МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І. І. МЕЧНИКОВА

Н. А. Якімова

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ОДЕСА
ОНУ
2023

УДК 510.3(076)
Я453

Автор:

Н. А. Якімова, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики.

Рецензенти:

Н. О. Малаксіано, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри технічної кібернетики й інформаційних технологій ім. проф. Р. В. Меркта Одеського національного морського університету;

П. Д. Варбанець, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерної алгебри та дискретної математики ОНУ імені І. І. Мечникова.

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
ОНУ імені І. І. Мечникова.
Протокол № 3 від 15.06.2023 р.

Якімова Н. А.

Я453 Елементи теорії множин : навч.-метод. посіб. / Н. А. Якімова. – Одеса : Одес. нац. ун-т ім І. І. Мечникова, 2023. – 85 с.
ISBN 978-617-689-496-4

У пропонованому навчально-методичному посібнику розглядаються деякі основні поняття теорії множин. Весь викладений матеріал ілюструється дуже докладними прикладами, схемами та алгоритмами, що полегшує розуміння студентами як самого теоретичного матеріалу, так і його значення для обраної ними спеціальності. В даному навчально-методичному посібнику дуже докладно розглянуто розв'язання багатьох прикладів. Ці приклади складені в такий спосіб, щоб надати студентам системне уявлення про розглянуті поняття..

Навчально-методичний посібник складений для студентів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей 111 «Математика», 113 «Прикладна математика», 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології».

УДК 510.3(076)

ISBN 978-617-689-496-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сьогодення ставить перед наукою все більшу кількість задач, пов'язаних із комп'ютеризацією. Теорія множин є базовою математичною дисципліною при підготовці студентів, які обрали собі фах, що передбачає комп'ютерний напрям підготовки. Теорія множин складається з багатьох розділів, які потім знаходять своє продовження в інших розділах математики. Даний навчально-методичний посібник висвітлює декілька з них.

Перший розділ пропонованого навчально-методичного посібника присвячений елементам множин та можливим способам задання множин. Показано можливість прямого переходу між різними способами задання однієї тієї ж самої множини. В другому та третьому розділах розглянуто основні операції над множинами та їх властивості. В другому розділі акцент зроблено на графічному способі їх виконання, а в третьому – на аналітичному. Отже, докладно розглянуто застосування кругів Ейлера як при виконанні операцій над множинами, так і при доведенні теоретико-множинних тотожностей. Навички роботи з таким конструкціями дуже стають у нагоді при подальшому вивченні елементів математичної логіки, полегшуючи їх розуміння. При аналітичному спрощенні формул або доведенні тотожностей застосовуються тотожні перетворення із використанням усіх законів алгебри множин. В четвертому розділі особливу увагу приділено методу включень та вилучень, бо саме він найбільш наочно демонструє роботу основних операцій над множинами та потужностей тих множин, які отримано в результаті цих операцій. В п'ятому розділі розглянуто елементи реляційної алгебри. Особливу увагу приділено декартовому добутку множин як окремої операції, в результаті якої отримуються об'єкти іншої природи, ніж ті, що приймають участь в операції. Також показано можливість як аналітичного, так і графічного виконання операцій над множинами, елементами яких є кортежі. Безумовно, неможливо в одному курсі висвітлити всі можливі розділи та напрямки застосування теорії множин. Деякі з них вивчаються студентами як окремі дисципліни на старших курсах, тому в даному навчально-методичному посібнику їм не приділялося достатньо уваги.

В умовах дистанційного навчання, що в теперішній час стає все більш затребуваним, велике значення має візуалізація теоретичного матеріалу. Це досягається за допомогою розробки презентацій, якими супроводжується викладання як теоретичного, так і практичного матеріалу. Цей навчально-методичний посібник складений із використанням цих напрацювань, зроблених за останні роки. Тому він містить дуже багато кольорових ілюстрацій, схем і таблиць, бо саме за рахунок цього досягаються зручна візуалізація та глибше засвоєння досить незвичного для студентів першого курсу математичного матеріалу. Базовий курс математики загальноосвітньої середньої школи не передбачає вивчення подібних математичних конструкцій. А саме для студентів-першокурсників і складений пропонований посібник. Майже усі твердження, леми та теореми мають суворе математичне доведення. Застосування цих теоретичних положень проілюстровані багатьма докладними прикладами.

Глава 1. ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

1.1. МНОЖИНА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Поняття множини належить до аксіоматичних понять математики, і точне його визначення дати неможливо. Часто приймається формулювання інтуїтивного поняття множини Г. Кантора – засновника теорії множин.

Означення. *Множина* – це довільне об'єднання окремих предметів або об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, які можна розрізнити і які є єдиним цілим.

Означення. Предмети, що входять до складу множини, називаються її елементами [4].

Основна увага тут переноситься з окремих предметів на об'єднання предметів, які, у свою чергу, можна розглядати як предмети. Поняття множини відноситься до категорії найбільш загальних, основних понять математики. Тому замість суворого означення зазвичай приймається деяке основне положення про множину та її елементи: множина утворюється із елементів, яким притаманні деякі властивості і які знаходяться в деяких відношеннях між собою або з елементами інших множин [1].

Твердження, що множина складається із елементів, які можна розрізнити $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ (і лише із цих елементів), умовно записується $A=\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\}$. Приналежність елемента множині (*відношення приналежності*) позначається символом «∈», тобто $\boldsymbol{a_1}\in A$, $\boldsymbol{a_2}\in A$, …, $\boldsymbol{a_n}\in \boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\in \boldsymbol{A}$. Якщо $\boldsymbol{b}$ не є елементом A, то пишуть $\boldsymbol{b}\notin \boldsymbol{A}$ або $\boldsymbol{b}\mathrel{\bar{\in}}\boldsymbol{A}$. Якщо $\boldsymbol{a_1}\in A$, то в складі множини $\boldsymbol{A}$ цей елемент вказується лише один раз, тобто записи $A=\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\}$ і $A=\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\}$ є еквівалентними.

Для будь-яких двох предметів, що розглядаються як елементи даної множини, повинна існувати можливість з'ясувати, різні ці предмети чи однакові. З іншого боку, якщо задані деяка множина і деякий предмет, то повинна існувати можливість визначити, є цей предмет елементом даної множини чи ні. Звідси випливає, що будь-яка множина повністю визначається своїми елементами. Цю «канторівську» вимогу формулюють у вигляді аксіоми [4].

Аксіома екстенціональності (***інтуїтивний принцип об'ємності***). Дві множини $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ *рівні* (*тотожні*) $\boldsymbol{A=B}$ тоді й тільки тоді, коли кожний елемент множини $\boldsymbol{A}$ є елементом множини $\boldsymbol{B}$ і навпаки, тобто коли вони складаються з одних і тих самих елементів.

Цю аксіому можна розглядати як аналог означення тотожних множин.

Приклад 1. Розглянемо множини $A_1=\{1, 2, 3\}$, $A_2=\{1, 2, 3, 4\}$, $A_3=\{1, 2, 3\}$, $A_4=\{a, b, c\}$, $A_5=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, $A_6=\{\{1, 2, 3\}\}$ і $A_7=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Визначити, які з цих множин дорівнюють одна одній [1].

Розв'язання. Серед цих множин рівними є тільки множини $A_1=A_3$, тому що вони складаються з одних і тих самих елементів. Множина A_7 не збігається з цими множинами, як це може здаватися на перший погляд. Її елементами є не числа **1**, **2** і **3**, а одноелементні множини $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{3\}$. Тому $A_1\neq A_7$ і $A_3\neq A_7$. Множина A_2, окрім усіх елементів множин A_1 і A_3, містить ще й інші елементи. Тому $A_2\neq A_1$ і $A_2\neq A_3$. Множини A_2 і A_4 також містять різну кількість елементів, тому не можуть бути рівними, тобто $A_2\neq A_4$. Множини A_1 і A_4, хоч і складаються із однакової кількості елементів, але ці елементи не збігаються. Тому $A_1\neq A_4$. З тієї ж причини $A_3\neq A_4$. Для множин A_4 і A_5 рівність також не виконується, тобто $A_4\neq A_5$, тому що множина A_4 складається із елементів a, b і c, а множина A_5 – із елементів $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ і

$\{a, c\}$. Для множин A_1 і A_6, а також для множин A_3 і A_6 рівність також не виконується, тобто $A_1 \neq A_6$ і $A_3 \neq A_6$, тому що множини A_1 і A_3 складаються з трьох елементів (**1**, **2** і **3**), а множина A_6 – з одного елемента ($\{\mathbf{1, 2, 3}\}$). З цієї ж причини не виконується рівність між множинами A_4 і A_6, тобто $A_4 \neq A_6$. Таким чином, необхідно розрізняти сукупність елементів множини і множину, єдиним елементом якої є вся ця сукупність [4]. Усі розглянуті порівняння можна звести до підсумку, який можна подати, як відповідь до цієї задачі.

<u>Відповідь</u>.

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = A_7 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_7 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$
$$\{1, 2, 3, 4\} = A_2 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\{1, 2, 3, 4\} = A_2 \neq A_4 = \{a, b, c\}$$
$$\{a, b, c\} = A_4 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_4 = \{a, b, c\}$$
$$\{a, b, c\} = A_4 \neq A_5 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$
$$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\} = A_5 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_5 = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$
$$\{a, b, c\} = A_4 \neq \{\{1, 2, 3\}\} = A_6 \neq A_1 = \{1, 2, 3\} = A_3 \neq A_6 = \{\{1, 2, 3\}\} \neq A_4 = \{a, b, c\}$$
$$\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\} = A_5 \neq A_6 = \{\{1, 2, 3\}\}$$

<u>Означення</u>. Множина, елементами якої, у свою чергу, є також множини, називається *класом* або *сімейством* [16].

<u>Наприклад</u>, множини $A_5=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$, $A_6=\{\{1, 2, 3\}\}$ і $A_7=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ з прикладу 1 є сімействами.

<u>Рівність множин</u> має наступні *<u>властивості</u>* [7]:

- ***рефлексивність***: $A=A$;
- ***симетричність***: якщо $A=B$, то $B=A$;
- ***транзитивність***: якщо $A=B$ і $B=C$, то $A=C$.

Множина може містити будь-яку кількість елементів – скінченну або нескінченну.

<u>Означення</u>. Множина є *скінченною*, якщо містить скінченну кількість елементів.

<u>Означення</u>. Множина є *нескінченною*, якщо складається з нескінченної кількості елементів.

<u>Означення</u>. *Одинична* (*одноелементна*) множина $A=\{a\}$ містить лише один елемент. Одиничну множину іноді називають *сінглетоном* [17].

<u>Наприклад</u>, сінглетоном є множина $A_6=\{\{1, 2, 3\}\}$ із прикладу 1. Множина $A_7=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ сінглетоном не є, тому що містить три різні елементи. Однак кожний з її елементів сам по собі сінглетоном є, тому що вони є множинами, що містять по одному елементу кожна: $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{3\}$

<u>Означення</u>. *Порожня* множина $\{\ \}$ не містить жодного елемента. Порожня множина позначається спеціальним символом $\varnothing$.

Згідно з аксіомою екстенціональності, існує єдина порожня множина.

Роль порожньої множини аналогична ролі числа «**0**». Це поняття використовується для визначення заздалегідь неіснуючої сукупності елементів. Більш суттєвим мотивом введення порожньої множини є той факт, що заздалегідь не завжди відомо (або невідомо зовсім), чи існують елементи, що визначають якусь множину.

<u>Означення</u>. Кількість елементів скінченної множини A називається її *потужністю* та позначається як $|A|$ [18].

Означення. Потужності довільних множин називаються *кардинальними числами*. Кардинальні числа скінченних множин вважаються скінченними, а нескінченних множин – відповідно, нескінченними.

Як правило, кардинальні числа нескінченних множин теж називають потужністю, якщо з контексті зрозуміло, про яку саме множину йдеться.

Означення. Множини $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називаються *рівнопотужними*, якщо між їх елементами існує взаємно-однозначна відповідність [4].

Означення. Множини $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, що мають однакову потужність, тобто для яких $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, вважаються *еквівалентними* і позначаються як $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ [4, 13].

Еквівалентність множин має ті ж самі *властивості*, що й рівність множин. А саме [13]:

- ***рефлексивність***: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$;

- ***симетричність***: якщо $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

- ***транзитивність***: якщо $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

Однак, слід розрізняти поняття рівності (тотожності) і поняття еквівалентності множин. Наприклад, множини $\boldsymbol{A_1}=\{\boldsymbol{1, 2, 3}\}$, $\boldsymbol{A_3}=\{\boldsymbol{1, 2, 3}\}$, $\boldsymbol{A_4}=\{\boldsymbol{a, b, c}\}$, $\boldsymbol{A_5}=\{\{\boldsymbol{a, b}\}, \{\boldsymbol{b, c}\}, \{\boldsymbol{a, c}\}\}$, і $\boldsymbol{A_7}=\{\{\boldsymbol{1}\}, \{\boldsymbol{2}\}, \{\boldsymbol{3}\}\}$ із прикладу 1 є попарно еквівалентними, тому що містять однакову кількість елементів. Таким чином, $|\boldsymbol{A_1}|=|\boldsymbol{A_3}|=|\boldsymbol{A_4}|=|\boldsymbol{A_5}|=|\boldsymbol{A_7}|$ і, як наслідок, $\boldsymbol{A_1}\sim\boldsymbol{A_3}\sim\boldsymbol{A_4}\sim\boldsymbol{A_5}\sim\boldsymbol{A_7}$. Але, як було показане в прикладі 1, рівними серед них є лише множини $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{A_3}$, тобто $\boldsymbol{A_1}=\boldsymbol{A_3}$. Таким чином, можна стверджувати, що рівні (тотожні) множини завжди є еквівалентними. Але зворотне твердження в загальному випадку хибне, тобто не всі еквівалентні між собою множини є тотожними одна одній. Множина $\boldsymbol{A_2}=\{\boldsymbol{1, 2, 3, 4}\}$ містить чотири елементи, тобто $|\boldsymbol{A_2}|=\boldsymbol{4}$. Тому її неможна вважати еквівалентною жодній з решти розглянутих в прикладі 1 множин.

Деякі множини мають стандартні позначення [18]:

$\mathbb{N}$ - множина усіх натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ - множина усіх цілих чисел;

$\mathbb{Z}_+$ - множина усіх невід'ємних чисел;

$\mathbb{Q}$ - множина усіх раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ - множина усіх дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ - множина усіх комплексних чисел;

$\mathbb{B}=\{0, 1\}$ – булевий відрізок.

Означення. Якщо $\boldsymbol{A}\sim\mathbb{N}$, то множина $\boldsymbol{A}$ називається *зліченною* [13].

Іншими словами, зліченна множина – це така множина $\boldsymbol{A}$, всі елементи якої можуть бути перенумеровані в нескінченну послідовність $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots}$ таким чином, щоб кожний елемент отримав лише один свій порядковий номер $\boldsymbol{n}$ і кожне натуральне число $\boldsymbol{n}$ було б номером лише одного елемента множини $\boldsymbol{A}$. Потужність зліченних множин позначається як $\boldsymbol{\aleph_0}$. *Порожня множина* відноситься до *зліченних* множин.

Означення. Множина $\boldsymbol{A}$ називається *незліченною*, якщо її потужність більша за потужність множини натуральних чисел, тобто $|\boldsymbol{A}|>|\mathbb{N}|$.

Теорема 1 (***теорема Кантора***). *Формулювання*. Множина усіх дійсних чисел із інтервалу $\boldsymbol{(0, 1)}$ є незліченною.

Доведення. Доведення цієї теореми засноване на ***діагональному методі Кантора*** [22]. Як відомо, будь-якому дійсному числу із інтервалу (0, 1) можна однозначно поставити у відповідність правильний нескінченний десятковий дріб $\mathbf{0.}\boldsymbol{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$, який має нескінченно багато відмінних від нуля цифр. Якщо число – скінченний десятковий дріб, наприклад **0.745**, то йому ставиться у відповідність нескінченний десятковий дріб виду **0.74499…99…** . Припустимо, що теорема хибна, тобто множина дійсних чисел із інтервалу (0, 1) є зліченною. Тоді для елементів цієї множини повинна існувати наступна нумерація:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x_1 = 0.a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \ldots,}\\ \boldsymbol{x_2 = 0.a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \ldots,}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{x_n = 0.a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots,}\\ \cdots\cdots\cdots\end{gathered}$$

Просуваючись головною діагоналлю, тобто по елементах $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, \ldots}$, складаємо нову дріб $\boldsymbol{0.a'_{11}a'_{22} \ldots a'_{nn} \ldots}$, таку, що $\boldsymbol{a_{ii} \neq a'_{ii}}$ для будь-якого $\boldsymbol{i=1, 2, \ldots}$. Нова побудована дріб не входить до розглянутої нумерації, тому що відрізняється від будь-якого елементу $\boldsymbol{x_i}$ числом $\boldsymbol{a_{ii}}$, яке лежить на головній діагоналі. Таким чином, нумерації для усіх чисел із інтервалу (0, 1) не існує. Отже, припущення про зліченність цієї множини є хибним. Це означає, що множина чисел із інтервалу (0, 1) є незліченною. **Теорему доведено**.

Наслідок 1. Множина усіх ірраціональних чисел є незліченною.

Наслідок 2. Множина ℝ усіх дійсних чисел є незліченною.

Означення. Якщо $\boldsymbol{B=2^{\aleph_0}}$ і $\boldsymbol{A \sim B}$, то множина ***A*** називається *континуальною* або *континуумом* [13].

Континуальні множини не є зліченними, тому що $\boldsymbol{2^{\aleph_0} > \aleph_0}$.

Теорема 2 (***теорема Кантора-Бернштейна***). *Формулювання*. Для будь-яких двох множин ***A*** і ***B*** виконується точно одне з наступних трьох співвідношень: $|\boldsymbol{A}|<|\boldsymbol{B}|$, або $|\boldsymbol{A}|>|\boldsymbol{B}|$, або $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

1.2. ЗАДАННЯ МНОЖИН

Означення. Зазвичай в конкретних міркуваннях елементи усіх множин беруться із деякої однієї, достатньо великої множини ***U*** (індивідуальної для кожного конкретного випадку), яка називається *універсальною множиною* або *універсумом* [16].

