

Означення 1.3. Нехай функція f визначена на проміжку (a, b) та $x_0 \in (a, b)$. Функцію $f(x)$ називатимемо *неперервною в точці* x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Будемо казати, що функція $f(x)$ *неперервна на множині* E, якщо вона неперервна в кожній точці x множини E.

Означення 1.4. Функція $f(x)$ називається *неперервною* справа (зліва) в точці, якщо

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right)$$

Функція $f(x)$, *неперервна* у всіх точках певної області, називається неперервною у цій області.

Визначимо поняття суттєвого супремума.

Означення 1.5. *Суттєвим супремумом* функції f на вимірній множині E називатимемо

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_E f(x) &= \inf\{a \in \mathbb{R}\colon |\{x \in E\colon f(x) > a\}| = 0\} \\ &= \sup\{a' \in \mathbb{R}\colon |\{x \in E\colon f(x) > a'\}| > 0\}, \end{aligned}$$

де для множини A через $|A|$ позначено Лебегову міру цієї множини.

Розглянемо визначення збіжної послідовності.

Означення 1.6. Послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ будемо називати *збіжною*, якщо існує таке $A \in \mathbb{R}$, що для абиякого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $N = N(\varepsilon)$, залежний від ε, починаючи з якого $(n \geq N)$ виконується

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Теорема 1.7. *Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність дійсних чисел. Якщо $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною послідовністю, то вона обмежена.*

Наведемо визначення простої та вимірної функції.

Означення 1.8. Нехай задана функція f та вимірна множина E. Будемо називати функцію f *вимірною* на множині E, якщо для абиякого дійсного c множина $\{x \in E\colon f(x) \leq c\}$ вимірна.

Означення 1.9. Функція $f\colon X \to \mathbb{R}$ називається *простою*, якщо вона приймає лише скінченну кількість різних скінченних значень. Позначимо ці значення через a_i, де $i \in \{1, \dots, N\}$ та нехай $A_i = \{x \in X\colon f(x) = a_i\}$. Тоді

$$f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{A_i},$$

де χ_A — характеристична функція множини A, така що $\chi_A(x) = 1$, якщо $x \in A$, та нуль в іншому випадку.

1.2 Функція розподілу

Означення 1.10. Позначатимемо через $M(R, \mu)$ множину усіх скалярних (дійсних або комплексних) функцій, вимірних на множині R. Під множиною $M_0(R, \mu)$ матимемо на увазі клас скінченних μ майже всюди функцій множини $M(R, \mu)$.

Для подальшого вивчення рівновимірних перестановок введемо означення функції розподілу.

Означення 1.11. Нехай функція f вимірна на множині $E \subset \mathbb{R}^d$. *Функцією розподілу* f називають наступну величину

$$\mu_f(y) = \mu\{x \in E\colon |f(x)| > y\} = |\{x \in E\colon |f(x)| > y\}|, \quad y \in [0, \infty).$$

У випадку, якщо міра $|E| = \infty$, то для будь-якого додатнього y припускатимемо, що $\mu_f(y) < \infty$.

Означення 1.12. Дві функції $f \in M_0(R, \mu)$ та $g \in M_0(S, \mu)$ називають рівновимірними, якщо для абиякого $y \geq 0$ виконується

$$\mu_f(y) = \mu_g(y). \tag{1.1}$$

1.2.1 Основні властивості функції розподілу

Встановимо властивості функцій розподілу.

Твердження 1.13. *Нехай f, g, f_n, де $n \in \mathbb{N}$, належить до $M_0(R,\mu)$ та нехай $\alpha \neq 0$. Функція розподілу μ_f є невід'ємна, спадна, неперервна зправа на $[0,\infty)$ та мають місце наступні властивості*

1. *Якщо майже всюди за мірою μ виконується $|g| \leq |f|$, то $\mu_g \leq \mu_f$;*
2. *Для $y \geq 0$ має місце $\mu_{\alpha f}(y) = \mu_f(y/|\alpha|)$;*
3. *При $y_1, y_2 \geq 0$ виконуєтьса $\mu_{f+g}(y_1+y_2) \leq \mu_f(y_1) + \mu_g(y_2)$;*
4. *Якщо майже всюди за мірою μ виконується $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$, то $\mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}$.*

Доведення. Очевидним є той факт, що функція розподілу μ_f є невід'ємною та для $0 \leq y_1 < y_2$ виконується нерівність

$$\mu_f(y_2) \leq \mu_f(y_1).$$

Тепер доведемо, що функція розподілу є неперервною зправа функцією. Позначимо $E(y) = \{x\colon |f(x)| > y\}$ для $y \geq 0$. Зафіксуємо $y_0 \geq 0$. Множини $E(y)$ розширюються зі зменшенням y та

$$E(y_0) = \bigcup_{y>y_0} E(y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(y_0 + \frac{1}{n}\right).$$

Таким чином, за теоремою по монотону збіжність, маємо

$$\mu_f\left(y_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E\left(y_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \to \mu\left(E(y_0)\right) = \mu_f(y_0),$$

що доводить неперервність зправа.

Властивості 1) та 2) випливають з визначення 1.11. Властивість 3) випливає з того, якщо $|f(x)+g(x)| > y_1+y_2$, то $|f(x)| > y_1$ або $|g(x)| > y_2$. Щоб довести 4), зафіксуємо $y \geq 0$. Побудуємо наступні множини

$$E = \{x : |f(x)| > y\}, \quad E_n = \{x : |f_n(x)| > y\},$$

для $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $E \subset \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n>m} E_n$. Отже, для абиякого $m \in \mathbb{N}$, виконуються наступні нерівності

$$\mu\left(\cap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_{m} \inf_{n>m} \mu(E_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Легко бачити, що $\cap_{n>m} E_n$ збільшується з m, тому при застосуванні теореми про монотону збіжність має місце

$$\mu(E) \leq \mu\left(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n>m} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\cap_{n>m} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

$\square$

1.3 Рівновимірні перестановки та їх властивості

1.3.1 Незростаючі та неспадні перестановки

Введемо допоміжні позначення. Наведемо наступне означення незростаючої перестановки в термінах функції розподілу.

Означення 1.14. Нехай $f \in M_0(R, \mu)$. Функцію

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \colon \mu_f(\lambda) \leq t\}, \ (t \geq 0). \tag{1.2}$$

будемо називати *незростаючою перестановкою* функції f на $[0, \infty)$. Еквівалентно незростаюча перестановка може бути визначена як

$$f^*(t) = \sup_{\substack{|e|=t, \\ e\subset E}} \inf_{x\in e} |f(x)|, \ (t \in (0, |E|]).$$

Не менш важливою є неспадна перестановка.

Означення 1.15. Нехай функція f є вимірною на множині E з простору $\mathbb{R}^d$. Неспадною перестановкою називатимемо функцію

$$f_*(t) = \inf_{\substack{|e|=t,\\ e\subset E}} \sup_{x\in e} |f(x)|, \qquad t \in (0, |E|).$$

Очевидно, коли функція f неперервна майже всюди на проміжку $(0,|E|)$, то справедливою є рівність

$$f^*(|E| - t) = f_*(t).$$

Наведемо загальне визначення рівновимірних перестановок функції.

Означення 1.16. Нехай E — вимірна множина з простору $\mathbb{R}^d$. *Незростаючою перестановкою* функції f, яка визначена на E, будемо називати таку невід'ємну, незростаючу на $(0, |E|)$ функцію, що для будь-якого додатнього y виконується

$$\mu_{f^*}(y) = |\{t \in [0, |E|] : f^*(t) > y\}| = |\{x \in E : |f(x)| > y\}| = \mu_f(y).$$

1.3.2 Основні властивості перестановок функції

Розглянемо основні властивості перестановок функції.

Твердження 1.17. *Нехай f, g, f_n, де $n \in \mathbb{N}$, належать до $M_0(R, \mu)$ та нехай $\alpha \neq 0$. Спадна престановка f^* є невід'ємною, спадною та неперервною зправа на проміжку $[0, \infty)$. Більш за те, справедливими є наступні властивості*

1. *Якщо майже всюди за мірою μ виконується $|g| \leq |f|$, то $g^* \leq f^*$;*

2. $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$;

3. *При $t_1, t_2 \geq 0$ виконується $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$;*

4. *Якщо майже всюди за мірою μ виконується $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$, то $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n^*}$;*

5. *При* $\mu_f(y) < \infty$ *маємо* $f^*(\mu_f(y)) \leq y$*;*

6. *При* $f^*(t) < \infty$ *справедливим є* $\mu_f(f^*(t)) \leq t$*;*

7. *Функція* f *та її перестановка* f^* *є рівновимірними;*

8. *Для* $p \in (0, \infty)$ *виконується рівність* $(|f|^p)^* = (f^*)^p$.

Доведення. Перестановка f^* є невід'ємною, спадною та неперервною зправа на проміжку $[0, \infty)$ в силу твердження 1.13 та того, що f^* є розподілом за визначенням 1.2. Властивості 1, 2 та 4 також випливають з твердження 1.13 та визначення спадної перестановки.

Для доведення властивостей 5 зафіксуємо $y \geq 0$ та покладемо $t = \mu_f(y)$ скінченним. Тоді з властивості 7 маємо справедливим

$$f^*(\mu_f(y)) = f^*(t) = \inf\{y' : \mu_f(y') \leq t = \mu_f(y)\} \leq y,$$

що доводить 5.

Доведемо 6. Для цього зафіксуємо $t \geq 0$ та покладемо $y = f^*(t)$ скінченним. Застосовуючи властивість 7, знайдеться така збіжна до y послідовність y_n, що $\mu_f(y_n) \leq t$. Таким чином, з неперервності зправа розподілу μ_f маємо

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu_f(y) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(y_n) \leq t.$$

Тепер перейдемо до доведення властивості 3. Припустимо, що $y = f^*(t_1)+g^*(t_2)$ є скінченною. Нехай $t = \mu_{f+g}(y)$. Тоді за нерівністю трикутника та 6 маємо справедливим

$$\begin{aligned} t = \mu\{x : |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\} &\leq \mu\{x : |f(x)| > f^*(t_1)\} \\ + \mu\{x : |g(x)| > g^*(t_2)\} &= \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Отже, з урахуванням 5 та того, що $(f+g)^*$ є спадною, справедливим маємо

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq (f+g)^*(t) = (f+g)^*(\mu_{f+g}(y)) \leq y = f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

Для абиякої функції f в M_0 знайдеться послідовність невід'ємних простих функцій f_n, де $n \in \mathbf{N}$, що збігаються до f. Легко бачити, що для будь-якого n функції f_n рівновимірні до f_n^*, тому для $y \geq 0$ маємо

$$\mu_{f_n}(y) = \mu_{f_n^*}. \tag{1.3}$$

Зауважимо, що враховуючи збіжність послідовностей f_n та f_n^* до $|f|$ та f^* відповідно, застосуємо властивість 4 до кожного розподілу в 1.3 та для $y \geq 0$ отримаємо

$$\mu_f(y) = \mu_{f^*}(y), \tag{1.4}$$

що доводить рівновимірність функції f та її перестановки f^*.

Доведемо властивість 8. Користуючись рівністю (1.4), маємо справедливим наступні рівності

$$\mu_{|f|^p}(y) = \mu_f(y^{\frac{1}{p}}) = \mu_{f^*}(y^{\frac{1}{p}}) = \mu_{(f^*)^p}(y),$$

де $y \geq 0$. $\square$

Наведемо та доведемо наступні інтегральні рівності.

Твердження 1.18. *Нехай f є функцією з M_0. Якщо $p \in (0, \infty)$, то справедливим буде*

$$\int_R |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty y^{p-1} \mu_f(y) \, dy = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt. \tag{1.5}$$

Доведення. В силу 4 з твердження 1.17, 4 з твердження 1.13 та теореми про монотонну збіжність достатньо довести 1.5 для будь-якої невід'ємної простої функції f. Нехай функція f має наступну форму

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x), \tag{1.6}$$

де множини E_j є попарно неперетинними підмножинами в R зі скінченною мірою μ та $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$. Тоді легко бачити, що для $t \geq 0$ її спадна перестановка f^* має вигляд

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t),$$

де $m_0 = 0$.

Отже, враховуючи $m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$, де $j = \overline{1,n}$, маємо

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda)\, d\lambda &= p \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{a_{j+1}}^{a_j} \lambda^{p-1}\, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} (a_j^p - a_{j+1}^p) m_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mu(E_j) = \int |f|^p\, d\mu, \end{aligned}$$

де третя рівність випливає з того, що $m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$ для $j = \overline{1,n}$. □

Розглянемо наступну властивість рівновимірних перестановок.

Теорема 1.19. *Нехай задана вимірна на множині E функція f. Тоді*

$$\inf_{\substack{|e|=t,\\ e \subset E}} \int_e |f(x)|\, dx = \int_0^t f_*(u)\, du, \tag{1.7}$$

та

$$\sup_{\substack{|e|=t,\\ e \subset E}} \int_e |f(x)|\, dx = \int_0^t f^*(u)\, du, \tag{1.8}$$

де $t \in (0, |E|]$.

Доведення. Нехай

$$e_1 = \{x \in E \colon |f(x)| > f_*(t)\}$$

для $0 < t \leqslant |E|$. Тоді $t \geqslant |e_1|$ і

$$\int_{e_1} |f(x)|\, dx = \int_0^{|e_1|} f_*(u)\, du.$$

Якщо $t > |e_1|$, то знайдеться така підмножина $e_2 \subset E$ з $|e_2| = t - |e_1|$, що для будь-яких $x \in e_2$ справедливою є рівність $f_*(t) = |f(x)|$. Покладемо $e = e_1 \cup e_2$. Тоді

$$\int_e |f(x)|\ dx = \int_0^t f_*(u)\ du.$$

Зазначимо, що в лівій частині рівності (1.7) інфінум досягається. Рівність (1.8) доводиться аналогічно. □

Також для подальшого вивчення визначимо функцію f^{**}, що визначається як максимальна функція незростаючої перестановки f^*,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds, \quad (t > 0).$$

Аналогічно для функції f, вимірній на множині $E \subset \mathbb{R}^d$, введемо визначення незростаючої рівновимірної перестановка f_d, що характеризується наступним виразом

$$f_d(t) = \sup_{\substack{|e|=t,\\ e\subset E}} \inf_{x\in e} f(x),\ \ (f \in E \subset R^d),$$

де $0 < t \leq |E|$.

Помітимо, хоча f_d незростаюча та неперервна зліва на $(0, |E|]$, вона рівновимірна до самої функції f, на відміну від перестановки f^*. Важливим є і той факт, що у випадку, коли f невід'ємна на вимірній множині E, перестановки f^* та f_d співпадають.

1.4 Нерівність Гарді–Літтлвуда

Наведемо допоміжну лему.

Лема 1.20. *Нехай g — невід'ємна проста функція, задана на (R, μ) та нехай E — довільний μ-вимірний підпростір з R. Тоді справедливим буде*

$$\int_E g\ d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s)\ ds. \tag{1.9}$$

Доведення. Нехай функція g преставлена наступним чином

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x), \tag{1.10}$$

де коефіцієнти b_k є додатніми та кожна з F_k є множиною скінченної міри, що створюють зростаючу послідовність вкладених множин $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$. Також нехай спадна перестановка f^* преставлена у вигляді

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{[0,\mu(F_k))}. \tag{1.11}$$

Таким чином мають місце наступні нерівності

$$\begin{aligned} \mu_E g\ d\mu = \sum_{j=1}^{n} b_k \mu(E \cap F_k) &\leq \sum_{k=1}^{n} b_k \min(\mu(E), \mu(F_k)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0,\mu(F_k))}(s)\ ds = \int_0^{\mu(E)} g^*(s)\ ds. \end{aligned}$$

□

Розглянемо теорему Гарді–Літтлвуда.