Щоб задати множину, необхідно вказати, які елементи їй належать. Для цього існують різні способи:

- ***переліком елементів***: $\boldsymbol{A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$;
- ***характеристичним предикатом* (*формою від x*)**: $\boldsymbol{A=\{x: P(x)\}}$ ***або*** $\boldsymbol{A=\{x \mid P(x)\}}$;
- ***породжуючою процедурою***: $\boldsymbol{A=\{x: x=f\}}$;
- ***графічно***.

Переліком елементів можна задавати тільки скінченні множини. Але для задання нескінченних множин, і навіть у випадку скінченних множин, цей спосіб часто практично неможливо реалізувати. Нескінченні множини задаються виключно характеристичною властивістю, породжуючою процедурою або графічно [16].

Найбільш загальний спосіб задання конкретних множин полягає в описуванні елементів **характеристичним предикатом *P*(*x*) (формою від *x*)**, загальним для всіх елементів [14].

При цьому передбачається, що розглядаються лише ті множини, елементи яких є елементами універсуму $\boldsymbol{U}$.

Означення. *Характеристичний предикат* (*форма від* $\boldsymbol{x}$) – це деяке висловлювання, в якому дещо стверджується про $\boldsymbol{x}$, або деяка функція змінної $\boldsymbol{x}$. Якщо при заміні $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{a}$ висловлювання $\boldsymbol{P(a)}$ стає істинним або функція в заданій області визначення задовольняється, то $\boldsymbol{a}$ є елементом даної множини. Множина, задана за допомогою форми $\boldsymbol{P(x)}$, позначається як $\boldsymbol{A=\{x|P(x)\}}$, або $\boldsymbol{A=\{x: P(x)\}}$, причому $\boldsymbol{a\in\{x: P(x)\}}$, якщо $\boldsymbol{P(a)}$ істинне [1].

Означення. Властивість, що виражається за допомогою цього предиката, називається *характеристичною* (*визначальною*) *властивістю*.

Нехай $\boldsymbol{P(x)}$ означає деякий характеристичний предикат. Тоді заміною $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{a}$ отримуємо відповідну йому характеристичну властивість $\boldsymbol{P(a)}$. Задання множини в термінах властивостей досягається за допомогою аксіоми згортки.

Аксіома згортки (***інтуїтивний принцип абстракції***). Будь-яка властивість $\boldsymbol{P(x)}$ визначає єдину множину $\boldsymbol{A}$ за допомогою наступної умови: елементами множини $\boldsymbol{A}$ є ті й лише ті предмети $\boldsymbol{a}$, що мають властивість $\boldsymbol{P}$ [4].

Згідно з принципом абстракції, будь-яка властивість $\boldsymbol{P(x)}$ визначає єдину множину, що позначається $\boldsymbol{\{a|\ P(a)\}}$ і читається як «*множина всіх тих предметів* ***а****, для яких* ***Р(а)***». Слід зазначити, що властивість $\boldsymbol{P}$ може являти собою спосіб побудови елементів множини $\boldsymbol{\{a|\ P(a)\}}$. Нехай $\boldsymbol{A}$ – деяка множина, а $\boldsymbol{P(x)}$ має вигляд $\boldsymbol{x\neq x}$. Тоді множина $\boldsymbol{\{a\in A\ |\ P(a)\}=\{a\in A\ |\ a\neq a\}}$, очевидно, не містить елементів. Як вже зазначалося, із принципу об'ємності випливає, що може існувати лише одна множина, що не містить елементів. Це порожня множина.

Наприклад, нехай $\boldsymbol{A=\{x: x^3=8\}}$. Для цієї множини характеристичним предикатом є $\boldsymbol{P(x)}$=«$\boldsymbol{x^3=8}$» і характеристичною властивістю – $\boldsymbol{P(a)}$=«***Множина всіх таких чисел а, куб яких дорівнює восьми***». Зазвичай вже в самому означенні конкретної множини явно або неявно обмежується сукупність припустимих об'єктів.

Якщо множина виділяється із деякої множини $\boldsymbol{A}$ за допомогою форми $\boldsymbol{P(x)}$, то запис $\boldsymbol{A'=\{x: x\in A, P(x)\}}$ часто спрощується: $\boldsymbol{A'=\{x\in A: P(x)\}}$. В термінах характеристичних властивостей цей запис означає: «***множина всіх таких елементів множини А, для яких виконується властивість Р***».

Запис $\boldsymbol{A=\{f(x): P(x)\}}$ означає множину всіх таких $\boldsymbol{y=f(x)}$, для яких є $\boldsymbol{x}$, що має властивість $\boldsymbol{P(x)}$. Наприклад, $\boldsymbol{A=\{x^3: x - \text{просте число}\}}$ означає множину кубів простих чисел [3].

Слід зазначити, що такі вирази як, наприклад, «***для всіх x, y*****:** ***x+y=y+x***», «***існує таке x, що*** **3*x*+1<0**» не можуть бути характеристичними предикатами, тому що їх неможливо характеризувати як істинні або хибні для певного $\boldsymbol{x}$.

Задання множин характеристичним предикатом може призводити до протиріч. В розглянутих прикладах жодна множина не містить саму себе в якості елемента. Навіть розглянута в прикладі 1 множина $\boldsymbol{A_1=\{1, 2, 3\}}$ є елементом множини $\boldsymbol{A_6=\{\{1, 2, 3\}\}}$, а не елементом самої себе. Розглянемо тепер множину, що складається із всіх множин, що не містять саму себе в якості елемента: $\boldsymbol{B=\{A|A\notin A\}}$. Якщо множина $\boldsymbol{B}$ існує, то повинна існувати можливість отримати відповідь на питання, чи належить множина $\boldsymbol{B}$ самій собі, тобто чи є множина $\boldsymbol{B}$ елементом самої себе: $\boldsymbol{B\in B}$? Нехай відповідь на це питання буде позитивною, тобто $\boldsymbol{B\in B}$. Але тоді, згідно зі своїм характеристичним предикатом $\boldsymbol{P(B)}$=«$\boldsymbol{B\notin B}$». Нехай тепер $\boldsymbol{B\notin B}$. Тоді, згідно з все тим ж своїм характеристичним предикатом, $\boldsymbol{B\in B}$. Отримане логічне протиріччя, яке неможливо усунути, називається ***парадоксом Рассела***. Існує три способи уникнути цього парадоксу [16].

1. Обмежити характеристичні предикати, які застосовуються, виглядом $\boldsymbol{P(x)=x\in U\,|\,Q(x)}$, тобто $\boldsymbol{A=\{a\in U\,|\,Q(a)\}}$, де $\boldsymbol{U}$ – відомий, заздалегідь існуючий універсум. Для $\boldsymbol{B}$ універсум не вказаний. Отже, $\boldsymbol{B}$ множиною не є.
2. Другий спосіб використовує теорію типів. Вважається, що предмети мають тип «0», множини мають тип «1», множина множин (наприклад, множини $\boldsymbol{A_5}$ і $\boldsymbol{A_6}$ із прикладу 1) – тип «2» тощо. $\boldsymbol{B}$ тип не присвоєно. Отже, $\boldsymbol{B}$ не є множиною.
3. Характеристичну властивість $\boldsymbol{P(a)}$ задано у вигляді обчислюваної функції (алгоритма). Спосіб обчислення предиката для $\boldsymbol{A\in A}$ не задано. Отже, $\boldsymbol{B}$ не є множиною. На цьому способі заснований так званий конструктивізм – напрямок в математиці, що розглядає лише ті об’єкти, для яких відомі процедури (алгоритми) їх породження. В конструктивній математиці вилучаються із розглядання деякі поняття і методи класичної математики, що можуть привести до парадоксів.

При заданні множини **породжуючою процедурою,** як правило, задається деякий алгоритм (як правило, програмний) пошуку його елементів.

Означення. *Породжуюча процедура* – це процедура, яка, якщо вона активована, породжує деякі предмети (об’єкти), що є елементами множини, що визначається [16].

Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1,2,3,4\}}$ із прикладу 1 породжуюча процедура має вигляд: $\boldsymbol{A_2=\{a\,|}$ **for** $\boldsymbol{a}$ **from 1 to 4 yield** $\boldsymbol{a\}}$.

Графічно множини можна задавати за допомогою кругів Эйлера (або діаграм Венна) [3, 4]. На цих діаграмах множини зображуються у вигляді областей деякої площини (універсуму). Якщо множина нескінченна, то вважається, що всі її елементи знаходяться всередині деякої замкненої фігури (рис. 1*а*). Якщо множина скінченна, то її елементи позначаються точками всередині деякої замкненої фігури (рис. 1*б*). Якщо якісь елементи є спільними для декількох множин, то вони лежать всередині декількох фігур. При цьому геометрично ці фігури можуть мати як однакову форму, так і різну (рис. 1*в*). Якщо множини не мають жодного спільного елемента, то вони зображуються двома фігурами довільної форми (як однакової, так і різної), причому кожна фігура містить точки – елементи відповідної множини (рис. 1*г*) [1].

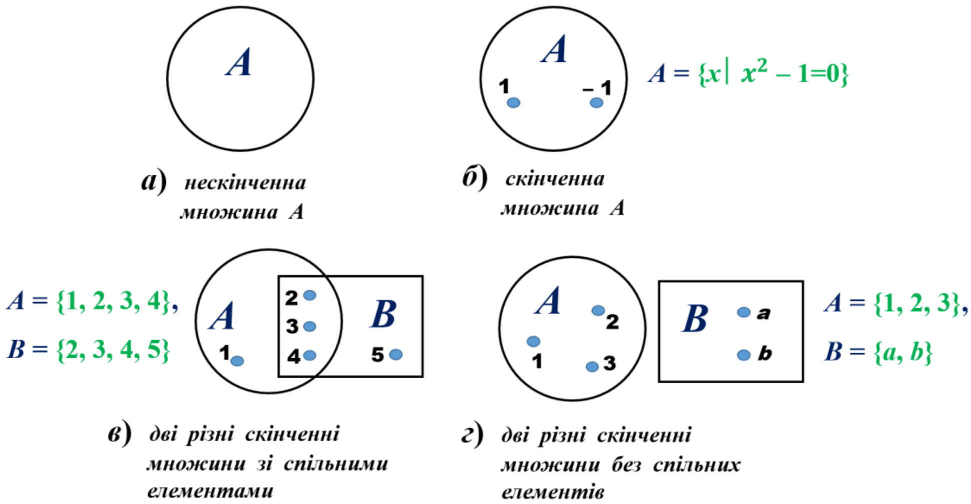


Рис. 1. – Графічне задання множин

1.3. ПІДМНОЖИНИ. ВІДНОШЕННЯ ВКЛЮЧЕННЯ

Означення. Множина ***B*** називається *підмножиною* (*частиною*) множини ***A*** тоді й тільки тоді, коли будь-який елемент множини ***B*** належить множині ***A*** [19].

Означення. Описане відношення між множиною ***A*** і множиною ***B*** називається *включенням* і позначається символом $\subset$, тобто $B\subset A$ (***B*** *включено до* ***A***) або $A\supset B$ (***A*** *включає* або *містить* ***B***).

Означення. При цьому множина ***A*** називається *надмножиною* множини ***B*** (рис. 2*а*).

Відношення *включення* множин має наступні *властивості* [3]:

- $A\subset A$ (*будь-яка множина є підмножиною самої себе*);
- ***A=B тоді й тільки тоді, коли*** $A\subset B$ ***і*** $B\subset A$;
- ***якщо*** $B\subset A$ ***і*** $C\subset B$, ***то*** $C\subset A$ (*транзитивність*).

Разом з $B\subset A$ в літературі можна зустріти й інше позначення: $B\subseteq A$. При цьому під $B\subset A$ розуміють таке відношення включення, яке не дозволяє рівності ***A=B*** (*суворе включення*) (рис. 2*а*). Якщо дозволяється ***A=B***, то пишуть $B\subseteq A$ (*несуворе включення*) (рис. 2*б*) [1].

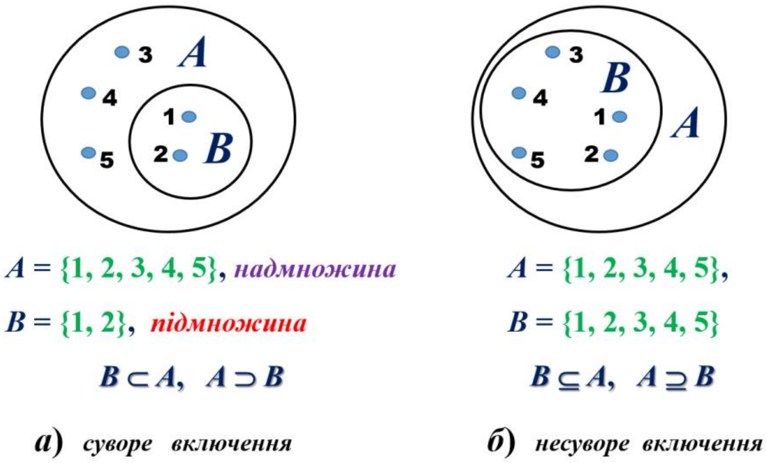


Рис. 2. – Відношення включення множин

Теорема 3. *Формулювання*. Порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої множини A [19].

Доведення. Припустимо, що включення $\varnothing \subseteq A$ не виконується. Це може трапитися лише в тому випадку, коли існує деякий елемент порожньої множини $\varnothing$, який при цьому не є елементом множини A. Але це неможливо, тому що порожня множина $\varnothing$ не містить жодного елемента. Отже, наше припущення є хибним, тобто включення $\varnothing \subseteq A$ виконується. Множину A було обрано довільно, тому порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь-якої іншої множини A. **Теорему доведено**.

Теорема 4. *Формулювання*. Будь-яка підмножина зліченної множини є або скінченною, або зліченною [13].

Доведення. Нехай A – зліченна множина і $B \subseteq A$. Якщо $B=\varnothing$, то вона є зліченною. Нехай $B \neq \varnothing$. В зв'язку з тим, що множина A є зліченною, всі її елементи перенумеровані, а сама множина A може бути поданою у вигляді нескінченної послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. В силу того, що виконується включення $B \subseteq A$, то a_{n_1} – перший елемент множини B, що є одночасно членом послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; a_{n_2} – другий елемент множини B тощо. При цьому можливі два випадки. В першому випадку після скінченної кількості кроків всі елементи множини B будуть вичерпані. Множина B при цьому буде скінченною. В другому випадку буде отримано нескінченну послідовність $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$. При цьому множина B буде зліченною. **Теорему доведено**.

Означення. Будь-яка непорожня множина A має, принаймні, дві різні підмножини: саму множину A і порожню множину $\varnothing$. Ці підмножини називаються *невласними*, а решта підмножин множини A називаються *власними*.

Скінченні власні підмножини утворюються всілякими поєднаннями по одному, два, три тощо елементів даної множини. Елементи множини самі можуть бути деякими множинами. Тут слід звернути увагу на те, що мова йде про елементи множини, а не про підмножини [1].

Означення. Множина, елементами якої є всі підмножини множини A, називають *множиною підмножин* (*множиною-ступенем* або *булеаном*) множини A і позначають через $P(A)$ [3].

Теорема 5. *Формулювання*. Булеан $P(A)$ множини $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, що складається із n елементів, у свою чергу складається із 2^n підмножин множини A, тобто $|P(A)| = 2^n$ [19].

Доведення. Очевидно, що є єдина порожня підмножина $\varnothing$ і єдина підмножина, що містить усі елементи множини A. Кількість підмножин, що містять $1, 2, \dots, n-1$ елементів, визначається кількістю поєднань по $1, 2, \dots, n-1$ із n елементів. Загальна кількість підмножин буде дорівнювати сумі цих поєднань плюс ще два. Таким чином,

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i + 2 = \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i + C_n^0 + C_n^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$$

Теорему доведено.

Наприклад, для множини $A_4=\{a, b, c\}$ із прикладу 1, що складається із трьох елементів, маємо булеан $P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, що складається із $2^3=8$ елементів.

Теорема 6. *Формулювання*. Булеан деякої зліченної множини $P(U)$ є незліченною множиною [4].

Доведення. Враховуючи, що множина $\boldsymbol{U}$ є зліченною, візьмемо $\boldsymbol{U}$=ℕ. Поставимо у відповідність кожній підмножині $\boldsymbol{N_j} \subset \mathbb{N}$ послідовність, що складається із нулів та одиниць, наступним чином: елемент $\boldsymbol{a_{ij}}$, що стоїть на i-тому місці в множині $\boldsymbol{N_j}$, дорівнює нулю, якщо $\boldsymbol{a_{ij}} \in \boldsymbol{N_j}$, і дорівнює одиниці, якщо $\boldsymbol{a_{ij}} \notin$ ℕ. Очевидно, що така відповідність буде взаємно-однозначною. Використовуючи діагональний метод Кантора, побудуємо нову послідовність $\boldsymbol{a'_{11} a'_{22} \dots a'_{nn}} \dots$, де

$$a'_{ii} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } \ \boldsymbol{a_{ii} = 0}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } \ \boldsymbol{a_{ii} \neq 0}, \end{cases} \quad \boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n, \dots} \ .$$

Очевидно, що така послідовність не збігається з жодною послідовністю для множини $\boldsymbol{N_j}$ і відповідає деякій підмножині $N' \subset \mathbb{N}$, яка не збігається з жодною множиною $\boldsymbol{N_j}$, $\boldsymbol{i=1, 2, \dots, n, \dots}$. Отже, елементи множини $\boldsymbol{P(U)}$ неможливо перенумерувати. Таким чином, множина $\boldsymbol{P(U)}$ є незліченною. **Теорему доведено**.