Теорема 1.21. *Якщо f та g належать простору $M_0 = M_0(R, \mu)$, то*

$$\int_R |fg|\ d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s)\ ds. \tag{1.12}$$

Доведення. Оскільки f^* та g^* залежать лише від абсолютних величин f та g, достатньо довести нерівність 1.12 для невід'ємних функцій f та g. Але тоді, з огляду на (4) і теорему про монотонну збіжність, не втрачається загальність, якщо припустити f та g простими. У такому випадку можна написати

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x),$$

де $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_m$ та a_j, де $j = \overline{1,m}$, є додатніми. Тоді маємо справедливим також

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t).$$

За лемою 1.20 виконуються наступні рівності

$$\int |fg| \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g \, d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s) \, ds$$
$$= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(s) g^*(s) \, ds = \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) \, ds.$$

$\square$

РОЗДІЛ 2

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ (ОДНОВИМІРНІ) ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕСТАНОВОК

2.1 Означення і попередні результати

Дамо визначення просторів C та C^1.

Означення 2.1. *Простором* $C[a,b]$ називатимемо простір усіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. Будемо казати, що $C^1[a,b]$ — це простір усіх неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Нагадаємо визначення обмеженної та монотонної функції.

Означення 2.2. Нехай E — множина з простору $\mathbb{R}$. Функція f називається *обмеженою*, якщо існує таке скінченне додатнє число M, що для кожної з точок x множини E буде виконуватися нерівність $|f(x)| \leq M$.

Означення 2.3. Нехай $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ та функція f задана на інтервалі (a, b). Функцію f називають *строго зростаючою (спадаючою)* на інтервалі (a, b), якщо для будь-яких $x, y \in (a, b)$, таких, що $x < y$, виконується нерівність $f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y))$.

Означення 2.4. Множина M метричного простору X, називається *зв'язною*, якщо при будь-якому розбиті її на дві непорожні множини, хоча б одна з них містить хоча б одну точку дотику другої.

Наведемо фундаментальну теорему числення.

Теорема 2.5. *Нехай f — неперервна дійсна функція, визначена на відрізку $[a,b]$, та нехай F — функція, визначена для усіх $x \in [a,b]$ та задана формулою*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

Тоді F рівномірно неперервна на $[a,b]$, диференційовна на інтервалі (a,b) та справедливим є

$$F'(x) = f(x)$$

для усіх (a,b).

Розглянемо визначення простору L_p.

Означення 2.6. Нехай $p \in [1, +\infty)$ та E — деяка вимірна множина простору $\mathbb{R}$. Простором $L_p(E)$ називатимемо множину усіх вимірних на множині E функцій f, таких, що виконується нерівність

$$\int_E |f(x)|^p\ dx < +\infty.$$

Нормою простору $L_p(E)$ називатимемо

$$\|f\|_{p,E} = \left(\int_E |f(x)|^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Означення 2.7. Нехай $p = +\infty$. Простором L_∞ називають множину вимірних суттєво обмеженим функцій.

Норму простору $L_\infty(E)$ визначатимемо як

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)|.$$

Нагадаємо інтегральні властивості функцій з простору L_p.

Теорема 2.8 (Нерівність Гельдера)**.** *Нехай функції $f \in L^p,\ g \in L^q$, де $1 \leq p,q$ — спряжені, тобто $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.1}$$

Означення 2.9. *Простір Соболева* — функціональний простір, що складається з функцій простору Лебега $L^p(Q)$ які мають слабкі похідні заданого порядку p.

Для області $Q \subset \mathbb{R}^n$ норма у просторі Соболєва $W_p^k(Q)$ порядку $k \geq 1$ та підсумованих зі степенем $1 \leq p < \infty$ вводиться за виразом

$$\|u\|_{W_p^k(Q)} = \left(\sum_{\alpha \leq k} \int_Q |D^\alpha u|^p \, dx \right),$$

а при $p = \infty$ справедливим є вираз

$$\|u\|_{W_\infty^k(Q)} = \sum_{\alpha \leq k} \operatorname{ess\,sup} |D^\alpha u|,$$

де α — мультиіндекс, а операція D^α є слабка похідна по мультиіндексу.

Наведемо деякі геометричні визначення.

Означення 2.10. У геометрії *гіперплощина* — це узагальнення двовимірної площини у тривимірному просторі на математичні простори довільної розмірності. Як і площина в просторі, гіперплощина є пласкою гіперповерхнею, підпростором, розмірність якого на одиницю менша, ніж розмірність навколишнього простору. Двома прикладами гіперплощин з меншою розмірністю є одновимірні лінії на площині та нульвимірні точки на прямій.

Означення 2.11. *Ортант* або гіпероктант — це аналог у n-вимірному евклідовому просторі квадранту на площині або октанта у трьох вимірах. У двовимірному просторі існує чотири ортанти (які називаються квадрантами)

Вивчимо означення симплексу.

Означення 2.12. *Симплексом* s розмірності n є множина A, яка складається з дійсних функцій f, визначених на множині A, які задовольняють умовам

$$\sum_A f(A) = 1 f(A) \geq 0. \tag{2.2}$$

Елементи A є вершинами, а функції f — точками симплекса s.

Згадаємо визначення індикатор-функції, названної на честь Леорольда Кронекера.

Означення 2.13. *Символ Кронекера* або дельта Кронекера — функція двох змінних, яка дорівнює 1, якщо значення змінних рівні, і 0 в іншому випадку. Змінні звичайно вважаються цілими.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j; \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

Зазначимо означення, використання яких ми потребуватимемо у цій главі.

Означення 2.14. *Кратністю* $n(y)$ функції f на рівні y називається кількість коренів $x_k = x_k(y)$, де $k = 1, \ldots, n(y)$ рівняння

$$y = f(x).$$

Якщо кількість коренів нескінченна, то покладемо $n(y) = \infty$.

Означення 2.15. *Множником Лагранжа* називатимемо константу (або константи), що використовується в методі множників Лагранжа; у випадку однієї константи вона представлена змінною λ.

Наведемо допоміжні теореми.

Теорема 2.16 (Теорема Фату)**.** *Нехай дано вимірний простір* (Ω, F, μ) *та множина* $X \in F$, *нехай* $\{f_n\}$ — *послідовність* $(F, \mathbf{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$-*вимірних невід'ємних функцій* $f_n : X \to [0, +\infty)$. *Визначимо функцію* f *для кожного* $x \in X$ *наступним чином*

$$f(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x).$$

Тоді функція f *є* $(F, \mathbf{B}_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$-*вимірною та виконується*

$$\int_X f \ d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \ d\mu,$$

де інтеграли можуть бути скінченними.

Теорема 2.17 (Нерівність Луміз Уітні). *Зафіксуємо розмірність $d \geq 2$ та задамо проекції*

$$\begin{aligned} \pi_j \ &: \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}, \\ \pi_j \ &: \ x = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto \hat{x}_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d). \end{aligned}$$

Нехай для кожного $1 \leq j \leq d$ справедливо

$$\begin{aligned} g_j \ &: \ \mathbb{R}^{d-1} \to [0, +\infty), \\ g_j &\in L^{d-1}\left(\mathbb{R}^{d-1}\right). \end{aligned}$$

Тоді має місце

$$\left\| \prod_{j=1}^{d} g_j \circ \pi_j \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} g_j(\pi_j(x)) \ dx \leq \prod_{j=1}^{d} \left\| g_j \right\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

2.2 Інтегральна нерівність перестановок

Теорема 2.18. *Нехай $f \in C^1[0,1]$ та $\psi(x) = \frac{|f'(x)|}{n(|f(x)|)}$. Тоді для усіх $t \in [0,1]$ виконується наступна нерівність*

$$\int_0^t (f^{*\prime})^*(u) \ du \leq \int_0^t \psi^*(u) \ du. \tag{2.3}$$

Доведення. Для майже кожного $t \in [0,1]$ має місце $|f^{*\prime}(t)| \leq \varphi'(t)$, де $\varphi(t) = \int_E \psi(x) \ dx$, $E_t = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$. З цього випливає, що для будь-якого інтервалу $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ справедливою є нерівність

$$\int_\alpha^\beta |f^{*\prime}(t)| \ dt \leq \int_{E_\beta \setminus E_\alpha} \psi(x) \ dx.$$

Введемо позначення множини

$$E_{\alpha,\beta} = \{x : f^*(\beta) < |f(x)| < f^*(\alpha)\}.$$

Легко бачити, що $|E_{\alpha,\beta}| \leq \beta - \alpha$ та

$$\int_{E_\beta \setminus E_\alpha} \psi(x)\ dx = \int_{E_{\alpha,\beta}} \psi(x)\ dx.$$

Якщо міра множини $\sigma_{f^*(\alpha)}$ є додатньою, то $n(|f(x)|) = \infty$ на множині. Покладемо $G \subset [0,1]$ у вигляді скінченного або зліченного об'єднання попарно диз'юнктивних інтервалів

$$G = \cup_k (\alpha_k, \beta_k).$$

Таким чином, маємо

$$\int_G |f^{*\prime}(t)|\ dt \leq \int_0^{|G|} \psi^*(t)\ dt$$

для абиякої відкритої множини $G \subset [0,1]$. З чого і випливає 2.3 $\square$

2.3 Базові співвідношення перестановок

Наведемо та доведемо наступну лему.