Наслідок. *Формулювання*. Для будь-якої множини $\boldsymbol{A}$ виконується нерівність $|\boldsymbol{P(A)}| > |\boldsymbol{A}|$ [23].

Доведення. Очевидно, що для будь-якої кількості елементів $\boldsymbol{n}$ виконується нерівність $\boldsymbol{2^n > n}$. Як випливає із доведеної теореми, ця нерівність зберігається навіть для нескінченних множин. Для порожньої множини $\boldsymbol{n=0}$. Але нульовий ступінь будь-якого числа дорівнює одиниці, в тому числі й $\mathbf{2^0 = 1 > 0}$. **Наслідок доведено**.

Слід підкреслити розбіжності між відношенням приналежності і відношенням включення. Множина $\boldsymbol{A}$ може бути своєю підмножиною ($\boldsymbol{A \subset A}$), але вона не може входити до складу своїх елементів ($\boldsymbol{A \notin A}$). Навіть у випадку одноелементних підмножин слід розрізняти множину $\boldsymbol{A=\{a\}}$ та її єдиний елемент $\boldsymbol{a}$. Відношення включення має властивість транзитивності (якщо $\boldsymbol{A \subset B}$ і $\boldsymbol{B \subset C}$, то $\boldsymbol{A \subset C}$). Відношення приналежності цією властивістю не володіє. Наприклад, множина $\boldsymbol{A=\{1, \{2, 3\}, 4\}}$ серед своїх елементів містить множину $\mathbf{\{2, 3\}}$, тому можна записати $\mathbf{2, 3 \in \{2, 3\}}$ і $\boldsymbol{\{2, 3\} \in A}$. Але з цього зовсім не випливає, що елементи **2** і **3** містяться в $\boldsymbol{A}$ (в цьому прикладі немає елементів **2** і **3** серед елементів множини $\boldsymbol{A}$, тобто $\boldsymbol{2,3 \notin A}$) [1].

1.4. ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ ГРАНИЦІ МНОЖИНИ

Маючи справу з множиною дійсних чисел, можна порівнювати елементи цієї множини за їх значенням і, зокрема, знаходити найбільший та найменший елементи множини. Для скінченних множин, що задані переліком своїх елементів, ця задача не є важкою. Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1 маємо $\mathbf{max}(\boldsymbol{A})\mathbf{=4}$, $\mathbf{min}(\boldsymbol{A})\mathbf{=1}$. Однак якщо множину задано характеристичним предикатом $\boldsymbol{P(x)}$, наприклад, вказане лише правило обчислення числових значень її елементів, то задача визначення найбільшого та найменшого її елементів значно ускладнюється. Більш легкою задачею є задача знаходження області, всередині якої лежать всі елементи множини. При розв’язанні цієї задачі дуже корисними стають поняття верхньої та нижньої границь множини [7].

Означення. *Верхньою границею* множини $\boldsymbol{A}$ є число $\boldsymbol{S}$ таке, що для будь-якого $\boldsymbol{a \in A}$ виконується нерівність $\boldsymbol{a < S}$.

Чисел, що можуть бути розглянуті в якості верхньої границі множини, може бути нескінченно багато, а може й не бути зовсім [13]. Множина всіх цілих чисел взагалі не має ані нижньої, ані верхньої границі.

Означення. *Точною верхньою границею* (*точною верхньою гранню*) або *супремумом* множини $\boldsymbol{A}$, що позначається як $\mathbf{sup}\,\boldsymbol{A}$, називається така верхня границя, що не перевищує будь-яку іншу верхню границю.

Множина може мати тільки один супремум $\boldsymbol{S}$, тому що якщо $\boldsymbol{S_1}$ і $\boldsymbol{S_2}$ – два супремуми однієї й тієї ж самої множини, то за означенням супремуму $\boldsymbol{S_1}<\boldsymbol{S_2}$ і $\boldsymbol{S_2}<\boldsymbol{S_1}$ і, як наслідок, $\boldsymbol{S_1}=\boldsymbol{S_2}$.

Означення. *Нижньою границею* множини $\boldsymbol{A}$ є число $\boldsymbol{I}$ таке, що для будь-якого $\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A}$ виконується нерівність $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{I}$.

Означення. *Точною нижньою границею* (*точною нижньою гранню*) або *інфінумом* множини $\boldsymbol{A}$, що позначається як $\mathbf{inf}\,\boldsymbol{A}$, називається така нижня границя, яка не менша за будь-яку іншу нижню границю цієї множини.

Множина може мати лише єдиний інфінум $\boldsymbol{I}$, тому що якщо $\boldsymbol{I_1}$ і $\boldsymbol{I_2}$ – два інфінуми однієї й тієї ж самої множини, то за означенням інфінуму $\boldsymbol{I_1}>\boldsymbol{I_2}$ і $\boldsymbol{I_2}>\boldsymbol{I_1}$ і, як наслідок, $\boldsymbol{I_1}=\boldsymbol{I_2}$.

Означення. Точка $\boldsymbol{P}$ називається *межевою точкою* нескінченної множини $\boldsymbol{A}$, якщо в будь-якій околиці точки $\boldsymbol{P}$ є, принаймні, ще одна точка множини $\boldsymbol{A}$, окрім точки $\boldsymbol{P}$.

Очевидно, що будь-яка околиця межевої точки містить нескінченну кількість точок множини $\boldsymbol{A}$. Сама ж межева точка може як належати, так і не належати множині $\boldsymbol{A}$ [20].

Означення. Множина називається *замкненою*, якщо вона містить усі свої межеві точки [21].

Якщо множина не має жодної межевої точки, то вона вважається замкненою. Наприклад, нескінченна множина $\boldsymbol{A}=\{\mathbf{0},\, \boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}=\mathbf{1}/\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{i}=\mathbf{1},\, \mathbf{2},\, \ldots\}$ є замкненою, тому що вона має єдину межеву точку $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, яка є елементом цієї ж множини $\boldsymbol{A}$. Для всіх множин, зображених на рис. 3, їхні точні верхні та точні нижні границі, якщо вони існують, є їх межевими точками.

Означення. *Ізольованою точкою множини* називається така її точка, для якої існує околиця, яка не містить інших точок із цієї множини, окрім неї самої [20].

Окрім своїх межевих точок, замкнена множина може також містити ізольовані точки. Очевидно, що будь-яка скінченна множина точок є замкненою, тому що жоден її елемент не є її межевою точкою.

Означення. Множина називається *відкритою*, якщо кожна її точка є для неї внутрішньою.

Очевидно, що якщо замкнена множина є обмеженою зверху, то вона містить свою верхню границю. Також є очевидним, що якщо замкнена множина є обмеженою знизу, то вона містить свою нижню границю.

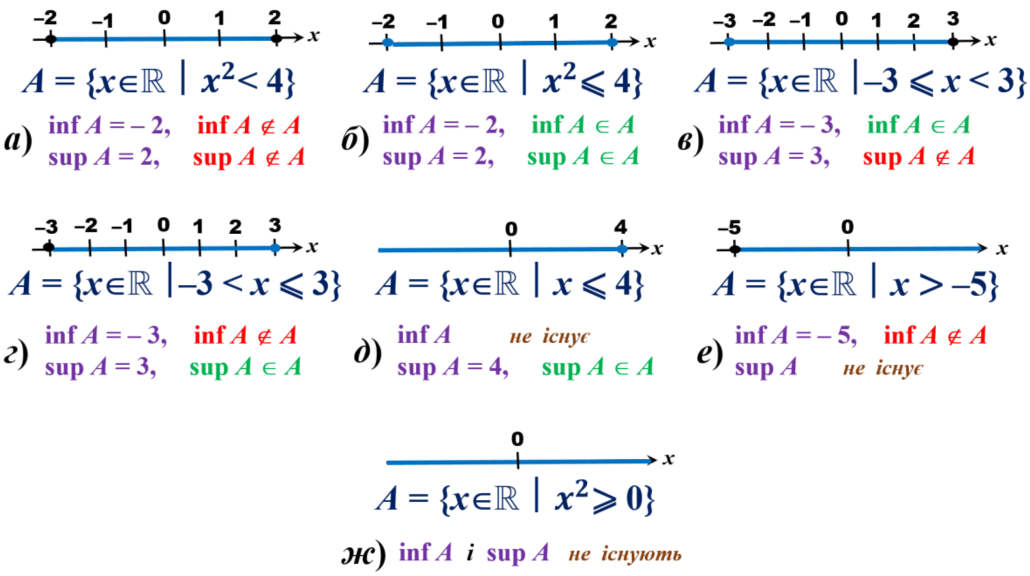


Рис. 3. – Точні верхні та нижні границі множин

Множини, подані на рис. 3*а*, рис. 3*в*, рис. 3*г* і рис. 3*е* є відкритими. Це видно з того, що множина на рис. 3*а* не містить жодну свою точну границю; множина на рис. 3*в* не містить свій супремум; множини на рис. 3*г* і рис. 3*е* не містять свої інфінуми. Множини на рис. 3*б*, рис. 3*д* і рис. 3*ж* є замкненими, тому що містять всі свої межеві точки, в тому числі й точні границі, якщо вони існують [1].

Теорема 7 (***про верхню та нижню границі підмножини***). *Формулювання*. Якщо $\boldsymbol{B \subseteq A}$, то $\mathbf{inf}\ \boldsymbol{B} \geqslant \mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$, $\mathbf{sup}\ \boldsymbol{B} \leqslant \mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$ [13].

Доведення. Позначимо через $\boldsymbol{b'}$ елемент множини $\boldsymbol{B}$, що має найменше значення, тобто $\boldsymbol{b'} \in \boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{b'}=\mathbf{inf}\ \boldsymbol{B}$. Але $\boldsymbol{B \subseteq A}$, тобто $\boldsymbol{b'} \in \boldsymbol{A}$. Нехай $\boldsymbol{a'}$ – елемент множини $\boldsymbol{A}$, що має найменше значення, тобто $\boldsymbol{a'} \in \boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{a'}=\mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$. При цьому якщо $\boldsymbol{b'}=\boldsymbol{a'}$, то $\boldsymbol{b'}=\mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$. Якщо ж $\boldsymbol{b'} \neq \boldsymbol{a'}$, то $\boldsymbol{b'}>\boldsymbol{a'}=\mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$. Таким чином, $\boldsymbol{b'}>\mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$ або $\mathbf{inf}\ \boldsymbol{B}>\mathbf{inf}\ \boldsymbol{A}$.

Позначимо через $\boldsymbol{b''}$ елемент множини $\boldsymbol{B}$, що має найбільше значення, тобто $\boldsymbol{b''} \in \boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{b''}=\mathbf{sup}\ \boldsymbol{B}$. Але $\boldsymbol{B \subseteq A}$, тобто $\boldsymbol{b''} \in \boldsymbol{A}$. Нехай $\boldsymbol{a''}$ – елемент множини $\boldsymbol{A}$, що має найбільше значення, тобто $\boldsymbol{a''} \in \boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{a''}=\mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$. При цьому якщо $\boldsymbol{b''}=\boldsymbol{a''}$, то $\boldsymbol{b''}=\mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$. Якщо ж $\boldsymbol{b''} \neq \boldsymbol{a''}$, то $\boldsymbol{b''}<\boldsymbol{a''}=\mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$. Таким чином, $\boldsymbol{b'}<\mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$ або $\mathbf{sup}\ \boldsymbol{B}<\mathbf{sup}\ \boldsymbol{A}$.

Теорему доведено.

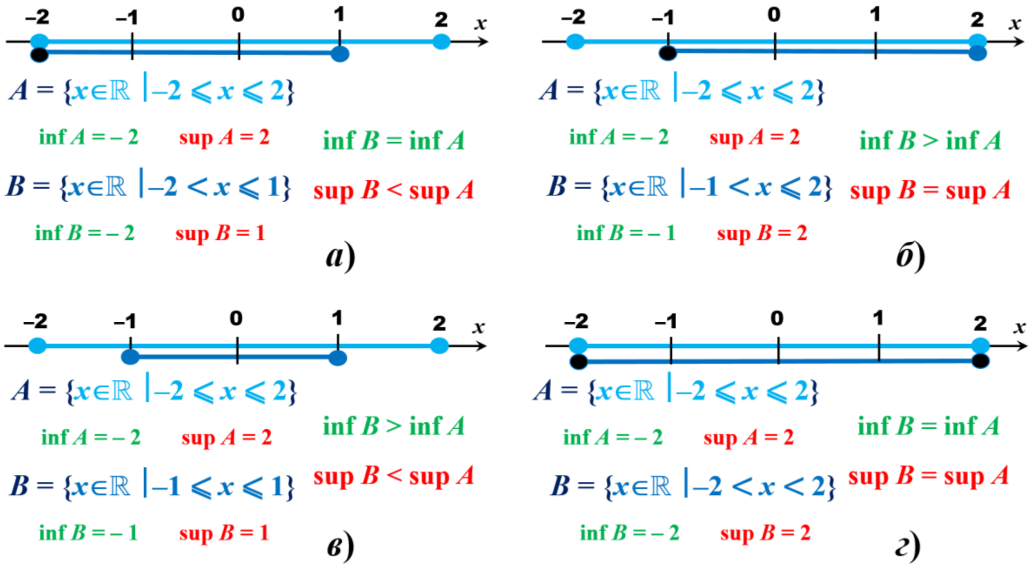


Рис. 4. – Співвідношення для точних границь множини та підмножини

Результати, отримані в теоремі 7, показано на рис. 4. Якщо $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{A}$, то хоча б одна точна границя для множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ може бути різною. Це може бути супремум (рис. 4*а*), інфінум (рис. 4*б*) або обидві точні границі одночасно (рис. 4*в*). Якщо ж $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, то у цих множин обов'язково будуть збігатися обидві точні границі. Особливу увагу треба приділити ситуації, зображеній на рис. 4*г*. В цьому випадку множини $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ відрізняються лише двома елементами – своїми границями: множина $\boldsymbol{A}$ їх містить, а множина $\boldsymbol{B}$ – ні. Тобто в цьому випадку $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{A}$, але в цих множин збігаються обидві точні границі.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

№ 1. *Множину задано переліком елементів*: $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$.

а) ***Виписати булеан цієї множини.***

Розв'язання. Ця множина складається із п'яти елементів. Для зручності будемо виписувати всі підмножини в порядку збільшення кількості їх елементів, тобто спочатку порожню підмножину, потім такі, що містять по одному елементу, потім по два елементи тощо. В останню чергу запишемо підмножину із всіх п'яти елементів, тобто саму множину $\boldsymbol{A}$, яка разом із порожньою множиною є другою своєю невласною підмножиною.

$$P(A) = \{\overset{A_1}{\varnothing},$$

по 1 елементу $\overset{A_2}{\{1\}}, \overset{A_3}{\{2\}}, \overset{A_4}{\{4\}}, \overset{A_5}{\{5\}}, \overset{A_6}{\{7\}},$

по 2 елементи $\overset{A_7}{\{1,2\}}, \overset{A_8}{\{1,4\}}, \overset{A_9}{\{1,5\}}, \overset{A_{10}}{\{1,7\}}, \overset{A_{11}}{\{2,4\}}, \overset{A_{12}}{\{2,5\}}, \overset{A_{13}}{\{2,7\}}, \overset{A_{14}}{\{4,5\}}, \overset{A_{15}}{\{4,7\}}, \overset{A_{16}}{\{5,7\}},$

по 3 елементи $\overset{A_{17}}{\{1,2,4\}}, \overset{A_{18}}{\{1,2,5\}}, \overset{A_{19}}{\{1,2,7\}}, \overset{A_{20}}{\{1,4,5\}}, \overset{A_{21}}{\{1,4,7\}}, \overset{A_{22}}{\{1,5,7\}}, \overset{A_{23}}{\{2,4,5\}}, \overset{A_{24}}{\{2,4,7\}}, \overset{A_{25}}{\{2,5,7\}}, \overset{A_{26}}{\{4,5,7\}},$

по 4 елементи $\overset{A_{27}}{\{1,2,4,5\}}, \overset{A_{28}}{\{1,2,4,7\}}, \overset{A_{29}}{\{1,2,5,7\}}, \overset{A_{30}}{\{1,4,5,7\}}, \overset{A_{31}}{\{2,4,5,7\}},$

по 5 елементів $\overset{A_{32}}{\{1,2,4,5,7\}}\}$

Як ми бачимо, $|P(A)| = 2^5 = 32$. Цей результат підтверджує, що ми виписали всі можливі підмножини.

Відповідь. $P(A)$ = {∅, {1}, {2}, {4}, {5}, {7}, {1,2}, {1,4}, {1,5}, {1,7}, {2,4}, {2,5}, {2,7}, {4,5}, {4,7}, {5,7}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,2,7}, {1,4,5}, {1,4,7}, {1,5,7}, {2,4,5}, {2,4,7}, {2,5,7}, {4,5,7}, {1,2,4,5}, {1,2,4,7}, {1,2,5,7}, {1,4,5,7}, {2,4,5,7}, {1,2,4,5,7}}.

б) ***В отриманому булеані виділити всі класи еквівалентних множин. Визначити, які з них є сінглетонами.***

Розв'язання. Згідно з означенням, еквівалентними є множини, що складаються з однакової кількості елементів. Зручний запис булеану при розв'язанні попереднього завдання дозволяє легко виписати потужності всіх отриманих підмножин:

$$|A_1| = 0;$$

$$|A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = |A_6| = 1 \text{ – } \textit{сінглетони};$$

$$|A_7| = |A_8| = |A_9| = |A_{10}| = |A_{11}| = |A_{12}| = |A_{13}| = |A_{14}| = |A_{15}| = |A_{16}| = 2;$$

$$|A_{17}| = |A_{18}| = |A_{19}| = |A_{20}| = |A_{21}| = |A_{22}| = |A_{23}| = |A_{24}| = |A_{25}| = |A_{26}| = 3;$$

$$|A_{27}| = |A_{28}| = |A_{29}| = |A_{30}| = |A_{31}| = 4;$$

$$|A_{32}| = 5.$$

Таким чином, саме в такий спосіб і відбувається розподіл множин, що є елементами вказаного булеану, за класами еквівалентності:

$$K_1: \quad A_2 \sim A_3 \sim A_4 \sim A_5 \sim A_6;$$

$$K_2: \quad A_7 \sim A_8 \sim A_9 \sim A_{10} \sim A_{11} \sim A_{12} \sim A_{13} \sim A_{14} \sim A_{15} \sim A_{16};$$

$$K_3: \quad A_{17} \sim A_{18} \sim A_{19} \sim A_{20} \sim A_{21} \sim A_{22} \sim A_{23} \sim A_{24} \sim A_{25} \sim A_{26};$$

$$K_4: \quad A_{27} \sim A_{28} \sim A_{29} \sim A_{30} \sim A_{31}.$$

Відповідь: $K_0 = \{A_1\} = \varnothing$,

$K_1 = \{A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$,

$K_2 = \{A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{16}\}$,

$K_3 = \{A_{17}, A_{18}, A_{19}, A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, A_{26}\}$,

$K_4 = \{A_{27}, A_{28}, A_{29}, A_{30}, A_{31}\}$,

$K_4 = \{A_{32}\} = A$.

№ 2. *Переліком елементів задано наступні множини*:

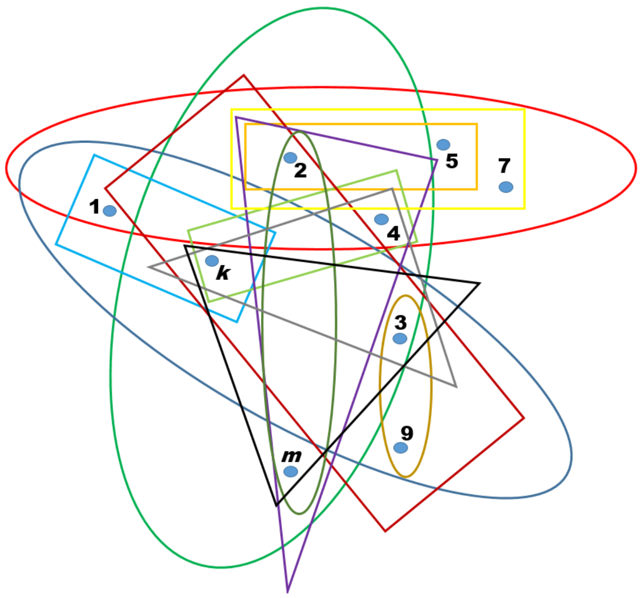
$$A_1 = \{1, 2, 4, 5, 7\},\ A_2 = \{2, 3, 4, k, m\},\ A_3 = \{2, 5\},\ A_4 = \{1, 3, k, 9\},$$
$$A_5 = \{1, k\},\ A_6 = \{4, k\},\ A_7 = \{2, 3, k, 9\},\ A_8 = \{2, 4, m\},\ A_9 = \{2, 5, 7\},$$
$$A_{10} = \{3, k, m\},\ A_{11} = \{3, 9\},\ A_{12} = \{2, m\},\ A_{13} = \{3, 4, k\}.$$

а) ***Визначити, для яких із цих множин виконується відношення включення? Зобразити ці множини графічно.***

Розв'язання. Для наочності кожну множину виділимо окремим кольором:

$$A_1 = \{1, 2, 4, 5, 7\},\ A_2 = \{2, 3, 4, k, m\},\ A_3 = \{2, 5\},\ A_4 = \{1, 3, k, 9\},$$
$$A_5 = \{1, k\},\ A_6 = \{4, k\},\ A_7 = \{2, 3, k, 9\},\ A_8 = \{2, 4, m\},\ A_9 = \{2, 5, 7\},$$
$$A_{10} = \{3, k, m\},\ A_{11} = \{3, 9\},\ A_{12} = \{2, m\},\ A_{13} = \{3, 4, k\}.$$

Тоді графічно сукупність цих множин буде мати наступний вигляд.



Відношення включення можна встановити для наступних з цих множин:

$$\{2, 5\} = A_3 \subset A_1 = \{1, 2, 4, 5, 7\};$$
$$\{2, 5\} = A_3 \subset A_9 = \{2, 5, 7\};$$
$$\{1, k\} = A_5 \subset A_4 = \{1, 3, k, 9\};$$
$$\{4, k\} = A_6 \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\};$$
$$\{4, k\} = A_6 \subset A_{13} = \{3, 4, k\};$$
$$\{3, 9\} = A_{11} \subset A_4 = \{1, 3, k, 9\};$$

$$\{3, 9\} = A_{11} \subset A_7 = \{2, 3, k, 9\};$$

$$\{2, m\} = A_{12} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\};$$

$$\{2, m\} = A_{12} \subset A_8 = \{2, 4, m\};$$

$$\{2, 4, m\} = A_8 \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\};$$

$$\{2, 5, 7\} = A_9 \subset A_1 = \{1, 2, 4, 5, 7\};$$

$$\{3, k, m\} = A_{10} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\};$$

$$\{3, 4, k\} = A_{13} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\}.$$

<u>*Відповідь*</u>. $A_3 \subset A_1$, $A_3 \subset A_9$, $A_5 \subset A_4$, $A_6 \subset A_2$, $A_6 \subset A_{13}$, $A_{11} \subset A_4$, $A_{11} \subset A_7$, $A_{12} \subset A_2$, $A_{12} \subset A_8$, $A_8 \subset A_2$, $A_9 \subset A_1$, $A_{10} \subset A_2$, $A_{13} \subset A_2$.

б) ***Для яких з цих множин виконується транзитивність включення? Зобразити це графічно.***

<u>*Розв'язання*</u>. В попередньому прикладі множини, які є транзитними, присутні і в лівих, і в правих частинах наведених виразів. За рахунок виділення окремими кольорами, легко побачити, що такими транзитними множинами є множини $A_8 = \{2, 4, m\}$, $A_9 = \{2, 5, 7\}$ і $A_{13} = \{3, 4, k\}$. Таким чином, для наведених множин мають місце наступні транзитивні включення:

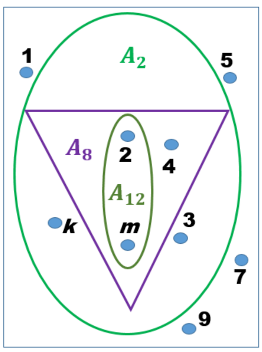
$$\{2, m\} = A_{12} \subset A_8 = \{2, 4, m\} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\};$$

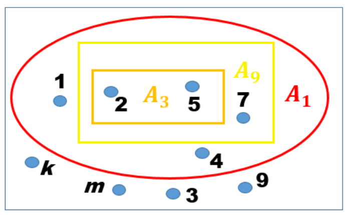
$$\{2, 5\} = A_3 \subset A_9 = \{2, 5, 7\} \subset A_1 = \{1, 2, 4, 5, 7\};$$

$$\{4, k\} = A_6 \subset A_{13} = \{3, 4, k\} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\}.$$

Графічно ці транзитивності можна зобразити наступним чином.

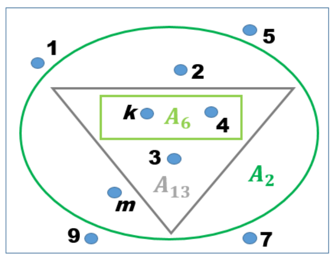
$\{2, m\} = A_{12} \subset A_8 = \{2, 4, m\} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\}$





$\{2, 5\} = A_3 \subset A_9 = \{2, 5, 7\} \subset A_1 = \{1, 2, 4, 5, 7\}$

$\{4, k\} = A_6 \subset A_{13} = \{3, 4, k\} \subset A_2 = \{2, 3, 4, k, m\}$



<u>*Відповідь*</u>. $A_{12} \subset A_8 \subset A_2$, $A_3 \subset A_9 \subset A_1$, $A_6 \subset A_{13} \subset A_2$.

в) ***Для множин із прикладу 2б вписати їх потужності та визначити, яким співвідношенням пов'язані ти з них, для яких виконується транзитивність включення. Зробити висновок.***

Розв'язання. В попередньому прикладі отримано три групи множин, для яких виконується транзитивність включення.

Для ***першої групи*** множин маємо:

$$A_{12} \subset A_8 \subset A_2;$$
$$|A_{12}| = 2; \quad |A_8| = 3; \quad |A_2| = 5;$$
$$|A_{12}| < |A_8| < |A_2|.$$

Для ***другої групи*** множин маємо:

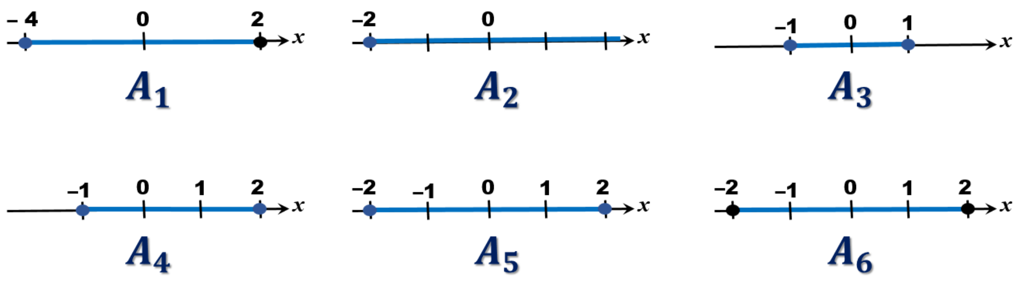
$$A_3 \subset A_9 \subset A_1;$$
$$|A_3| = 2; \quad |A_9| = 3; \quad |A_1| = 5;$$
$$|A_3| < |A_9| < |A_1|.$$

Для ***третьої групи*** множин маємо:

$$A_6 \subset A_{13} \subset A_2;$$
$$|A_6| = 2; \quad |A_{13}| = 3; \quad |A_2| = 5;$$
$$|A_6| < |A_{13}| < |A_2|.$$

Висновок: Потужності множин, для яких виконується відношення суворого включення $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, пов'язані співвідношенням $|\boldsymbol{A}| < |\boldsymbol{B}|$. Якщо включення є несуворим, тобто $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, то відповідна нерівність також стає несуворою, тобто $|\boldsymbol{A}| \leqslant |\boldsymbol{B}|$.

№ 3. *Множини задані графічно*



а) ***Описати ці множини за допомогою характеристичних предикатів та визначити для кожного з них інфінум та супремум.***

Розв'язання. Множина $\boldsymbol{A_1}$ містить всі точки числової осі від найменшої $\boldsymbol{x = -4}$ до найбільшої $\boldsymbol{x = 2}$, причому точка $\boldsymbol{x = -4}$ до множини $\boldsymbol{A_1}$ належить, а точка $\boldsymbol{x = 2}$ – ні. Таким чином, $\boldsymbol{A_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < 2\}$. Незважаючи на те, що точка $(\boldsymbol{x = 2}) \notin \boldsymbol{A_1}$, вона є супремумом для цієї множини. Інфінумом для цієї множини, очевидно, є точка $\boldsymbol{x = -4}$.

Множина $\boldsymbol{A_2}$ містить всі точки числової осі від найменшої $\boldsymbol{x = -2}$ до безкінечності, тобто $\boldsymbol{A_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$ або $\boldsymbol{A_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \infty\}$. Точка $(\boldsymbol{x = -2}) \in \boldsymbol{A_2}$ і є її інфінумом. Зверху ця множина не обмежена, тому супремуму для неї не існує.

Множина $\boldsymbol{A_3}$ містить всі точки числової осі від найменшої $\boldsymbol{x = -1}$ до найбільшої $\boldsymbol{x = 1}$, причому обидві ці точки множині належать. Отже, $\boldsymbol{A_3} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$ або

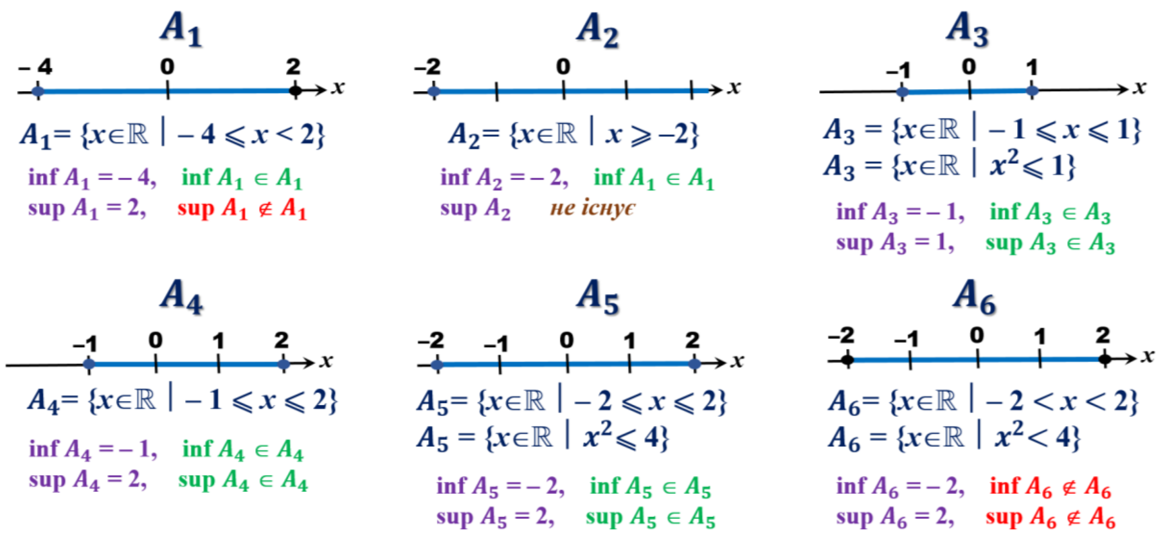
$A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 1\}$. Як наслідок, інфінумом цієї множини є точка $x = -1$, а супремумом – точка $x = 1$.

Множина A_4 містить всі точки числової осі від найменшої $x = -1$ до найбільшої $x = 2$, причому обидві ці точки, як і в попередньому випадку, множині належать. Тому множина A_4 характеристичним предикатом задається як $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$. Очевидно, що інфінумом цієї множини є точка $x = -1$, а супремумом – точка $x = 2$.

Множина A_5 містить всі точки числової осі від найменшої $x = -2$ до найбільшої $x = 2$, причому обидві ці точки, як і в двох попередніх випадках, знову множині належать. Отже характеристичним предикатом цю множину можна подати як $A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ або $A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 4\}$. Таким чином, інфінумом цієї множини є точка $x = -2$, а супремумом – точка $x = 2$.

Множина A_6 містить той же інтервал числової осі, що й множина A_5, але відрізняється від множини A_5 тим, що не містить своїх граничних точок. Тобто для подання множини A_6 можна використати ті ж самі характеристичні предикати, але нерівності в них будуть суворими. Таким чином, $A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$ або $A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$. Незважаючи на відкритість інтервалу множини A_6, вона має ті ж самі інфінум і супремум, що й множина A_5, а саме точки $x = -2$ і $x = 2$ відповідно.

Всі ці множини є нескінченними, тому подати їх переліком елементів неможливо. Таким чином, для цих графічно заданих множин маємо наступні результати.



б) ***Визначити, для яких з цих множин виконуються відношення включення та має місце транзитивність включення?***

<u>*Розв'язання*</u>. Із графічного зображення інтервалів цих множин легко побачити, що

$$[-1; 1] \subset [-4; 2); \quad [-1; 1] \subset [-2; +\infty]; \quad [-1; 1] \subset [-1; 2]; \quad [-1; 1] \subset [-2; 2]; \quad [-1; 1] \subset (-2; 2);$$

$$[-1; 2] \subset [-2; +\infty]; \quad [-1; 2] \subset [-2; 2];$$

$$[-2; 2] \subset [-2; +\infty];$$

$$(-2; 2) \subset [-4; 2); \quad (-2; 2) \subset [-2; +\infty]; \quad (-2; 2) \subset [-2; 2].$$

Таким чином, маємо наступні включення:

$$A_3 \subset A_1;\quad A_3 \subset A_2;\quad A_3 \subset A_4;\quad A_3 \subset A_5;\quad A_3 \subset A_6;$$
$$A_4 \subset A_2;\quad A_4 \subset A_5;$$
$$A_5 \subset A_2;$$
$$A_6 \subset A_1;\quad A_6 \subset A_2;\quad A_6 \subset A_5.$$

Транзитивність включення має місце для наступних множин:

$$A_3 \subset A_4 \subset A_2;\ \ A_3 \subset A_4 \subset A_5;\ \ A_3 \subset A_5 \subset A_2;\ \ A_3 \subset A_6 \subset A_1;\ \ A_3 \subset A_6 \subset A_2;$$
$$A_4 \subset A_5 \subset A_2;\ \ A_6 \subset A_5 \subset A_2.$$

Для деяких множин має місце подвійна транзитивність:

$$A_3 \subset A_4 \subset A_5 \subset A_2;\ \ A_3 \subset A_6 \subset A_5 \subset A_2.$$

№ 4. *Множини, задані характеристичними предикатами*

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leqslant x^3 < 27\};$$
$$A_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\};$$
$$A_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\};$$
$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 1\};$$
$$A_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\};$$
$$A_6 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 1\}.$$

а) *Зобразити ці множини графічно та визначити для них інфінум та супремум*

Розв'язання. Характеристичний предикат множини A_1 задає неперервний відрізок числової осі від найменшої точки $x = \sqrt[3]{-8} = -2$ до найбільшої точки $x = \sqrt[3]{27} = 3$. Зліва нерівність є несуворою, тому точка $x = -2$, яка є інфінумом для цієї множини, в цій множині міститься. Праворуч ця нерівність є суворою, тому точка $x = 3$, яка є супремумом для цієї множини, не є елементом множини A_1. Ця множина є нескінченною, тому задати її переліком елементів неможливо.