Лема 2.19. *Якщо функція $f \in C^1[0,b]$, тоді базове співвідношення*

$$\frac{1}{|f^{*\prime}|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_k)|} \tag{2.4}$$

виконується майже для всіх $x \in [0,b]$.

Доведення. Оскільки перестановка f^* є монотонною функцією, похідна $f^{*\prime}(x)$ існує майже всюди в x. Для будь-яких таких x, покладемо корені $f(x) = f^*(x)$, де n натуральне число або нескінченність. Розглянемо чотири випадки, залежно від того, чи є n скінченним або нескінченним, а також від того, чи дорівнює нулю будь-яке значення похідної.

Припустимо спочатку, що n скінченне, і що $f'(x_k) \neq 0$, де $k = \overline{1,n}$. Задаючи $y = f^*(x^*) = f(x_k)$, зауважимо, що при достатньо малому h кількість коренів

$f(x) = y + h$ також дорівнюватиме n. Позначимо ці корені через $x_k(y+h)$ так що $x_k = x_k(y)$. Оскільки перестановка є рівновимірною, то

$$|x^*(y) - x^*(y+h)| = \sum_{k=1}^{n} |x_k(y+h) - x_k(y)| \tag{2.5}$$

можна поділити на h і нехай h прямує до нуля. Тоді співвідношення (2.4) випливає одразу.

На цьому етапі припустимо, що одна або декілька $f'(x_k)$ дорівнюють нулю, зокрема, скажімо, $f'(x_l)$ та нехай $x_l(y+h)$ наближається до $x_l = x_l(y)$ з наближенням h до нуля. З (2.5) після ділення на h легко отримати,

$$\left|\frac{x^*(y) - x^*(y+h)}{h}\right| \geq \left|\frac{x_l(y+h) - x_l(y)}{h}\right| \tag{2.6}$$

$$= \left|\frac{y+h-y}{x_l(y+h) - x_l(y)}\right|^{-1} \to \frac{1}{|f'(x_l)|} = \infty. \tag{2.7}$$

коли h прямує до нуля.

Отже, ліва частина (2.6) також прямує до нескінченності, коли h наближається до нуля. Звідси випливає, що $f^{*\prime}(x^*)$ існує та має нульове значення. Отже, основне співвідношення (2.4) є справедливим у цьому сенсі: якщо права частина нескінченна, то нескінченною є і ліва частина.

Розглянемо тепер випадок, коли n нескінченно. Якщо одне або декілька значень $f'(x_k)$ дорівнюють нуль, то міркування, наведені вище для скінченного n, залишаються справедливими.

Нарешті, припустимо, що n нескінченно, та що всі $f'(x_k)$ відмінні від нуля. Оскільки $f'(x) \in C[0, b]$, то $f'(x)$ обмежена, тобто $|f'(x)| < M$. Отже, кожен доданок у сумі праворуч перевищує $\frac{1}{M}$, і ряд не є збіжним. Точніше, кожному перетину k відповідає $h_k > 0$ таке, що $x_k(y+h)$ визначено для $|h| < h_k$, тоді як за фундаментальною теоремою числення

$$h = \int f' \, dx \leq M|x_k(y+h) - x_k(y)|.$$

Таким чином, справедливою буде нерівність

$$\left|\frac{x_k(y+h)-x_k(y)}{h}\right| \geq \frac{1}{M}. \tag{2.8}$$

Тепер для довільного N виберемо h менше, ніж $h_1, \dots h_N$. Враховуючи вказану вище нерівність, має місце наступне

$$\left|\frac{x^*(y+h)-x^*(y)}{h}\right| \geq \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{x_k(y+h)-x_k(y)}{h}\right| \geq \frac{N}{M}. \tag{2.9}$$

Оскільки N можна вибирати як завгодно великим, коли h наближається до нуля, то випливає, що частка зліва прямує до нескінченності. Отож $f^{*\prime}(x^*)$ набуває нульового значення і формула справджується у цьому сенсі. Лему доведено. □

2.4 Область визначення спеціальної функції на додатному октанті

Щоб отримати нерівність для p ступеню $f^{*\prime}(x)$, виконаємо наступні кроки. За (2.4), маємо

$$|f^{*\prime}(x)|^{p-1} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|f'(x_k)|}\right)^{1-p} \leq C\sum_{k=1}^{n}|f'(x_k)|^{p-1}, \tag{2.10}$$

де $p \geq 1$ та C обирається як максимальне значення виразу

$$\left(\sum\frac{1}{|f'(x_k)|}\right)^{1-p} \cdot \frac{1}{\sum|f'(x_k)|^{p-1}}. \tag{2.11}$$

В даному випадку всі дійсні значення переставлено для похідних $f'(x_k)$, так само як і усі дійсні невід'ємні значення для $|f'(x_k)|$.

Щоб підрахувати найкраще значення для c, замінимо вираз $\frac{1}{|f'(x_k)|}$ на a_k, де $0 < a_k < \infty$, та визначимо максимум виразу

$$c(a) = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^{p-1}\sum_{k=1}^{n}a_k^{1-p}}. \tag{2.12}$$

Розглянемо інші дійсні значення p. При $p \leq 1$ можливо отримати верхню та нижню межі для інтегралів $|f^{*\prime}(x)|^p$. Оскільки ми розглядаємо функцію $c(a)$, то матимемо додатні мінімальні значення.

Введемо нові позначення. Через c_p та через C_p матимемо на увазі, відповідно, мінімальне значення (або ж інфінум) та мінінальне значення (або ж супремум) функції $c(a)$ для заданого p в невід'ємній ортанті $0 \leq a_k < \infty$.

Лема 2.20. *Екстрімалььні значення* (2.12) *в ортанті* $0 \leq a_k < \infty$ *визначаються наступним чином*

	C_p (максимум)	c_p (мінімум)
$p > 1$	$\frac{1}{n^p}$	0 (інфінум)
$p = 1$	1	1
$0 < p < 1$	1	$\frac{1}{n^p}$
$p = 0$	1	1
$p < 0$	$n^{\lvert p \rvert} = \frac{1}{n^p}$	1

Доведення. Оскільки вираз для $c(a)$ є однорідним нульового степеню (іншими словами, при будь-яких змінах незалежних змінних залежна змінна не змінюється) в a_k, де $k = \overline{1,n}$, не втрачаючи загальності, маємо справедливим

$$F = \sum_{k=1}^{n} a_k - 1 = 0. \tag{2.13}$$

Доведення зводиться до знаходження екстремума виразу $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{1-p}\right)^{-1}$, а, отже, знаходження обмеженного екстремума

$$G = \sum_{k=1}^{n} a_k^{1-p}. \tag{2.14}$$

Користуючись множником Лагранжа λ, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial a_k}(G + \lambda F) = -(p-1)\frac{1}{a_k^p} + \lambda = 0,$$

де $k = \overline{1,n}$. З цього випливає, що стаціонарною буде точка $a_k = \frac{1}{n}$. Оскільки

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial a_k \partial a_l}\right) = \left(\frac{p(p-1)}{a_k^{p+1}}\delta_{kl}\right), \qquad (2.15)$$

вище зазначенний вираз є набагато меншим за 0 при $p > 1$, $p < 0$ та набагато більшим за 0 у випадку, коли $0 < p < 1$. Легко бачити, що екстремальна точка типу зазначенного в таблиці.