Характеристичний предикат множини A_2 задає скінченну сукупність точок, що відповідають цілим числам в інтервалі від $x = -\sqrt{16} = -4$ до $x = +\sqrt{16} = 4$. Нерівність предиката є суворою, тому самі точки $x = -4$ і $x = 4$ не є елементами множини A_2. Таким чином, $A_2 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. В силу скінченності множини A_2, стало можливим її подання наведеним переліком елементів. Є очевидним, що інфінумом цієї множини є точка $x = -3$, а супремумом – точка $x = 3$.

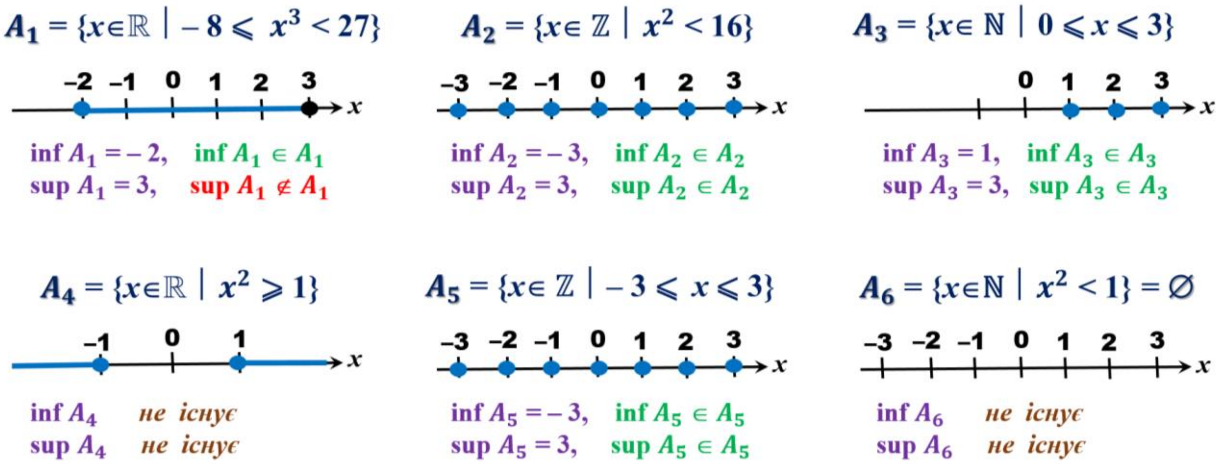
Характеристичний предикат множини A_3 задає скінченну сукупність точок, що відповідають натуральним числам в інтервалі від $x = 0$ до $x = 3$. З обох сторін ця нерівність є несуворою, тому обидві вказані точки мали б належати множині A_3. Але «0» не є натуральним числом, тому точка $x = 0$ множині A_3 все ж таки не належить. Число «3» є натуральним, тому точка $x = 3$ є елементом множини A_3. В силу скінченності множини A_3, її також можна задати переліком елементів, тобто $A_3 = \{1, 2, 3\}$. Є очевидним, що інфінумом цієї множини є точка $x = 1$, а супремумом – точка $x = 3$.

Характеристичний предикат множини A_4 задає два неперервні інтервали $[-\infty; -1]$ і $[1; \infty]$. Нерівність предиката є несуворою, тому точки $x = -1$ і $x = 1$ є елементами множини A_4. Неперервність цих інтервалів робить множину A_4 нескінченною, що унеможливлює її подання переліком елементів. Незважаючи на те, що інтервал $[-\infty; -1]$ має супремум в точці $x = -1$, а інтервал $[1; \infty]$ має інфінум в точці $x = 1$, сама множина A_4 є необмеженою з обох боків. Тому у множини A_4 не існує ані інфінуму, ані супремуму.

Характеристичний предикат множини A_5 задає скінченну сукупність точок, що відповідають цілим числам в інтервалі від $x = -3$ до $x = 3$. Нерівність предиката є несуворою, тому самі точки $x = -3$ і $x = 3$ є елементами множини A_5. Множина A_5 є скінченною, тому припускає задання переліком елементів. Таким чином, $A_5 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Таке подання дозволяє легко помітити, що перелік елементів множини A_5 повністю збігається з переліком елементів множини A_2. Отже, згідно з аксіомою екстенціональності, $A_2 = A_5$. З цього випливає, що інфінум і супремум множини A_5 є такими ж самими, що й у множини A_2, тобто точки $x = -3$ і $x = 3$ відповідно.

Характеристичний предикат множини A_6 задає скінченну сукупність точок, що відповідають натуральним числам в інтервалі від $x = -1$ до $x = 1$. В цьому інтервалі єдиним натуральним числом є $x = 1$. Але нерівність предиката є суворою, тому точка $x = 1$ не є елементом множини A_6. З цього випливає, що множина A_6 взагалі не містить жодного елемента, тобто є порожньою. Для порожньої множини інфінум і супремум не існують.

Таким чином, для описаних множин, які було задано за допомогою характеристичних предикатів, маємо наступні результати.



б) ***Визначити, для яких з цих множин мають місце відношення включення та транзитивність включення.***

<u>Розв'язання</u>. Порожня множина є підмножиною будь-якої іншої множини. Тому, вочевидь:

$$A_6 \subset A_1, \quad A_6 \subset A_2, \quad A_6 \subset A_3, \quad A_6 \subset A_4, \quad A_6 \subset A_5.$$

Як було показано при розв'язанні попереднього завдання, $A_2 = A_5$. Отже, за властивістю відношення включення, маємо:

$$A_2 \subseteq A_5, \quad A_5 \subseteq A_2.$$

Із графічного зображення інтервалів цих множин також легко побачити, що

$$\{1, 2, 3\} \subset \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}; \quad \{1, 2, 3\} \subset [\,1; +\infty].$$

Таким чином, маємо наступні включення:

$$A_3 \subset A_2, \quad A_3 \subset A_4, \quad A_3 \subset A_5.$$

Транзитивность включения має місце для наступних множин:

$$A_6 \subset A_3 \subset A_4, \;\; A_6 \subset A_2 \subseteq A_5, \;\; A_6 \subset A_5 \subseteq A_2, \;\; A_6 \subset A_3 \subset A_2, \;\; A_6 \subset A_3 \subset A_5.$$

Для деяких множин має місце подвійна транзитивність:

$$A_3 \subset A_5 \subseteq A_2, \quad A_3 \subset A_2 \subseteq A_5;$$

а для деяких навіть потрійна:

$$A_6 \subset A_3 \subset A_5 \subseteq A_2, \quad A_6 \subset A_3 \subset A_2 \subseteq A_5.$$

Висновок. Останні два приклади наочно показують, що між графічним заданням конкретної множини та її характеристичним предикатом завжди можливий прямий перехід. Крім того, задання множини характеристичним предикатом не завжди є єдино можливим. Деякі множини дозволяють запропонувати для них декілька різних характеристичних предикатів. Для скінченних множин можливий також перехід між вказаними способами задання та простим переліком елементів. З цього випливає, що для кожної конкретної прикладної задачі можливо обрати найбільш зручний спосіб задання множин в залежності від технічних засобів, що будуть задіяні для розв’язання цієї задачі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Що таке множина?
2. В чому полягає відношення приналежності?
3. Сформулюйте аксіому екстенціональності.
4. Наведіть приклади тотожних множин.
5. Сформулюйте властивості відношення тотожності (рівності) множин.
6. Що таке скінченні та нескінченні множини?
7. Що таке зліченні та незліченні множини?
8. Що таке сінглетон?
9. Яка множина є порожньою?
10. Що таке потужність скінченної множини?
11. Що таке кардинальне число довільної множини?
12. Що таке еквівалентні множини?
13. Сформулюйте властивості відношення еквівалентності множин.
14. В чому полягає різниця між відношенням еквівалентності та відношенням тотожності множин?
15. Сформулюйте теорему Кантора.
16. Що таке континуум?
17. Сформулюйте теорему Кантора-Бернштейна.
18. Яку множину називають універсумом?

19. Перелічить відомі способи задання множин.
20. Що таке характеристичний предикат?
21. Сформулюйте аксіому згортки.
22. В чому полягає парадокс Рассела? Як можна його уникнути?
23. Що таке породжуюча процедура?
24. Як зображуються множини за допомогою кругів Ейлера?
25. Що таке підмножина та надмножина?
26. В чому полягає відношення включення?
27. Чим відрізняється суворе включення від несуворого?
28. Що таке власні та невласні підмножини?
29. Що таке булеан?
30. Сформулюйте теорему про булеан.
31. Що таке верхня та нижня границі множини?
32. Що таке супремум та інфінум множини?
33. Яка множина є замкненою, а яка відкритою?
34. Що таке ізольована точка множини?
35. Сформулюйте теорему про верхню та нижню границі множини.
36. Запишіть за допомогою переліку елементів та зобразіть графічно множину $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} - \textbf{\textit{дільник числа}}\ \mathbf{110}\}$. Знайдіть її інфінум та супремум.
37. Зобразіть графічно та за допомогою переліку елементів множину $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{N} \mid \boldsymbol{x^2} \leqslant \mathbf{10}\}$. Знайдіть її інфінум та супремум.
38. Чи виконується рівність $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, якщо $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2, 5, 4}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{5, 4, 2}\}$?
39. Чи виконується рівність $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, якщо $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2}, \{\mathbf{1, 5}\}, \mathbf{4}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\{\mathbf{5, 1}\}, \mathbf{4, 2}\}$?
40. Чи виконується рівність $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, якщо $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{2}, \{\mathbf{1, 5}\}, \mathbf{4}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1, 5, 3}\}$?. Чи є ці множини еквівалентними?
41. Які відношення можна встановити для множин $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1, 3}\}$, $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R} \mid \boldsymbol{x^2} - \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{3} = \mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{C}$ – множина непарних додатних чисел?
42. Прийнявши множину перших 20 натуральних чисел за універсум, запишіть наступні його підмножини: $\boldsymbol{A}$ – множина парних чисел; $\boldsymbol{B}$ – множина непарних чисел; $\boldsymbol{C}$ – множина квадратів чисел; $\boldsymbol{D}$ – множина простих чисел. Які відношення можна встановити для цих підмножин?
43. Чи має місце відношення приналежності $\mathbf{3}\in\{\mathbf{1}, \{\mathbf{2, 3}\}, \mathbf{4}\}$. Обґрунтуйте свою відповідь.
44. Чи має місце відношення приналежності $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}\in\{\boldsymbol{a}, \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}, \boldsymbol{b}\}$. Обґрунтуйте свою відповідь.
45. Чи має місце відношення приналежності $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}\in\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}\}$. Обґрунтуйте свою відповідь.

2. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

2.1. ОЗНАЧЕННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

Нові множини можна визначати також за допомогою операций над деякими іншими множинами. Для наочного зображення співвідношень між підмножинами якого-небудь універсуму $\boldsymbol{U}$ використовують, як правило, круги Ейлера. При цьому зазвичай універсум подається множиною точок прямокутника, а його підмножини зображають у вигляді кругів або інших простих областей всередині цього прямокутника. Таким чином, множини, отримані в результаті операцій над іншими множинами, також можуть бути задані в будь-який можливий спосіб [1].

Означення. *Перетин* (*добуток*) $\boldsymbol{A\cap B}$ – це множина всіх тих і лише тих елементів, що належать одночасно і множині $\boldsymbol{A}$, і множині $\boldsymbol{B}$, тобто $\boldsymbol{C=A\cup B=\{c\colon c\in A\ i\ c\in B\}}$.

Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1 і множини $\boldsymbol{B=\{3, 4, 5, 6\}}$ їх перетином буде множина $\boldsymbol{C=A_2\cap B=\{3, 4\}}$.

Графічно операцію перетину двох множин подано на рис. 5*а* [1].

Означення. Множини, що не мають спільних елементів, називаються такими, що *не перетинаються* (*розділеними*) [1].

Означення. *Об'єднання* (*сума*) $\boldsymbol{A\cup B}$ – це множина всіх тих і лише тих елементів, що належать або множині $\boldsymbol{A}$, або множині $\boldsymbol{B}$, або обом множинам одночасно, тобто $\boldsymbol{C=A\cup B=\{c\colon c\in A}$ ***або*** $\boldsymbol{c\in B\}}$ [15].

Наприклад, якщо взяти множину $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1 і множину $\boldsymbol{B=\{3, 4, 5, 6\}}$, то їх об'єднанням буде множина $\boldsymbol{C=A_2\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$.

Графічно операцію об'єднання двох множин подано на рис. 5*б* [1].

Означення. *Різниця* $\boldsymbol{A\backslash B}$ (*або* $\boldsymbol{A-B}$) – це множина, що складається із всіх тих і лише тих елементів множини $\boldsymbol{A}$, що не містяться в множині $\boldsymbol{B}$, тобто $\boldsymbol{C=A\setminus B=\{c\colon c\in A\ i\ c\notin B\}}$. Її можна розуміти як *відносне доповнення* множини $\boldsymbol{B}$ до множини $\boldsymbol{A}$.

Означення. Якщо $\boldsymbol{A\in U}$, то множина $\boldsymbol{U\backslash A}$ називається *абсолютним доповненням* (або просто *доповненням*) множини $\boldsymbol{A}$ і позначається через $\boldsymbol{\overline{A}}$. Вона містить всі елементи універсуму $\boldsymbol{U}$, окрім елементів $\boldsymbol{A}$, тобто $\boldsymbol{\overline{A}=U\backslash A=\{c\colon\ c\notin A\}}$.

Графічно абсолютне доповнення множини $\boldsymbol{A}$ подино на рис. 5*в* [1].

Очевидно, що $\boldsymbol{A\backslash B=A\cap\overline{B}}$.

Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1 і множини $\boldsymbol{B=\{3, 4, 5, 6\}}$ їх різницею буде множина $\boldsymbol{C=A_2\setminus B=\{1, 2\}}$.

Графічно операцію різниці двох множин подано на рис. 5*г* [1].

Означення. *Диз'юнктивна сума* (*симетрична різниця*) $\boldsymbol{A+B}$ (або $\boldsymbol{A\oplus B}$) – це множина всіх тих і лише тих елементів, що належать або множині $\boldsymbol{A}$, або множині $\boldsymbol{B}$, але не обом множинам одночасно, тобто $\boldsymbol{C=A\oplus B=\{c\colon c\in A\ i\ c\in B\ i\ c\notin(A\cap B)\}}$ [1].

Наприклад, для множини $\boldsymbol{A_2=\{1, 2, 3, 4\}}$ із прикладу 1 і множини $\boldsymbol{B=\{3, 4, 5, 6\}}$ їх різницею буде множина $\boldsymbol{C=A_2\oplus B=\{1, 2, 5, 6\}}$.

Диз'юнктивну суму можна отримати об'єднанням елементів множин за винятком тих, що зустрічаються двічі. Графічно диз'юнктивну суму двох множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ подано на рис. 5*д* [1].

На рис. 2 було показане відношення включення на прикладі деяких скінченних множин. Для нескінченних множин графічне подання цієї операції за допомогою кругів Ейлера зображене на рис. 5*е* [1].

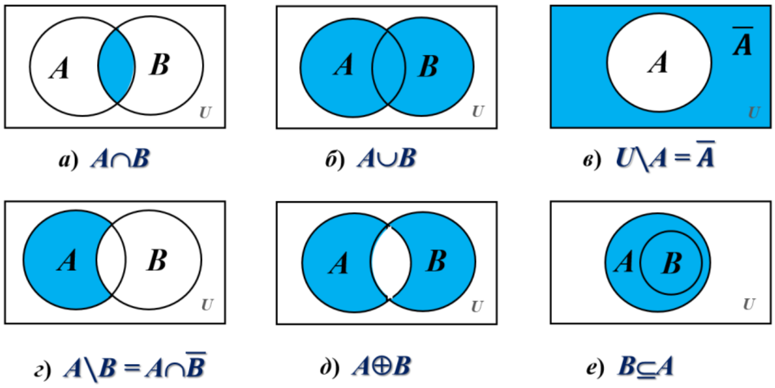


Рис. 5. – Основні операції над множинами

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

Розглянуті вище *операції над множинами* мають ряд *властивостей* [1].

комутативність:

$$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A,} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A \cap B = B \cap A,} \tag{2}$$

асоціативність:

$$\boldsymbol{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,} \tag{4}$$

дистрибутивність:

$$\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),} \tag{6}$$

властивості порожньої множини:

$$\boldsymbol{A \cup \varnothing = A,} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A \cap \varnothing = \varnothing,} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{A \cap \overline{A} = \varnothing,} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\overline{\varnothing} = U,} \tag{10}$$

властивості універсуму:

$$\boldsymbol{A \cup \overline{A} = U,} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{A \cup U = U,} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{A \cap U = A,} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\overline{U} = \varnothing,} \tag{14}$$

ідемпотентність:

$$\boldsymbol{A \cup A = A,} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{A \cap A = A,} \tag{16}$$

елімінація (*поглинання*):

$$\boldsymbol{A \cup (A \cap B) = A,} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{A \cap (A \cup B) = A}, \tag{18}$$

закони де Моргана:

$$\overline{\boldsymbol{A \cup B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}, \tag{19}$$

$$\overline{\boldsymbol{A \cap B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}, \tag{20}$$

властивості доповнення:

$$\underline{\textbf{\textit{якщо}}}\ \boldsymbol{A \cup B = U}\ \ \underline{\textbf{\textit{и}}}\ \ \boldsymbol{A \cap B = \varnothing},\ \ \underline{\textbf{\textit{то}}}\ \ \boldsymbol{B = \overline{A}}, \tag{21}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{U \setminus A}, \tag{22}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}, \tag{23}$$

властивість різниці:

$$\boldsymbol{A \setminus B = A \cap \overline{B}}, \tag{24}$$

властивості диз'юнктивної суми:

$$\boldsymbol{A \oplus B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)}, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{A \oplus B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{A \oplus B = B \oplus A}, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{A \oplus \varnothing = \varnothing \oplus A = A}, \tag{30}$$

властивість включення:

$$\boldsymbol{A \subset B},\ \underline{\textbf{\textit{якщо й тільки якщо}}}\ \ \boldsymbol{A \cap B = A}\ \ \underline{\textbf{\textit{або}}}\ \ \boldsymbol{A \cup B = B}\ \ \underline{\textbf{\textit{або}}}\ \ \boldsymbol{A \cap \overline{B} = \varnothing}, \tag{31}$$

властивість рівності:

$$\boldsymbol{A = B},\ \underline{\textbf{\textit{якщо й тільки якщо}}}\ \ \boldsymbol{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing}. \tag{32}$$

Доведення цих тотожностей може бути **засноване на відношенні приналежності**. Важливо відзначити, що будь-яка теорема алгебри множин і, зокрема, співвідношення (11) – (32) можуть бути отримані із властивостей (1) – (10), які, у свою чергу, доводяться лише в термінах відношення приналежності. Це можна розуміти як ілюстрацію аксіоматичного підходу до алгебри множин [1].

Доведемо, наприклад, **властивості (1) – (14)**.

Доведення

Покажемо справедливість ***комутативності*** перетину множин $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$, тобто тотожності (2). Нехай $\boldsymbol{a \in (A \cap B)}$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{a \in A}$ і $\boldsymbol{a \in B}$ одночасно. Це означає, що $\boldsymbol{a \in (B \cap A)}$, що, у свою чергу, викликає виконання приналежності $\boldsymbol{(A \cap B) \subseteq (B \cap A)}$. Аналогічно виводиться, що $\boldsymbol{(B \cap A) \subseteq (A \cap B)}$. Ці два включення і доводять рівність $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$. В аналогічний спосіб доводиться й тотожність (1). Отже, ***властивості комутативності доведено***.

Покажемо справедливість ***асоціативності*** перетину множин $\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$, тобто тотожності (4). Нехай $\boldsymbol{a \in (A \cap (B \cap C))}$. Звідси випливає, що $\boldsymbol{a \in A}$ і $\boldsymbol{a \in (B \cap C)}$, тобто також виконується приналежність $\boldsymbol{a \in B}$ і $\boldsymbol{a \in C}$. В силу того, що елемент $\boldsymbol{a}$ належить одночасно і множині $\boldsymbol{A}$, і множині $\boldsymbol{B}$, то за означенням операції перетину множин елемент $a \in (A \cap B)$. Але в зв'язку з тим, що одночасно з цим $a \in C$, то можна стверджувати, що $a \in ((A \cap B) \cap C)$ і, як наслідок, $(A \cap (B \cap C)) \subseteq ((A \cap B) \cap C))$ [1].

Нехай тепер $a \in ((A \cap B) \cap C)$. Це означає, що одночасно виконується приналежність $a \in (A \cap B)$ і $a \in C$. З того, що $a \in (A \cap B)$ випливає, що $a \in A$ і $a \in B$. Із одночасної приналежності елемента a множинам B і C випливає, що $a \in (B \cap C)$. З цього відношення приналежності і з того, що $a \in A$ випливає, що $a \in (A \cap (B \cap C))$. Це означає, що $((A \cap B) \cap C) \subseteq (A \cap (B \cap C))$. Враховуючи властивості відношення включення, можна стверджувати, що тотожність (4) виконується. Аналогічно доводиться тотожність (3). Отже, ***властивості асоціативності доведено***.

Покажемо тепер справедливість першої ***дистрибутивності***, тобто властивості (5). З одного боку, в силу того, що $(B \cap C) \subseteq B$, виконується відношення приналежності $(A \cup (B \cap C)) \subseteq (A \cup B)$. Аналогічно із приналежності $(B \cap C) \subseteq C$ випливає приналежність $(A \cup (B \cap C)) \subseteq (A \cup C)$. Це означає, що $(A \cup (B \cap C)) \subseteq ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ [1].

З іншого боку, якщо $a \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$, то одночасно виконуються приналежності $a \in (A \cup B)$ і $a \in (A \cup C)$. Якщо $a \in A$, то $a \in (A \cup (B \cap C))$. Якщо ж $a \notin A$, то $a \in B$ і $a \in C$, звідки випливає, що $a \in (B \cap C)$. Отже, $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subseteq (A \cup (B \cap C))$. Враховуючи властивості відношення включення, можна стверджувати, що тотожність (5) виконується. Аналогічно доводиться тотожність (6). Таким чином, ***властивості дистрибутивності доведено***.

Покажемо тепер справедливість властивостей ***порожньої множини*** і ***універсуму***, тобто властивостей (7) – (14). За означенням універсуму U і порожньої множини $\varnothing$, для будь-якого елементу $a \in A$ виконуються приналежності $a \in U$ і $a \notin \varnothing$. Отже, у множини A і порожньої множини $\varnothing$ немає жодного спільного елемента, а спільними для множини A і універсуму U є всі елементи множини A і лише вони. Це означає, що виконуються тотожності $A \cap \varnothing = \varnothing$ (властивість (8)) і $A \cap U = A$ (властивість (13)). В той же час за означенням універсуму U і порожньої множини $\varnothing$, порожня множина не містить жодного елемента, а універсум містить абсолютно всі допустимі елементи. Е означає, що ці множини є доповненнями одна одної (властивості (10) і (14)). В той же час, якщо $a \in A$, то $a \in (A \cup \varnothing)$ і $a \in (A \cup U)$. Елементів порожньої множини в множині $(A \cup \varnothing)$ немає. Отже, виконується тотожність $A \cup \varnothing = A$ (властивість (7)). Але множина $A \subseteq U$. Отже, $A \cup U = U$ (властивість (12)). За означенням множина $\overline{A}$ містить ті й лише ті елементи універсуму, що не належать множині A. Отже, спільних елементів у множини A і множини $\overline{A}$ немає (властивість (9)), а разом вони містять всі допустимі елементи (властивість (11)). Таким чином, ***властивості порожньої множини*** і ***універсуму доведено*** [1].

Властивості (1) – (14) доведено.

Доведені властивості можна використовувати при виконанні **тотожних перетворень**, щоб **довести**, наприклад, **властивості (15) – (18)**.

Доведення.

Доведемо за допомогою вже доведених тотожностей властивості ***ідемпотентності***. Спочатку доведемо *ідемпотентність об'єднання множин* (15):

$$A =$$

(*за властивістю порожньої множини* (7))

$$= A \cup \varnothing =$$

(*за властивістю порожньої множини* (9) *для множини* ***A***)

$$A \cup (A \cap \overline{A}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (5) *для множини* ***A*** *і множин* ***A*** *і* $\overline{A}$)

$$= (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) =$$

(*за властивістю універсуму* (11) *для множини* ***A***)

$$= (A \cup A) \cap U =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* $A \cup A$)

$$= A \cup A.$$

Тепер доведемо *іденпотентність перетину множин* (16):

$$A =$$

(*за властивістю універсуму* (13))

$$= A \cap U =$$

(*за властивістю універсуму* (11) *для множини* ***A***)

$$= A \cap (A \cup \overline{A}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* ***A*** *і множин* ***A*** *і* $\overline{A}$)

$$= (A \cap A) \cup (A \cap \overline{A}) =$$

(*за властивістю порожньої множини* (9) *для множини* ***A***)

$$= (A \cap A) \cup \varnothing =$$

(*за властивістю порожньої множини* (7) *для множини* $A \cap A$)

$$= A \cap A.$$

Ідемпотентність доведено.

Тепер доведемо ***елімінацію (поглинання)***. Спочатку доведемо *елімінацію при об'єднанні множин* (17):

$$A \cup (A \cap B) =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* ***A***)

$$= (A \cap U) \cup (A \cap B) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* ***A*** *і множин* ***U*** *і* ***B***)

$$= A \cap (U \cup B) =$$

(*за властивістю універсуму* (12) *для множини* ***B***)

$$= A \cap U =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* ***B***)

$$= A.$$

Тепер доведемо <u>*елімінацію при перетині множин*</u> (18):

$$\boldsymbol{A \cap (A \cup B) =}$$

(*за властивістю порожньої множини* (7) *для множини* $\boldsymbol{A}$)

$$\boldsymbol{= (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) =}$$

(*за законом дистрибутивності* (5) *для множини* $\boldsymbol{A}$ *і множин* $\boldsymbol{\varnothing}$ *і* $\boldsymbol{B}$)

$$\boldsymbol{= A \cup (\varnothing \cap B) =}$$

(*за властивістю порожньої множини* (8) *для множини* $\boldsymbol{B}$)

$$\boldsymbol{= A \cup \varnothing =}$$

(*за властивістю порожньої множини* (7) *для множини* $\boldsymbol{A}$)

$$= \boldsymbol{A}.$$

<u>***Елімінацію доведено***</u>.

Властивості (15) – (18) доведено.

Круги Ейлера також можна використовувати для **доведення** співвідношень між множинами. Для цього необхідно побудувати області, що відповідають лівій та правій частинам виразу, і з’ясувати, збігаються ці області чи ні. Якщо ці області збігаються, тотожність виконується, а якщо не збігаються – не виконується. Доведемо за допомогою кругів Ейлера <u>**закони де Моргана (властивості (19) і (20))**</u>.

<u>*Доведення*</u>. Для 1-го закону де Моргана $\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$ графічне доведення має вигляд, зображений на рис. 6 [1].

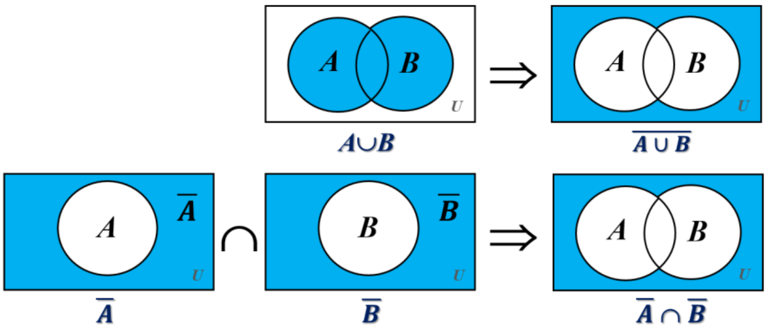


Рис. 6. – Графічне доведення 1-го закону де Моргана

Доведення 2-го закону де Моргана $\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ зображено на рис. 7 [1].

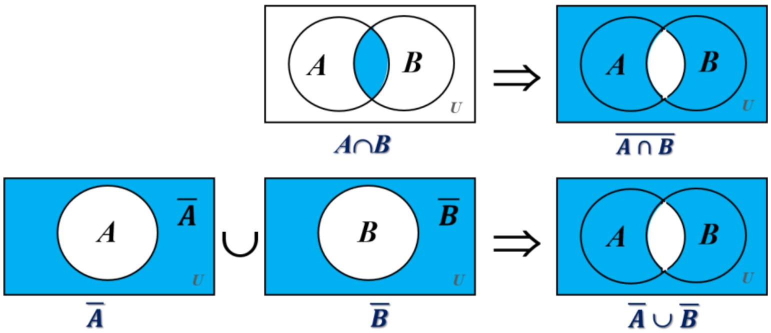


Рис. 7. – Графічне доведення 2-го закону де Моргана

Закони де Моргана доведено.

Також графічно можна довести і **<u>властивості диз’юнктивної суми (25) і (26)</u>**. Процес цього доведення зображений на рис. 8 [1].

<u>*Доведення*</u>. В ході доведення було враховано, що схему для множини $\overline{A} \cup \overline{B}$ було вже побудовано при доведенні 2-го закону де Моргана. Схему для лівої частини цих тотожностей також вже зображено на рис. 5*д*. Очевидно, що схемі для правих частин тотожностей (25) і (26), отримані на рис. 8, збігаються зі схемою на рис. 5*д*.

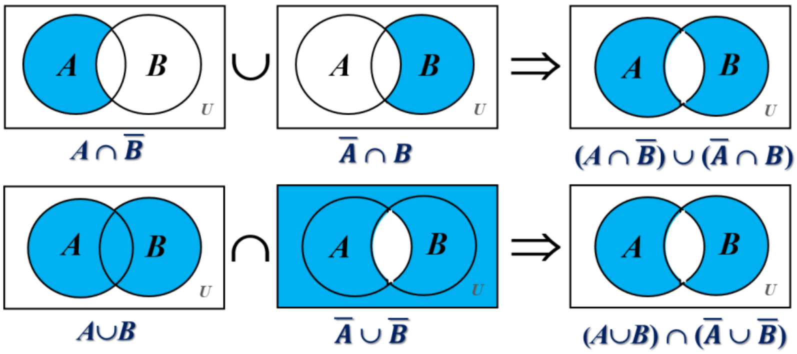
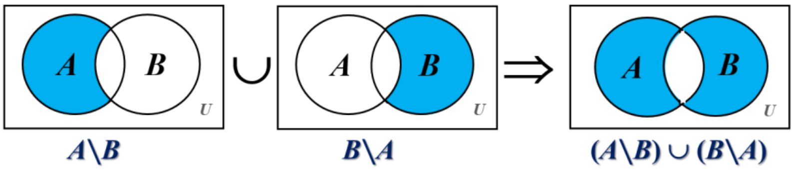


Рис. 8. – Графічне доведення властивостей диз’юнктивної суми

Властивість диз’юнктивної суми (27) можна довести, наприклад, графічно за допомогою кругів. Ейлера,



де, як і для властивостей (25) та (26) на рис 8, схема для правої частини тотожності (27) збігається зі схемою на рис. 5*д*. Але, в той же час, властивість (27) можна довести аналітично з використанням вже доведеної властивості (25):

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$$

(*за властивістю операції різниці* (24) *для множин* ***A*** *і* ***B****, а також для множин* ***B*** *і* ***A***)

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) =$$

(*за законом комутативності перетину множин* (2) *для множин* $\overline{A}$ *і* ***B***)

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) =$$

(*за властивістю диз’юнктивної суми* (25) *для множин* ***A*** *і* ***B***)

$$= (A \oplus B);$$

або з використанням вже доведеної властивості (26):

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$$

(*за властивістю операції різниці* (24) *для множин* ***A*** *і* ***B****, а також для множин* ***B*** *і* ***A***)

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (5) *для множини* $A \cap \overline{B}$ *і множин* ***B*** *і* $\overline{A}$)

$$= ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (5) *для множини* $\boldsymbol{B}$ *і множин* $\boldsymbol{A}$ *і* $\overline{\boldsymbol{B}}$)

$$= ((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)) \cap ((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (5) *для множини* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *і множин* $\boldsymbol{A}$ *і* $\overline{\boldsymbol{B}}$)

$$= ((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)) \cap ((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) =$$

(*за властивістю універсуму* (11) *для множини* $\boldsymbol{B}$)

$$= ((A \cup B) \cap U) \cap ((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) =$$

(*за властивістю універсуму* (11) *для множини* $\boldsymbol{A}$)

$$= ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* $\boldsymbol{A \cup B}$)

$$= (A \cup B) \cap (U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})) =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* $\overline{\boldsymbol{B}} \cup \overline{\boldsymbol{A}}$)

$$= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми* (26) *для множин* $\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{B}$)

$$= (A \oplus B).$$

Комутативність (28) і асоціативність (29) диз'юнктивної суми, а також диз'юнктивну суму з порожньою множиною може бути доведено або графічно за допомогою кругів Ейлера, або через відношення приналежності аналогічно властивостям (1) – (4). Таким чином, можна вважати, що **властивості диз'юнктивної суми доведено** [1].

2.3. УЗАГАЛЬНЕННЯ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

Із комутативності та асоціативності операції об'єднання випливає, що об'єднання декількох множин можна виконати, послідовно об'єднуючи ці множини, причому порядок, в якому беруться ці множини, не впливає на результат [1]. Так, якщо розглядати, наприклад, три множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ тощо, збільшуючи кількість множин в розгляданні. Отже, *об'єднання сукупності множин* можна подати співвідношенням

$$\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i},$$

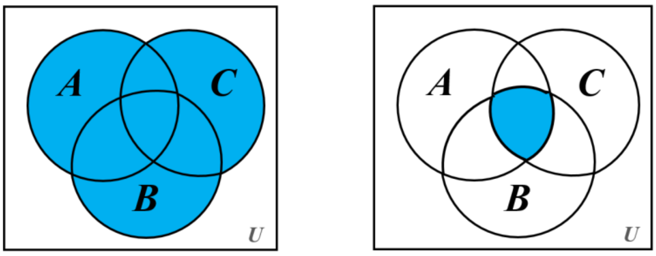
яке являє собою множину елементів, що належать хоча б одній з множин $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{i=\overline{1,n}}$ даної сукупності.

Аналогічним чином узагальнюється і операція перетину, що має ті ж самі властивості, що й об'єднання. *Перетин сукупності множин* подається співвідношенням

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i},$$

яке являє собою множину елементів, що належать одночасно усім множинам $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1},\boldsymbol{n}}$ даної сукупності.

Графічно узагальнення цих операцій подано на рис. 9 [1].



$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

а) *узагальнення операції об'єднання множин* *б*) *узагальнення операції перетину множин*

Рис. 9. – Узагальнення операцій об'єднанняя та перетину множин

<u>Теорема 8</u>. *<u>Формулювання</u>*. Результат об'єднання скінченної або зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною [4].

<u>Доведення</u>. Розглянемо спочатку випадок скінченної кількості зліченних множин. Нехай $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_k}$ – зліченні множини і $\boldsymbol{a_{ij}} \in \boldsymbol{A_i}$ – їх елементи. Розглянемо послідовність

$$\boldsymbol{a_{11}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{k2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{kn}, \dots} \;.$$

Таку послідовність можна перенумерувати. При цьому якщо деякий елементт при переліку вже зустрічався раніше й отримав номер, то в подальшому його пропускаємо. Отже, множина $\bigcup_{i=1}^{k} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A}$ є зліченною.