Повертаючись до виразу (2.12) для $c(a)$, не складно помітити, що екстремальною буде точка $c(a) = \frac{1}{n^p}$. Зазначимо, що (2.14) зображує випадок, коли один внутрішній екструмум лежить на гіперплощині $\sum a_k = 1$. Через II позначимо частину цієї гіперплощини, що лежить на невід'ємному ортанті $0 \leq a_k < \infty$.

При $p \geq 1$ мінімальне значення повинно розташовуватися на межі b II. Це значення можно розглядати як нульове, оскільки $\sum_{k=1}^{n} a_k^{1-p}$ стає необмеженною при наближенні до b II, коли одне чи більше значень a_k прямують до нуля.

При $p = 1$, то справедливою буде $c(a) = 1$.

При $0 < p < 1$ нерівність (2.14) є оберненним, тому внутрішній екстремум $\frac{1}{n^p}$ стає мінімальним значенням. Щоб визначити максимум, дослідимо $c(a)$ на межі сімплексів спадаючої вимірності b II. Наприклад, q для a дорівнює нулеві, то помічаємо ту ж проблему при заміні n на $n - q$. На межі симплексів мінімум досягається в $\frac{1}{(n-q)^p}$. Таким чином, максимальне значення повинно досягатися у вершині такій як $(1,0,0,\ldots)$ та за спостереженням максимумом буде 1.

При $p = 0$, матиме місце $c(a) = 1$.

При $p < 0$, внутрішнім екстремальним (максимальним) значенням буде $\frac{1}{n^p}$, в той час як мінімальним значенням буде 1, що завершує доведення леми. $\square$

2.5 Одновимірні інтегральні нерівності.

Теорема 2.21. *Нехай $f^*(x)$ — рівновимірна спадна перестановка функції $f \in C^1[0, b]$, та нехай $n(y)$ — кратність f на рівні y. Тоді мають місце* *наступні нерівності для вказаних діапазонів p:*

1) для $p \geq 1$ маємо

$$\int_0^b |f^{*\prime}(x)|^p \; dx \leq \int_0^b \left| \frac{f'(x)}{n(f(x))} \right|^p \; dx, \tag{2.16}$$

2) для $0 < p \leq 1$ справедливо

$$\int_0^b \left| \frac{f'(x)}{n(f(x))} \right|^p \; dx \leq \int_0^b |f^{*\prime}(x)|^p \; dx \leq \int_0^b |f'(x)|^p \; dx, \tag{2.17}$$

3) для $p < 0$ виконується

$$\int_0^b \frac{1}{|f'(x)|^{|p|}} \; dx \leq \int_0^b \frac{1}{|f^{*\prime}(x)|^{|p|}} \; dx \leq \int \frac{n(f(x))^{|p|}}{|f'(x)|^{|p|}} \; dx, \tag{2.18}$$

Рівність виконується справа у пунктах (2.16), (2.17), *і зліва у* (2.18), *тоді і тільки тоді, коли значення $|f'(x_k)|$ не залежать від $k, k = \overline{1, n}$, майже для всіх x_k.*

Доведення. Враховуючи відношення (2.4), справедивим маємо

$$|f^{*\prime}(x)|^{p-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|f'(x_k)|} \right)^{1-p}. \tag{2.19}$$

За визначенням (2.12) маємо справедливим

$$c_p \sum_{k=1}^{n} |f'(x)|^{p-1} \leq |f^{*\prime}(x)|^{p-1} \leq C_p \sum_{k=1}^{n} |f'(x)|^{p-1}, \tag{2.20}$$

де c_p та C_p визначають минимальне та максимальне значення $c(a)$ на невід'ємному ортанті. Помножаючи на $|df^*| = |df|$ та інтегруючи за областю визначення функції f. Оскільки $y = f = f^*$ перетинає діапазон функції f в спадаючому порядку, x^* перетинає область $[0,b]$ функції f^* у зростаючому порядку та множина коренів x_k покриває область $[0,b]$ функції f один раз. Таким чином, виконується

$$\int c_p \sum_{k=1}^{n} |f'(x_k)|^{p-1} \; |df| \leq \int_0^b |f^{*\prime}(x)|^{p-1} \; |df^*| \leq \int C_p \sum_{k=1}^{n} |f'(x_k)|^{p-1} \; |df|. \tag{2.21}$$

Оскільки $|df^*| = |f^{*\prime}(x)|\ dx$, то матимуть місце наступні міркування

$$\int_0^b c_p|f'(x)|^p\ dx \le \int_0^b |f^{*\prime}(x)|^p\ dx \le \int C_p|f'(x)|^p\ dx, \tag{2.22}$$

де

$$c_p = c_p(n(f(x))), \qquad C_p = C_p(n(f(x))). \tag{2.23}$$

Замінюючи c_p та C_p їх значеннями як функцій n як в лемі 2.20 для різних діапазонів p, отримаємо зазначені в теоремі нерівності. Помітимо, що для $p \ge 1$ інфінум $c_p = 0$ не досягає аніякої нижньої границі, тоді як в двох інших випадках додатня нижня границя є досяжною.

Оскільки з доведення 2.20 випливає, що внутрішня точка екстремуму — це місце, де всі a_k рівні, то це означає, що максимальне значення C_p у випадках 1) і 3), і мінімальне значення c_k у випадку 2), досягається, коли значення всіх $f(x_k)$ рівні, де $k = \overline{1{,}n = n(j(x))}$. Тепер випливає заключне твердження теореми, і доведення завершено. $\square$

РОЗДІЛ 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ (БАГАТОВИМІРНІ) ВЛАСТИВОСТІ РІВНОВИМІРНИХ ПЕРЕСТАНОВОК

3.1 Означення і попередні результати

Нагадаємо визначення відкритих та замкнених множин.

Означення 3.1. Нехай E деяка множина простору $\mathbb{R}^n$. Точка x_0 називається *внутрішньою* точкою множини E, якщо вона міститься в множині E разом з деяким своїм околом. Множину, що складається лише з внутрішніх точок, називатимемо *відкритою*.

Означення 3.2. *Граничною* будемо називати точку $x \in E$, будь-який окіл якої містить нескінченну кількість точок даної множини E. Множина називається *замкнутою*, якщо вона містить всі свої граничні точки.

Означення 3.3. F_σ *множина* — це множина топологічного простору, яка є об'єднанням зліченної кількості замкнених множин.

Наведемо визначення ізопериметричної нерівності.

Означення 3.4. Нехай на n-вимірний простір $\mathbb{R}^n$ задано множину $S \subset \mathbb{R}^n$. *Ізопериметричною* називають наступну геометричну нерівність

$$surf(S) \geq n\ vol(S)^{\frac{n-1}{n}}\ vol(B_1)^{\frac{1}{n}}, \tag{3.1}$$

де $surf(S)$ – площа поверхні, $vol(S)$ – об'єм поверхні, $B_1 \subset \mathbb{R}^n$— одинична куля. Рівність досягається, коли $S \subset \mathbb{R}^n$ буде кулею.

Наведемо визначення абсолютно неперервної функції.

Означення 3.5. Функція f називається *абсолютно неперервною функцією* на скінченному або нескінченному відрізку, якщо для абиякого маленького $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якого скінченного набору неперетинних інтервалів (x_i, y_i) області визначення функції f, що задовольняє умові $\sum(y_i - x_i) < \delta$ виконується

$$\sum |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Розглянемо визначення функції з обмеженою зміною.
Нехай функція $f(x)$ задана на скінченному проміжку $[a; b]$ та розбиття $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$. Утворимо скінченну суму, взятих з абсолютних величин приросту функцій

$$v = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|. \tag{3.3}$$

Означення 3.6. Функція $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ має обмежену вариацію, якщо суми (3.3) в їх сукупності обмежені зверху. При цьому точну верхню границю цих сум називають повною варіацією функції на вказанному проміжку та позначають символом

$$V_a^b f(x) = \sup\{v\}.$$

3.2 Перестановка функції в m-вимірному просторі

Нехай задана функція f, що визначена на m-вимірній області D, та на декартовому m-вимірному просторі преставлено набір точок $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Побудуємо базову конструкцію для рівновимірної спадної перестановки. Позначимо область значень функції f через R. Нехай

$$\mu_f(z) = \mu\{(x_1, \ldots, x_m) \mid f(x_1, \ldots, x_m) > z\} \tag{3.4}$$

та нехай функція f^* однієї змінної x визначається через

$$f^*(x) = \mu_f^{-1}(x). \tag{3.5}$$

Тоді f^* має область значень R та область визначення $0 \leq x \leq \mu(D)$. Так виглядає одновимірна перестановка функції. Однак, це може бути застосовано і для сферично симетричної фукнція декількох змінних. Наприклад, нехай зафіксовано k змінних та перестановка функції f_k^*, що залежить від $r = (x_1^2 + \ldots + x_k^2)^{\frac{1}{2}}$, тоді

$$\mu_f = x = \omega_k k^{-1} r^k \tag{3.6}$$

та

$$d\mu_f = dx = \omega_k r^{k-1}\, dr, \tag{3.7}$$

де ω_k — область поверхні одиничної кулі в k-вимірному просторі.

3.3 Базове співвідношення в E^m

Введемо наступну лему.

Лема 3.7. *Нехай $f(x) \in C^1(D)$ та нехай f^* — одновимірна рівновимірна спадаюча перестановка функції f. Тоді*

$$\frac{1}{|f^{*\prime}(x)|} = \sum \int_{f=f^*(x)} \frac{dS}{|\nabla f|}, \tag{3.8}$$

де інтеграція та сумування у правій частині рівності пробігає по усім елементам на рівні $f = f^*$ в D.

Доведення. Оскільки f є константою на рівневій поверхні, то ∇f є паралельним до нормалі та правильною буде рівність

$$|\nabla f| = \left|\frac{df}{dn}\right|, \tag{3.9}$$

коли

$$dn = \frac{df}{|\nabla f|}. \tag{3.10}$$

Тоді маємо справедливим

$$\mu(z) = \int_{f \geq z} dV \tag{3.11}$$

звідки випливає, що

$$d\mu = \sum \int \frac{dS}{|\nabla f|} df. \tag{3.12}$$

Однак, ми маємо, що для перестановки функції в одновимірному випадку та розгляданні df^* як від'ємного

$$d\mu = dx = -\frac{df^*}{|f^{*\prime}(x)|}. \tag{3.13}$$

Оскільки $|df^*| = |df|$, вищезазначене виконується. □

3.4 Інтегральні нерівності, що містять градієнт перестановки функції

Введемо позначення простору $\overset{\circ}{W}{}^1_p(G)$, де G — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ та $1 \leq p < \infty$, як замикання множини $\overset{\circ}{C}{}^1(G)$ в просторі $W^1_p(G)$.

Теорема 3.8. *Нехай $f \in \overset{\circ}{W}{}^1_1(G)$, де G — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$. Тоді для усіх значень $t \in (0, |G|)$ виконується*

$$\int_0^t (|\nabla f_s^*|)^*(u)\ du \leq \int_0^t (|\nabla f|)^*(u)\ du, \tag{3.14}$$

де ∇f позначає градієнт вектор функції f.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Легко бачити. що існує послідовність $\{f_k\}$ неперервних функцій на $\mathbb{R}^n$ таких, що

1. f_k — кусково-лінійна функція на деякому многограннику $Q_k \subset G$ та $\sup f_k \subset Q_k$;

2. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ майже всюди на G ;

3. $\Big\| |\nabla(f_k - f)| \Big\|_{L(Q)} < \varepsilon$.

Покладемо $t \in (0, |G|)$. Нехай E — об'єднання скінченної кількості попарно неперетинних сегментів $[\alpha_1, \beta_1], \ldots,[\alpha_s, \beta_s]$ з інтервалу $(0, |G|)$ та $|E| < t$. Якщо якесь додатнє h є достатньо малим, що $|E| + sh \le t$ та сегменти $[a_j, \beta_j + h]$ є неперетинними, то, враховуючи (3.16), та третю умову, маємо

$$\int_E [f_k^*(u) - f_k^*(u+h)]u^{1-\frac{1}{n}}\, du \le \sum_{j=1}^{s} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} du \int_u^{u+h} |f_k^*(\tau)|\tau^{1-\frac{1}{n}}\, d\tau$$
$$\le h \sum_{j=1}^{s} \int_{\alpha_j}^{\beta_j + h} |f_k^*(u)| u^{1-\frac{1}{n}}\, du \le h \int_0^t |f_k^*(u)' u^{1-\frac{1}{n}}\, du$$
$$\le h\chi_n \int_0^t (|\nabla f_k|)^*(u)\, du \le h\chi_n \left(\int_0^t (|\nabla f|)^*(u)\, du + \varepsilon \right).$$

Застосовуючи 1.17 та теорему Фату, отримаємо справедливим

$$\int_E |f^{*\prime}(u)| u^{1-\frac{1}{n}}\, du \le \chi_n \left[\int_0^t (|\nabla f|)^*(u)\, du + \varepsilon \right].$$

□

Теорема 3.9. *Нехай G — відкрита множина на $\mathbb{R}^n$ та $f \in \overset{\circ}{C}{}^1(G)$. Тоді, для абиякої опуклої зростаючої на $[0, \infty)$ функції φ, такої що $\varphi(0+) = 0$, має місце нерівність*

$$\int_{G^*} \varphi(|\nabla f_s^*(x)|)\, dx \le \int_G \varphi(|\nabla f(x)|)\, dx. \tag{3.15}$$

Доведення. Неперервна на n-вимірному багатограннику Q функція f називається полігональною, якщо Q може бути поділеним на скінченне число n-симплексів з попарно диз'юнктивними внутрішностями такими, що обмеження функції f на кожному симплексі є лінійним.

Нехай f є полігональною функцією на Q. Введемо позначення $E_t := \{x \in Q : |f(x)| > f^*(t)\}$ та $\sigma_t^* := \{x \in Q : |f(x)| = f^*(t)\}$. Через A позначатимемо множину всіх значень $t \in [0, |Q|]$, для яких $|\sigma_t^*| > 0$.Тоді майже всюди на $[0, |Q|] \setminus A$ справедливою буде нерівність

$$|f^{*\prime}(t)| s(\sigma_t^*) \leq \frac{d}{dt} \left(\int_{E_t} |\nabla f(x)| \, dx \right),$$

де $s(\sigma_t^*)$ — $(n-1)$-мірна потужність σ_t^*.
Покладемо, що $f(x) = 0$ на межі ∂Q. Тоді $\partial E_t \subset \sigma_t^*$, де $t \in (0, |Q|)$. За ізопериметричною нерівністю, маємо правильними нерівності

$$|E|^{1-\frac{1}{n}} \leq \chi_n s(\partial E_t) \leq \chi_n s(\sigma_t^*).$$

Якщо $f^{*\prime}(t)$ не дорівнює нулеві, то $|E_t| = t$. Таким чином, майже всюди на $[0, |Q|]$ виконується

$$h(t) := |f^{*\prime}(t)| t^{1-\frac{1}{n}} \leq \chi_n \frac{d}{dt} \left(\int_{E_t} |\nabla f(x)| \, dx \right).$$

З цього випливає, що для всіх значень $t \in (0, |Q|)$ має місце

$$\int_0^t h^*(u) \, du \leq \chi_n \int_0^t (|\nabla f|)^*(u) \, du. \tag{3.16}$$

Враховуючи вищезазначене, за теоремою 3.8 має місце нерівність (3.15) для абиякої функції $f \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(G)$. □

Зауваження 3.10. *Поточкові нерівності типу* $(|\nabla f_s^*|)^*(t) \leq c(|\nabla f|)^*(t)$ *не справджуються для* $n \geq 2$.

Теорема 3.11. *Нехай* $f \in L^1_{p_1,\ldots,p_n}$, *де* $p_i \in [1, \infty)$ *для* $i = \overline{1,n}$ *та*

$$p := n \Big(\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} \Big)^{-1}.$$

Тоді справедливим буде

$$\left(\int_0^\infty (t^{1-\frac{1}{n}} |f^{*\prime}(t)|)^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^n \Big\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big\|_{p_i} \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.17}$$

Звідси випливає, що ця ж нерівність виконується для будь-якої такої вимірної множини E, що $|E| \leq t$. Враховуючи вищезазначене, разом з лемою 1.1 та довільністю ε, для $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G)$ маємо (3.16), *де* $h(u) = |f^{*\prime}(u)|u^{1-\frac{1}{n}}$. *Легко бачити, що* (3.16) *еквівалентно* (3.14).