Розглянемо тепер випадок зліченної кількості зліченних множин $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots}$, де $\boldsymbol{A_i}$={$\boldsymbol{a_{i1}, a_{i2}, \dots}$}. Існує лише зліченна кількість елементів $\boldsymbol{a_{ik}}$, для яких $\boldsymbol{i}$+$\boldsymbol{k}$=**2**. Аналогічно існує лише зліченна кількість елементів $\boldsymbol{a_{ik}}$, для яких $\boldsymbol{i}$+$\boldsymbol{k}$=**3** тощо. Перенумеруємо спочатку всі елементи, для яких $\boldsymbol{i}$+$\boldsymbol{k}$=**2** (наприклад, за зростанням значення коефіцієнта $\boldsymbol{i}$), а потім (за допомогою інших чисел) – елементи, для яких $\boldsymbol{i}$+$\boldsymbol{k}$=**3** тощо. При цьому кожен елемент $\boldsymbol{a_{ik}}$ отримає деякий номер, і різні елементи будуть мати різні номери. Отже, і в цьому випадку елементи множиниа $\bigcup_{i=1}^{k} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A}$ можна перенумерувати, тобто ця множина є зліченною. **Теорему доведено**.

<u>Наслідок 1</u>. Множина $\mathbb{Z}$ усіх цілих чисел є зліченною.

<u>Доведення</u>. Множину $\mathbb{Z}$ можна подати у вигляді $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, де $\mathbb{N}'$=**{–1, –2, …, –*n*, …}**. Є очевидним, що множина $\mathbb{N}'$ є зліченною. При об'єднанні зі зліченною множиною $\mathbb{N}$ вона дає зліченну множину. **Наслідок 1 доведено**.

<u>Наслідок 2</u>. Множина $\mathbb{Q}$ усіх раціональних чисел є зліченною.

<u>Доведення</u>. Множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел можна подати як об'єднання $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \boldsymbol{R_2} \cup \boldsymbol{R_3} \cup \dots \cup \boldsymbol{R_i} \cup \dots$, де $\boldsymbol{R_i}$={$\boldsymbol{m/i} \mid \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{i}$=**2, 3, …**}. Очевидно, що кожна із множин $\boldsymbol{R_i}$ є зліченною. Кількість різних множин $\boldsymbol{R_i}$ також є зліченною. Таким чином, множина $\mathbb{Q}$ подається як об'єднання зліченної кількості зліченних множин. Отже, вона також є зліченною. **Наслідок 2 доведено**.

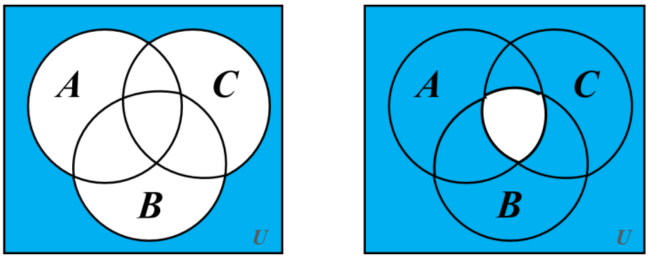
<u>Наслідок 3</u>. Якщо $\boldsymbol{A}$ – незліченна множина і $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$ – деяка зліченна підмножина множини $\boldsymbol{A}$, то множина $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ є незліченною.

<u>*Доведення*</u>. Припустимо, що множина $\boldsymbol{C}$ є зліченною. Тоді за теоремою 7 і теоремою 1 (теоремою Кантора) множина $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}$ також є зліченною, що протирічить умові наслідку 3. Це означає, що наше припущення є хибним, і множина $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ є незліченною. **Наслідок 3 доведено**.

Використовуючи наведені співвідношення для об'єднання та перетину множин, можна узагальнити будь-які інші співвідношення, до яких входять операції об'єднання та перетину. Так, закони де Моргана для сукупності множин запишуться наступним чином:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i , \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i .$$

Графічно цей результат зображено на рис. 10 [1].



$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{A}}_i \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\boldsymbol{A}}_i$$

а) ***узагальнення 1-го закону де Моргана*** ***б***) ***узагальнення 2-го закону де Моргана***

Рис. 1.10. – Узагальнення законів де Моргана

Більш за те, такого роду співвідношення можна використовувати і у випадках, коли сукупність містить нескінченну кількість множин. При цьому зазвичай замість $\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i$ пишуть $\bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{A}_i$.

Узагальнення об'єднання і перетину множин на будь-яку кількість множин дозволяє ввести ще одну операцію над множинами, а саме операцію розбиття множини.

<u>Означення</u>. *Розбиття* множини $\boldsymbol{A}$ – це така система $\boldsymbol{S}$ множин $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$, що задовольняє наступним умовам [19]:

- будь-яка множина $\boldsymbol{A_i}$ системи $\boldsymbol{S}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A_i} \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1, n}}$;
- будь-які дві множини $\boldsymbol{A_i}$ і $\boldsymbol{A_j}$ системи $\boldsymbol{S}$ є такими, що не перетинаються: $\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j} = \varnothing$;
- об'єднання усіх множин із системи $\boldsymbol{S}$ дає множину $\boldsymbol{A}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i} = \boldsymbol{A}.$$

Можливі приклади такого розбиття різних множин зображені на рис. 11 [1].

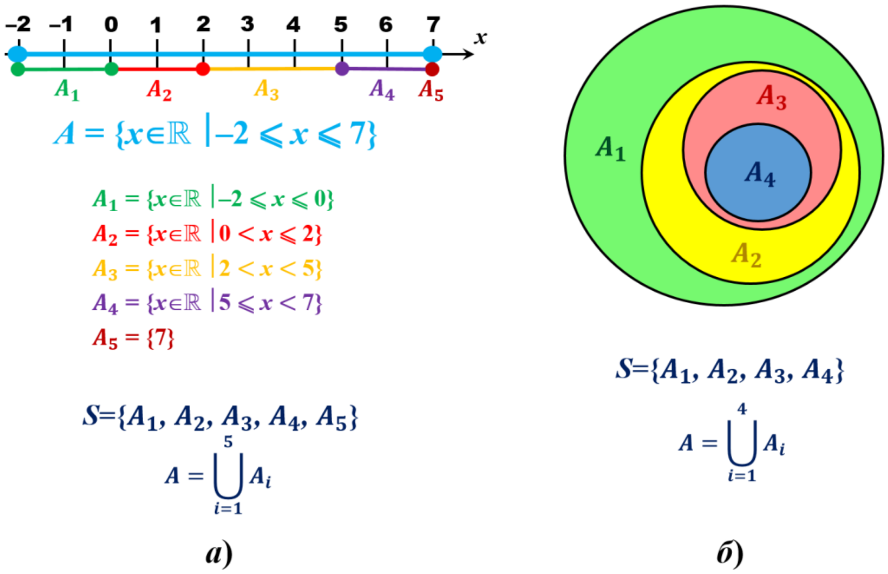


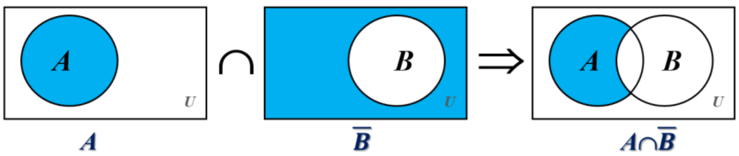
Рис. 11. – Розбиття множини на підмножини, що не перетинаються

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

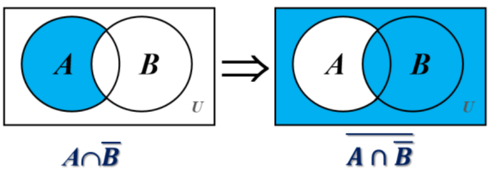
Довести тотожності графічно за допомогою кругів Ейлера.

№ 1. $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$

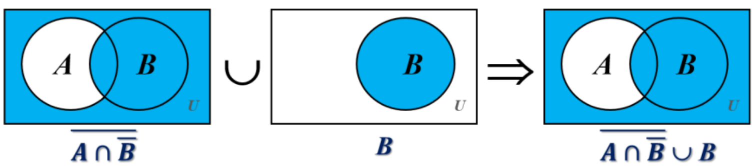
Доведення. Спочатку виконаємо графічно операцію перетину множин A і $\overline{B}$.



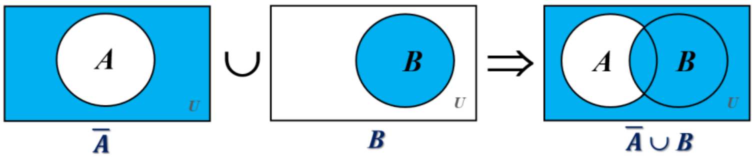
Тепер виконаємо графічно операцію заперечення отриманої множини.



Тепер виконаємо графічно окремо ліву частину рівності, тобто операцію об'єднання отриманої множин $\overline{A \cap \overline{B}}$ і множини B.



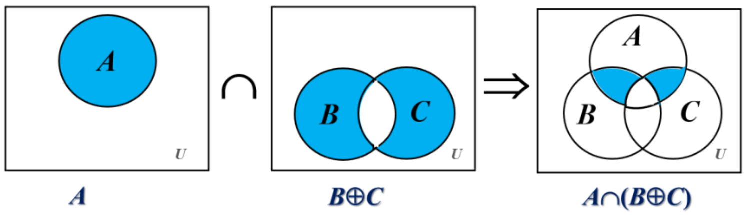
Тепер виконаємо графічно окремо праву частину рівності, тобто операцію об'єднання множини $\overline{A}$ і множини B.



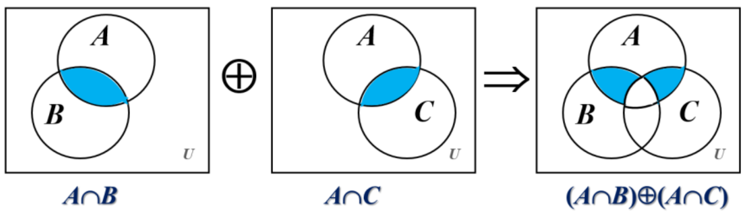
Як ми бачимо, для лівої та правої частин рівності отримано одну й ту ж саму область на площині. Отриманий збіг і доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

№ 2. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

Доведення. Спочатку побудуємо графічно множину, що відповідає лівій частині рівності, тобто перетину множини A з множиною $B \oplus C$.



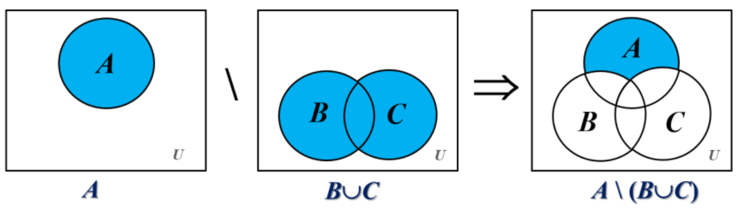
Тепер виконаємо графічно праву частину рівності, тобто побудуємо диз’юнктивну суму множини $A \cap B$ і множини $A \cap C$.



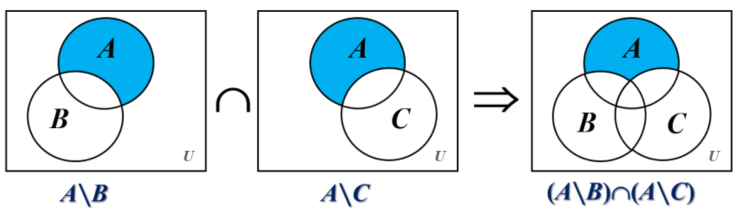
Як і в попередньому завданні, для лівої та правої частин рівності отримано одну й ту ж саму область на площині. Отриманий збіг доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

№ 3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Доведення. Спочатку побудуємо графічно множину, що відповідає лівій частині рівності, тобто різниці множини A і множини $B \cup C$.



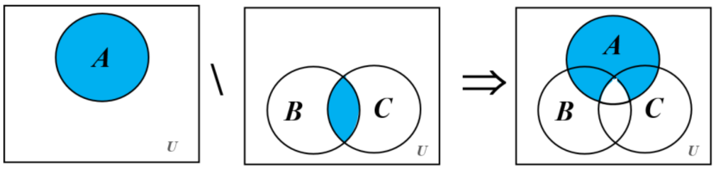
Тепер виконаємо графічно праву частину рівності, тобто побудуємо перетин множини $A \setminus B$ і множини $A \setminus C$.



В цьому випадку також для лівої та правої частин рівності отримано одну й ту ж саму область на площині. Отриманий збіг доводить наведену тотожність. _Тотожність доведено_.

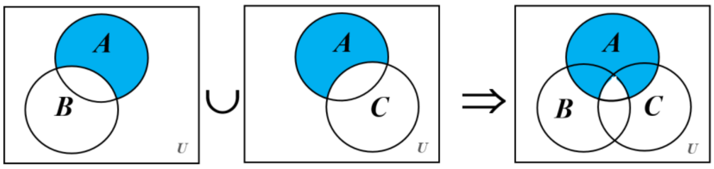
№ 4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Доведення. Спочатку побудуємо графічно множину, що відповідає лівій частині рівності, тобто різниці множини $\boldsymbol{A}$ і множини $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$.



A $\quad B \cap C \quad$ $A \setminus (B \cap C)$

Тепер виконаємо графічно праву частину рівності, тобто побудуємо об’єднання множини $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ і множини $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{C}$.

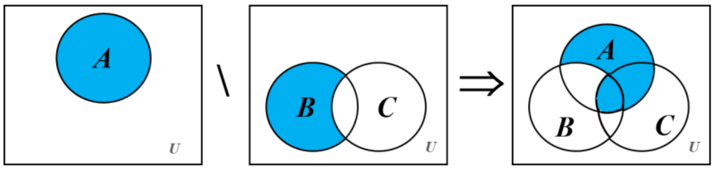


$A \setminus B$ $\quad A \setminus C \quad$ $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Знову для лівої та правої частин рівності отримано одну й ту ж саму область на площині. Отриманий збіг доводить наведену тотожність. _Тотожність доведено_.

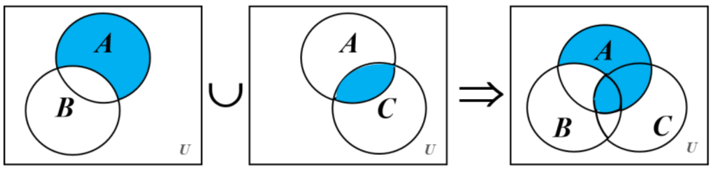
№ 5. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Доведення. Спочатку побудуємо графічно множину, що відповідає лівій частині рівності, тобто різниці множини $\boldsymbol{A}$ і множини $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{C}$.



A $\quad B \setminus C \quad$ $A \setminus (B \setminus C)$

Тепер виконаємо графічно праву частину рівності, тобто побудуємо об’єднання множини $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ і множини $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$.

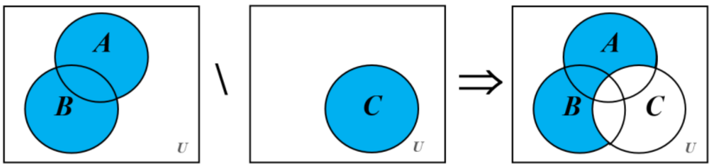


$A \setminus B$ $\quad A \cap C \quad$ $(A \setminus (B) \cup (A \cap C)$

Із наведених рисунків видно, що для лівої та правої частин рівності отримано одну й ту ж саму область на площині. Отриманий збіг доводить наведену тотожність. _Тотожність доведено_.

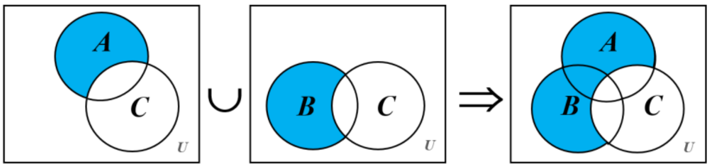
№ 6. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Доведення. Спочатку побудуємо графічно множину, що відповідає лівій частині рівності, тобто різниці множини $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ і множини $\boldsymbol{C}$.



$A \cup B$ $\quad C \quad$ $(A \cup B) \setminus C$

Тепер виконаємо графічно праву частину рівності, тобто побудуємо об'єднання множини $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ і множини $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{C}$.



$A \setminus C$ $\quad B \setminus C \quad$ $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Як видно із наведених рисунків, для лівої та правої частин рівності отримано одну й ту ж саму область на площині. Отриманий збіг доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Дайте означення основних операцій над множинами.
2. Дайте графічне подання основних операцій над множинами за допомогою кругів Ейлера.
3. Сформулюйте властивості основних операцій над множинами. Які з них є нетиповими для звичайної алгебри?
4. Які є способи доведення властивостей операцій над множинами?
5. Доведіть графічно закони де Моргана.
6. Доведіть графічно властивості диз'юнктивної суми.
7. Які з перелічених операцій можуть бути узагальнені та в який спосіб? Дайте графічну інтерпретацію.
8. Як відбувається узагальнення законів де Моргана? Дайте графічну інтерпретацію.
9. Зобразіть графічно множину $\overline{\overline{(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})} \cap (\overline{\overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{B}})}$.
10. Зобразіть графічно множину $\overline{(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \setminus (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})}$.
11. Зобразіть графічно множину $(\overline{\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{C}}}) \cup (\boldsymbol{B} \setminus \overline{\boldsymbol{C}})$.
12. Зобразіть графічно множину $(\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}) \cap (\boldsymbol{C} \setminus (\overline{\boldsymbol{A}} \oplus \overline{\boldsymbol{B}})$.
13. Графічно доведіть тотожність $(\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) \setminus \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{C}) \setminus (\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{C})$.
14. Графічно доведіть тотожність $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$.
15. Виходячи із відношення приналежності, доведіть справедливість тотожності $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}) = \varnothing$.
16. Виходячи із відношення приналежності, доведіть справедливість тотожності $(\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.
17. Виходячи із відношення приналежності, доведіть справедливість тотожності

$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.

3. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В АЛГЕБРІ МНОЖИН

3.1. СПРОЩЕННЯ ФОРМУЛ ТА АНАЛІТИЧНЕ ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Алгебра множин є теоретико-множинним аналогом звичайної алгебри дійсних чисел і заснована на властивостях операцій над множинами. За допомогою тотожних перетворень можна спрощувати або подавати в зручному вигляді різні вирази, що містять множини. Такі перетворення здійснюються послідовним застосуванням відповідних властивостей операцій над множинами [1].