Доведення. На початку доведення для $x \in \mathbf{R}^n$ покладемо

$$\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

де $i = \overline{1,n}$. Також нехай $L_{\hat{x}_i}$ є прямою лінією, що проходить через точку

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

та є перепендикулярною до гіперплощини $H_i = \{x : x_i = 0\}$.
Зафіксуємо значення $t \in (0, \infty)$ таким, щоб існувала ненульова $f^{*\prime}(t)$. Тепер нехай $E_t := \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$, з чого $|E_t| = t$. На цьому етапі доведення візьмемо $\tilde{E}_t \subset E_t$ однієї міри та виду F_σ. Позначимо через $\tilde{E}_t^{(i)}$ ортогональну проекцію множини $\tilde{E}_t$ на гіперплощині H_i. Помітимо, що множини $\tilde{E}_t^{(i)}$ є вимірними на $\mathbb{R}^{n-1}$.
Тепер позначимо через $S_i^{(i)}$ множину всіх таких $\hat{x}_i \in \tilde{E}_t^{(i)}$, що множина $\tilde{E}_t \cap L_{\hat{x}_i}$ вимірна на $\mathbb{R}$ та справедливо

$$m_1(\tilde{E}_t \cap L_{\hat{x}_i}) > 0.$$

Легко бачити, що $S_i^{(i)}$ є вимірною на $\mathbb{R}^{n-1}$. Покладемо

$$\lambda_i(t) = m_{n-1}(S_i^{(i)}).$$

Таким чином, використовуючи нерівність Луміз-Уітні, маємо

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \geq t^{n-1}. \tag{3.18}$$

Оскільки $f^*(t)$ є додатньою та неперервною, то існую такий $\delta > 0$, що $f^*(t+\delta) > 0$. Для майже всіх $\hat{x}_i$, що містяться у множині $S_i^{(i)}$, множини $E_{t+\delta} \cap L_{\hat{x}_i}$ мають скінченну, одномірну міру. Тим більш, існує множина $Q_i^{(i)} \subset S_i^{(i)}$ такої з $n-1$ вимірною мірою, що після відповідної зміни функції f на множині n-вимірної міри нуль для кожного $\hat{x}_i \in Q_i^{(i)}$ виконуються наступні властивості

1. функція $f(x)$ — локально є абсолютно неперервною на x_i;

2. міри $m_1 E_t \cap L_{\hat{x}_i}$ та $m_1 E_{t+\delta} \cap L_{\hat{x}_i} < \infty$.

Очевидно, що для кожного $\hat{x}_i \in Q_i^{(i)}$ та для абиякого h з інтервалу $(0, \delta)$ існує хоч найменш два непересічних обмежених інтервала таких, щоб на кінцевих точках цього інтервалу $|f(x)|$ приймало значення $f^*(t)$ та $f^*(t+h)$, а в їх інтервалах виконувалось

$$f^*(t+h) < |f(x)| < f^*(t).$$

Зафіксуємо $\hat{x}_i$ та введемо позначення $J_{h,\hat{x}_i}$ як об'єднання вказаних вище інтервалів. Таким чином, маємо справедливим

$$f^*(t) - f^*(t+h) \le \frac{1}{2} \int_{J_{h,\hat{x}_i}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \, dx_i.$$

Інтегруючи по $Q_i^{(i)}$ та використовуючи нерівність Гельдера (2.1), мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \lambda_i(t)[f^*(t) - f^*(t+h)] &\le \frac{1}{2} \int_{E_{t+h} \setminus E_t} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \, dx \\ &\le \frac{1}{2} h^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{E_{t+h} \setminus E_t} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^{p_i} \, dx \right)^{\frac{1}{p_i}}, \end{aligned}$$

де $|E_{t+h} \setminus E_t| \le h$. З цього маємо

$$\lambda_i(t) |f^{*\prime}(t)| \le \frac{1}{2} (\varphi_i{}'(t))^{\frac{1}{p_i}},$$

де

$$\varphi_i(t) := \int_{E_t} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^{p_i} \, dx.$$

Також, враховуючи (3.18), маємо

$$t^{n-1}|f^{*\prime}(t)| \leq \frac{1}{2^n}\prod_{i-1}^{n}({\varphi_i}'(t))^{\frac{1}{p_i}}.$$

Нехай $q_i = \frac{np_i}{p}$. Тоді

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n} = 1.$$

Таким чином, використовуючи нерівність Гельдера (2.1), виконується

$$\left(\int_0^\infty (t^{1-\frac{1}{n}}|f^{*\prime}(t)|^p\ dt)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^\infty {\varphi_i}'(t)\ dt\right)^{\frac{1}{np_i}} = \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{p_i}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

$\square$

РОЗДІЛ 4

ПРИКЛАДИ

Приклад 4.1. Буде корисним навести обчислення функції розподілу f невід'ємної простої функції. Нехай

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x), \tag{4.1}$$

множини E_k є попарно неперетинними підмножинами в R зі скінченною мірою μ та $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$. Якщо $\lambda \geq a_1$, тоді $\mu_f(\lambda) = 0$. Однак якщо $a_2 \leq \lambda < a_1$, то функція $f(x)$ перевищує λ на множині $E_1 \cup E_2$, тому $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$. В загальному, для $\lambda \geq 0$ маємо справедливим

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{[a_{k+1}, a_k)}(\lambda),$$

де

$$m_k = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i), \qquad (k = \overline{1,n})$$

та a_{n+1} дорівнює нулеві.

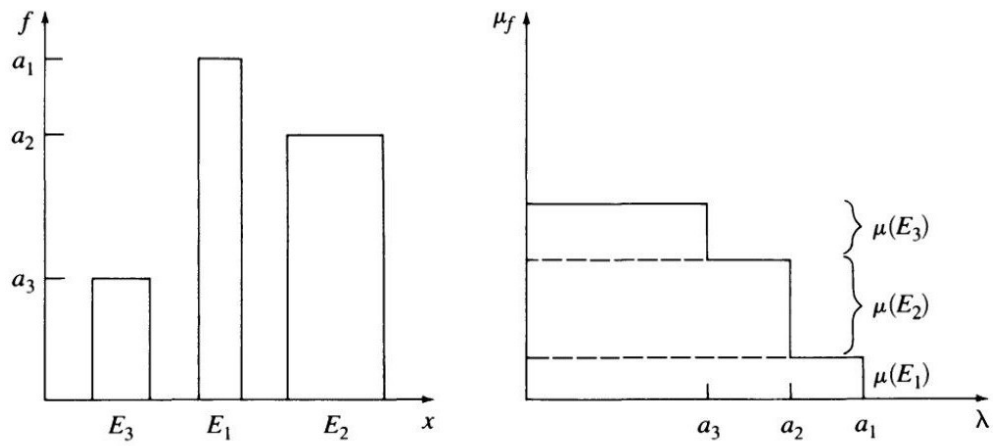

Рис. 4.1:

Приклад 4.2. Обчислимо спадну перестановку простої функції f, заданої формулою (4.1). Посилаючись на (1.14) і малюнок 4.1, бачимо, що $f^*(t) = 0$, якщо $m_3 \leq t$. Крім того, якщо $m_2 \leq t < m_3$, то $f^*(t) = a_3$, а якщо $m_1 \leq t < m_2$, то $f^*(t) = a_2$, і тому подібне. Звідси випливає, що для $t \geq 0$ виконується

$$f^*(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{[m_{k-1}, m_k)}(t), \tag{4.2}$$

де $m_0 = 0$. Геометрично, ми переставляємо вертикальні блоки на графіку функції f в порядку спадання, щоб отримати спадаючу перестановку f^* (див. 4.2); значення f^* на стрибках визначаються правою неперервністю 1.17.

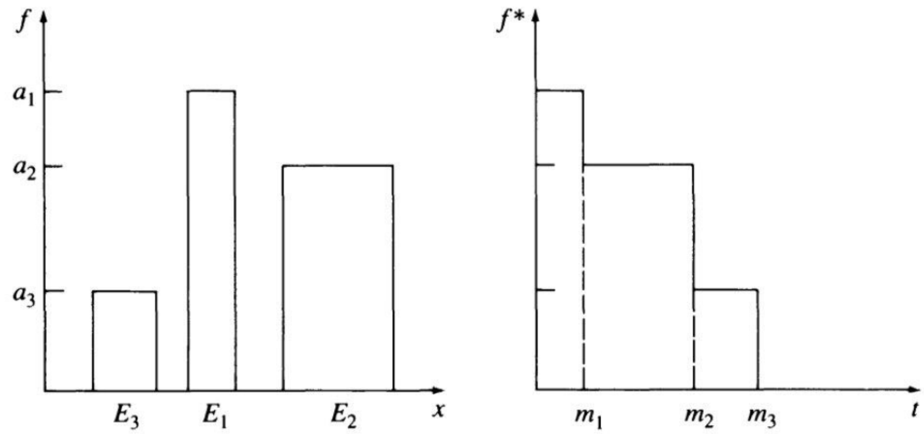

Рис. 4.2:

Іноді корисніше розбивати функції на горизонтальні блоки, ніж на вертикальні. Таким чином, просту функцію f у (4.1) можна подати також у такий спосіб:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x), \tag{4.3}$$

де коефіцієнти b_k є додатніми та кожна з F_k є множиною скінченної міри, що створюють зростаючу послідовність вкладених множин $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$. В порівнянні з (4.1) для $k = \overline{1,n}$ маємо справедливим

$$b_k = a_k - a_{k+1}$$

та

$$F_k = \cup_{j=1}^{k} E_j.$$

У цьому випадку спадна перестановка розглядається як така, що утворюється шляхом зсуву блоків у кожному горизонтальному шарі для формування одного більшого блоку, розташованого лівим кінцем проти вертикальної осі (див. Рисунок 4.2).

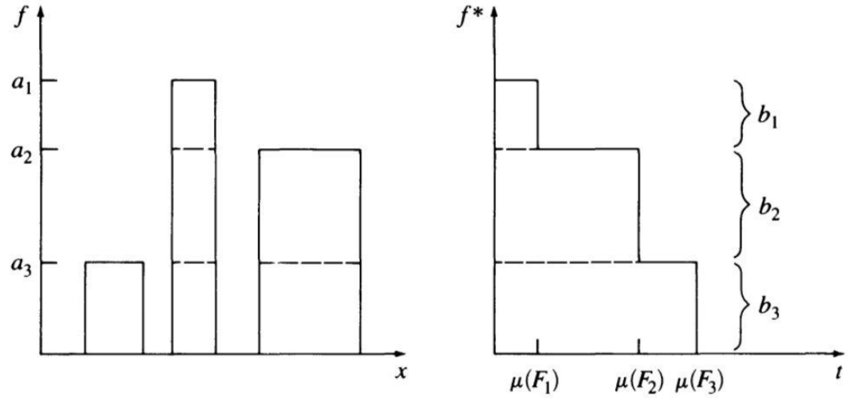

Рис. 4.3:

Таким чином, має місце

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{[0,\mu(F_k))}. \tag{4.4}$$

Розглянемо приклад експоненційної функції.

Приклад 4.3. Нехай $f(x) = 1 - e^{-x}$ при $0 < x < \infty$. Розподіл функції m_f (відносно міри Лебега m на $(0, \infty)$) є нескінченною для $0 \leq \lambda < 1$, та дорівнює нулеві для всіх $\lambda \geq 1$. Таким чином, $f^*(t) = 1$ для всіх значень $t \geq 0$ (див. малюнок 4.3). Цей приклад показує, що значна кількість інформації може бути втрачена при переході до спадної перестановки. Однак ця інформація не має значення для L^p-норм. Таким чином, L^p-норми f і f^* є нескінченними при $1 \leq p < \infty$, а L^∞-норми обидві дорівнюють 1.

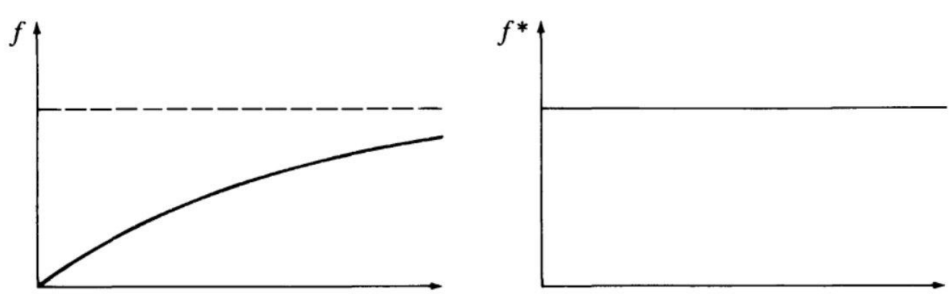

Рис. 4.4:

ВИСНОВОК

В кваліфікаційній роботі вивчалися диференцільні властивості перестановок. В цій частині роботи містяться наступні основні результати:

1. Вивчено елементарні властивості функцій розподілу та рівновимірних перестановок;
2. Встановлено елементарні властивості функцій розподілу та рівновимірних перестановок;
3. Розглянуто взаємозв'язок між функціями та рівновимірними перестановками;
4. Доведено теореми Гарді–Літтлвуда;
5. Вивчено властивості перестановки диференційовної функції;
6. Встановлено базові співвідношення.

В практичній частині роботи на основі результатів теоретичної частини отримано наступні результати:

1. Наведено обчислення функції розподілу f невід'ємної простої функції;
2. Обчислено спадну перестановку простої функції f;
3. Побудовано розполіл для функції $f(x) = 1 - e^{-x}$.

БІБЛІОҐРАФІЯ

[1] Кореновський А. О. Середні коливання, обернені нерівності та рівновимірні переставлення функцій : дис. докт. фіз.-мат. наук : 111 / Кореновський Анатолій Олександрович – Одеса, 2006. – 323 с.

[2] Bennett C. Interpolation of Operators / C. Bennett, R. Sharpley. – Orlando: Academic Press, Inc, 1988. – 443 с.

[3] Duff F. Differences, derivatives, and decreasing rearrangements / Duff. // Can. J. Math. – 1967. – №19. – С. 1153–1178.

[4] Garnett J. Bounded Analytic Functions / John Garnett. – New York, NY: Springer-Verlag, 2007. – 463 с. – (Graduate Texts in Mathematics; кн. 236).

[5] Grafakos L. Classical Fourier Analysis / Loukas Grafakos. – New York, NY: Springer-Verlag, 2014. – 638 с. – (Graduate Texts in Mathematics; кн. 3).

[6] Grafakos L. Modern Fourier Analysis / Loukas Grafakos. – New York, NY: Springer Science+Business Media, 2009. – 505 с. – (Graduate Texts in Mathematics; кн. 2).

[7] Gonchar A. Progress in Approximation Theory / A. Gonchar, E. Saff. – New York, NY: Springer-Verlag, 1992. – 462 с

[8] Hardy G. Inequalities / G. Hardy, J. Littlewood, G. Polya. – Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[9] Kolmogorov A. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis / A. Kolmogorov, S. Fomin. – New York: Dover Publications Inc., 1999. – 128 с.

[10] Korenovskii A. Mean Oscillations and Equimeasurable Rearrangement of Functions / Anatolii Korenovskii. – Heidelberg: Springer Berlin, 2007. – 189 с. – (Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana; кн. 1).

[11] Polya G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics / G. Polya, G. Szego. – Princeton, 1951.

[12] Schwarz H. Gesammelte Abhandlungen / H.A Schwarz. – Berlin: Springer, 1880.

[13] Stein E. Harmonic analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals / E. Stein, T. Murphy. – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993. – 695 с. – (Princeton Mathematical Series; кн. 43).

[14] Steiner J. Gesammelte Werke / Steiner. – Berlin: Reimer, 1882.

[15] Wheeden R. Measure and integral. An introduction to real analysis / R. Wheeden, A. Zygmund. – New York: Marcel Dekker, 1977. – 287 с. – (Pure and Applied Mathematics; кн. 1).

[16] Zygmund A. Trigonometric series / Zygmund. – New York: Cambridge University Press, 1959.