<u>Приклад 2</u>. За допомогою тотожних перетворень з використанням властивостей операцій над множинами спростити наступні вирази.

а) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$.

<u>Розв'язання</u>.

$$(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* C *і множин* $\overline{B}$ *і* $\overline{A}$)

$$= (A \cap B \cap C) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* C *і множин* $A \cap B$ *і* $\overline{A} \cup \overline{B}$)

$$= ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B})) \cap C =$$

(*за законом де Моргана* (20) *для множини* $\overline{A} \cup \overline{B}$)

$$= ((A \cap B) \cup (\overline{A \cap B})) \cap C =$$

(*за властивістю універсуму* (11) *для множини* $A \cap B$)

$$= U \cap C =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* C)

$$= C.$$

<u>Відповідь</u>. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) = C$.

б) $(M \setminus N) \cap (N \setminus M)$.

<u>Розв'язання</u>.

$$(M \setminus N) \cap (N \setminus M) =$$

(*за властивістю операції різниці* (24) *для множин* M *і* N *та множин* N *і* M)

$$= (M \cap \overline{N}) \cap (N \cap \overline{M}) =$$

(*за законом асоціативності перетину* (4))

$$= \boldsymbol{M} \cap (\overline{\boldsymbol{N}} \cap \boldsymbol{N}) \cap \overline{\boldsymbol{M}} =$$

(*за властивістю порожньої множини* (9) *для множини* $\boldsymbol{N}$)

$$= \boldsymbol{M} \cap \varnothing \cap \overline{\boldsymbol{M}} =$$

(*за властивістю порожньої множини* (9) *для множини* $\boldsymbol{M} \cap \overline{\boldsymbol{M}}$)

$$= \varnothing.$$

Відповідь. $(\boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{N}) \cap (\boldsymbol{N} \setminus \boldsymbol{M}) = \varnothing$.

Приклад 2*б*, зокрема, ілюструє важливість введення поняття порожньої множини. Від самого початку зовсім не зрозуміло, що множина, яку задано виразом $(\boldsymbol{M} \setminus \boldsymbol{N}) \cap (\boldsymbol{N} \setminus \boldsymbol{M})$, є порожньою. Це стає очевидним лише після виконання відповідних перетворень. Якщо б порожню множину не було б введено, то подібні вирази не мали би сенсу [1].

3.2. РІВНЯННЯ З МНОЖИНАМИ

Разом з тотожностями, що є справедливими при будь-яких значеннях множин, які входять до складу цих тотожностей (підмножин універсуму $\boldsymbol{U}$), алгебра множин розглядає рівняння, що містять фіксовані підмножини $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$, і підмножини $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_n}$, що підлягають визначенню. В найпростішому випадку до складу рівняння входить одна така підмножина $\boldsymbol{X}$. Потрібно відповісти на питання, за яких умов рівняння має розв’язок і, якщо ці умови задовольняються, знайти всі таки розв’язки, тобто визначити $\boldsymbol{X}$. Розв’язання рівняння з однією підмножиною $\boldsymbol{X}$, що підлягає визначенню, ґрунтується на послідовності тотожних перетворень [1]:

1. Згідно з властивістю (31), рівність перетворюється в диз’юнктивну суму його лівої та правої частин, про яку вважається, що вона дорівнює порожній множині.
2. Отримане рівняння перетворюється до вигляду $(\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X}) \cup (\boldsymbol{N} \cap \overline{\boldsymbol{X}}) = \varnothing$, де $\boldsymbol{M}$ і $\boldsymbol{N}$ – деякі множини, що не містять $\boldsymbol{X}$ (можна показати, що будь-яке рівняння з правою частиною $\varnothing$ зводиться до такого вигляду).
3. В силу того, що об’єднання множин є порожнім лише за умови, що кожна з них також є порожньою множиною, перетворене рівняння записується залежною системою двох рівнянь: $\boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{X} = \varnothing$ і $\boldsymbol{N} \cap \overline{\boldsymbol{X}} = \varnothing$.
4. Пара рівнянь (а, як наслідок, і початкове рівняння) має сенс тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{X}$ і $\boldsymbol{X} \subset \overline{\boldsymbol{M}}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$.

Розв’язання. Будемо розв’язувати це рівняння, користуючись наведеним алгоритмом.

1. $(\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C}) \oplus \boldsymbol{D} = \varnothing$.

2. $((\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C}) \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup (\overline{(\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C})} \cap \boldsymbol{D}) =$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* $\overline{\boldsymbol{D}}$ *і множин* $\boldsymbol{X}$ *і* $\boldsymbol{C}$)

$$= ((\boldsymbol{X} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup (\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}})) \cup (\overline{(\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C})} \cap \boldsymbol{D}) =$$

(*за законом де Моргана* (19) *для множини* $\overline{\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{C}}$)

$$= ((X \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{D})) \cup (\overline{X} \cap \overline{C} \cap D) =$$

(*за властивістю універсуму* (13) *для множини* $C \cap \overline{D}$)

$$= ((X \cap \overline{D}) \cup ((C \cap \overline{D}) \cap U)) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$$

(*за законом асоціативності об'єднання множин* (3))

$$= (X \cap \overline{D}) \cup ((C \cap \overline{D}) \cap U) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$$

(*за властивістю універсуму* (11) *для множини* X)

$$= (X \cap \overline{D}) \cup ((C \cap \overline{D}) \cap (X \cup \overline{X})) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* $C \cap \overline{D}$ *та множин* X *і* $\overline{X}$)

$$= (\overline{D} \cap X) \cup (C \cap \overline{D} \cap X) \cup (C \cap \overline{D} \cap \overline{X}) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* X *та множин* $\overline{D}$ *і* $C \cap \overline{D}$)

$$= ((\overline{D} \cup (C \cap \overline{D})) \cap X) \cup (C \cap \overline{D} \cap \overline{X}) \cup (D \cap \overline{C} \cap \overline{X}) =$$

(*за законом дистрибутивності* (6) *для множини* $\overline{X}$ *та множин* $C \cap \overline{D}$ *і* $D \cap \overline{C}$)

$$= ((\overline{D} \cup (C \cap \overline{D})) \cap X) \cup (((C \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{C})) \cap \overline{X}) =$$

(*за законом елімінації* (6) *для множини* $\overline{D}$ *і* C)

$$= (\overline{D} \cap X) \cup (((C \cap \overline{D}) \cup (D \cap \overline{C})) \cap \overline{X}) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми* (25) *для множин* C *і* D)

$$= (\overline{D} \cap X) \cup ((C \oplus D) \cap \overline{X}) =$$

(*за пунктом* (2) *алгоритму розв'язання рівнянь*)

$$= \varnothing.$$

3. $\begin{cases} \overline{D} \cap X = \varnothing \ ; \\ (C \oplus D) \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$

4. **Умовою існування розв'язку** рівняння $X \cup C = D$ є включення $(C \oplus D) \subset D$ або $C \subset D$, причому рівнянню задовольняє така множина X, що $(C \oplus D) \subset X \subset D$. Якщо $C \subset D$, то $C \cap \overline{D} = \varnothing$ і $C \oplus D = \varnothing \cup (C \cap \overline{D}) = D \cap \overline{C} = D \setminus C$. Тому $(D \setminus C) \subset X \subset D$. Отже, будь-яка множина X, що входить в D, є розв'язком рівняння $X \cup C = D$.

Відповідь. Будь-яка така множина X, що $X \subset D$.

Слід зазначити, що при розв'язанні рівнянь застосування кругів Ейлера пов'язане з принциповими складнощами. Так, наприклад, розв'язуючи розглянуте в прикладі 3 рівняння $X \cup C = D$, треба побудувати круги для множини X і множини C в такий спосіб, щоб їх об'єднанням була множина D. Навіть взявши до уваги, що виконується включення $C \subset D$, і виконавши побудову, необхідно пояснити, як саме утворюються області, що відповідають значенням елементів множини X. Таким чином, круги Ейлера не містять повної інформації щодо розв'язку рівняння та його властивостей [1].

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

Довести тотожності аналітично за допомогою тотожних перетворень

№ 1. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

Доведення. Спочатку опрацюємо ***ліву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$(A \setminus B) \setminus C =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* A *і* B)

$$= (A \cap \overline{B}) \setminus C =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $A \cap \overline{B}$ *і* C)

$$= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} =$$

(*за властивістю асоціативності операції перетину множин*)

$$= A \cap \overline{B} \cap \overline{C};$$

Тепер опрацюємо ***праву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* A *і* C, *а також для множин* B *і* C)

$$= (A \cap \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}) =$$

(*за властивістю операції різниці для множини* $A \cap \overline{C}$ *і множини* $B \cap \overline{C}$)

$$= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}}\,) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{B \cap \overline{C}}$)

$$= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}\,) =$$

(*за властивістю подвійного доповнення для множини* $\overline{\overline{C}}$)

$$= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C\,) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* $A \cap \overline{C}$ *і множин* $\overline{B}$ *та* C)

$$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* C)

$$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \varnothing) =$$

(*за властивістю перетину з порожньою множиною для множини* A)

$$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup \varnothing =$$

(*за властивістю об'єднання з порожньою множиною для множини* $A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$)

$$= A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

Отримання тієї ж самої формули для лівої та правої частин рівності доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

№ 2. $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$

Доведення. Спочатку опрацюємо ***ліву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$A \setminus (A \setminus B) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* A *і* B)

$$= A \setminus (A \cap \overline{B}) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* A *і* $A \cap \overline{B}$)

$$= A \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{A \cap \overline{B}}$)

$$= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) =$$

(*за властивістю подвійного доповнення для множини* $\overline{\overline{B}}$)

$$= A \cap (\overline{A} \cup B) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* A *і множин* $\overline{A}$ *та* B)

$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) =$$

(*за властивістю об'єднання з порожньою множиною для множини* A)

$$= \varnothing \cup (A \cap B) =$$

(*за властивістю об'єднання з порожньою множиною для множини* $A \cap B$)

$$= A \cap B.$$

Тепер опрацюємо ***праву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$B \setminus (B \setminus A) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* B *і* A)

$$= B \setminus (B \cap \overline{A}) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* B *і* $B \cap \overline{A}$)

$$= B \cap (\overline{B \cap \overline{A}}) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{B \cap \overline{A}}$)

$$= B \cap (\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) =$$

(*за властивістю подвійного доповнення для множини* $\overline{\overline{A}}$)

$$= B \cap (\overline{B} \cup A) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* B *і множин* $\overline{B}$ *та* A)

$$= (B \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* B)

$$= \varnothing \cup (A \cap B) =$$

(*за властивістю об'єднання з порожньою множиною для множини* $A \cap B$)

$$= A \cap B.$$

Отримання тієї ж самої формули для лівої та правої частин рівності доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

№ 3. $(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Доведення. Спочатку опрацюємо ***ліву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $\overline{A}$ *і* $\overline{B}$ *та множин* $\overline{B}$ *і* $\overline{A}$)

$$= (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}) =$$

(*за властивістю подвійного доповнення для множин* $\overline{\overline{B}}$ *і* $\overline{\overline{A}}$)

$$= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

Тепер опрацюємо ***праву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $A \cup B$ *і* $A \cap B$)

$$= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{A \cap B}$)

$$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

(*за законом дистрибутивності для множин* A, B, $\overline{A}$ *і* $\overline{B}$)

$$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (B \cap \overline{B}) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* A *і множини* B)

$$= \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup \varnothing =$$

(*за властивістю об'єднання з порожньою множиною для множини* $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$)

$$= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) =$$

(*за законом комутативності об'єднання для множин* $A \cap \overline{B}$ *і* $\overline{A} \cap B$)

$$= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

Отримання тієї ж самої формули для лівої та правої частин рівності доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

№ 4. $\overline{(A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})} = (\overline{A} \cup C) \cap (\overline{B} \cup C)$

Доведення. Спочатку опрацюємо ***ліву частину*** рівності. Для неї маємо:

$$\overline{(A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C})} =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{C}}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{C}})}$)

$$= \overline{(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{C}})} \cap \overline{(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{C}})} =$$

(*за законом де Моргана для множин* $\overline{(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{C}})}$ *і множини* $\overline{(\boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{C}})}$)

$$= (\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\overline{\boldsymbol{C}}}) \cap (\overline{\boldsymbol{B}} \cup \overline{\overline{\boldsymbol{C}}}) =$$

(*за властивістю подвійного доповнення для множини* $\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}$)

$$= (\overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{C}) \cap (\overline{\boldsymbol{B}} \cup \boldsymbol{C}).$$

Отже, за допомогою послідовності тотожних перетворень формула в лівій частині рівності звелася до формули в ***правій частині*** рівності. Тому обробляти окремо праву частину рівності нема потреби. *Тотожність доведено*.

№ 5. $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D) = C$

Доведення. Очевидно, що права частина цієї рівності перетворень не потребує. Тому тотожність можна вважати доведеною, якщо вдасться звести до неї ліву частину рівності. Отже, маємо:

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{C}) \cup (\overline{\boldsymbol{B}} \cap \boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{D}) =$$

(*за законом дистрибутивності із цього виразу множину* $\boldsymbol{C}$ *можна винести за дужки*)

$$= \boldsymbol{C} \cap ((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}} \cup \boldsymbol{D}) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}} \cup \boldsymbol{D}$)

$$= \boldsymbol{C} \cap ((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{D}}) \cup \overline{(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{D}})}) =$$

(*за властивістю універсуму для множини* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{D}}$)

$$= \boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{U} =$$

(*за властивістю перетину з універсумом для множини* $\boldsymbol{C}$)

$$= \boldsymbol{C}.$$

Застосування властивостей операцій над множинами та основних законів та тотожностей алгебри множин дозволило перетворити ліву частину рівності в праву, що й доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. В який спосіб виконуються тотожні перетворення в алгебрі множин?
2. За яким алгоритмом відбувається розв’язання рівнянь з множинами?
3. Що спільного та різного у операцій диз’юнктивної суми та об’єднання множин?
4. За яких умов результати об’єднання та диз’юнктивної суми збігаються?
5. Аналітично спростити вираз $\overline{\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} \cap (\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}})}$.
6. Аналітично довести тотожність $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) \cup \overline{\boldsymbol{B}} \cup \overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{U}$.
7. Аналітично довести тотожність $\overline{(\overline{\overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{B}}) \cup (\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}})} = \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$.

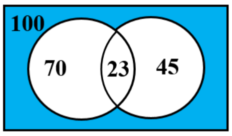
8. Аналітично довести тотожність $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$.
9. Аналітично спростити вираз $(\overline{A \cup B \cup C \cup D}) \cap (\overline{\overline{A} \cap \overline{B}})$.
10. Аналітично спростити вираз $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

4. МЕТОД ВКЛЮЧЕНЬ ТА ВИЛУЧЕНЬ

На практиці круги Ейлера можуть стати у нагоді при розв'язанні задач на знаходження кількості елементів (потужності) деякої скінченної множини, що отримана в результаті виконання описаних операцій над іншими скінченними множинами. При цьому потужності початкових множин вважаються відомими [1].

Приклад 4. В деякій групі із 100 туристів 70 осіб володіють англійською мовою, 45 осіб володіють французькою мовою і 23 особи володіють обома цими мовами. Скільки туристів в цій групі не володіють жодною з вказаних мов?

Розв'язання. Позначимо множину тих туристів групи, що володіють англійською мовою, через A. Тоді із умови задачі випливає, що $|A|=70$. Позначимо множину тих туристів



групи, що володіють французькою мовою, через F. Тоді стає очевидним, що $|F|=45$. В той же час в умові задачі присутні елементи, що не належать жодній з цих множин (саме цю кількість туристів необхідно знайти). В розгляданні беруть участь лише туристи деякої групи. Тому її можна взяти за універсум. Таким чином, маємо, що універсум містить 100 елементів, тобто $|U|=100$. Тепер за допомогою кругів Ейлера необхідно визначити ту множину, потужність якої нас цікавить. З наведеної схеми видно, що туристи групи, які володіють обома вказаними мовами – це елементи множини $A \cap F$. Із умови задачі відомо, що $|A \cap F|=23$. Нам необхідно знайти потужність множини, область якої на схемі пофарбовано блакитним кольором. Позначимо цю множину через X. Із схеми видно, що шукана множина складається зі всіх тих елементів універсуму (туристів групи), що не належать множині A (не володіють англійською мовою) і не належать множині F (не володіють також і французькою мовою). Тому із універсуму необхідно вилучити всі елементи множини A і всі елементи множини F. Але при виконанні цієї операції елементи множини $(A \cap F)$ (група із 23 осіб, що володіють обома мовами), були вилучені двічі. Але в множині вони присутні лише один раз. Після вилучення з U всіх елементів множини A, вони вже не містяться в шуканій множині, тому немає необхідності вилучати їх ще раз вже як елементи множини F. Отже, ці елементи необхідно один раз повернути до множини. Таким чином, кількість елементів шуканої множини обчислюється в наступний спосіб:

$$|X| = |U| - |A| - |F| + |A \cap F| = 100 - 70 - 45 + 23 = 8.$$

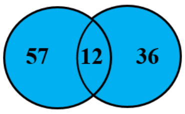
Відповідь. В цій групі **8** туристів не володіють ані англійською, ані французькою мовами.

Однак необхідність брати до розгляду множину-універсум виникає далеко не завжди [1].

Приклад 5. В кондитерській покупці зазвичай купують або один торт, або одну коробку цукерок, або один торт і одну коробку цукерок. Протягом одного дня було продано

57 тортів і 36 коробок цукерок. Скільки було покупців, якщо 12 осіб придбали і торт, і коробку цукерок?

Розв'язання. Позначимо множину покупців, що купували торти, через $\boldsymbol{T}$. Із умови задачі випливає, що $|\boldsymbol{T}|$**=57**. Позначимо множину покупців, що купували цукерки, через $\boldsymbol{K}$. Очевидно, що $|\boldsymbol{K}|$**=36**. В умові задачі не фігурують ті елементи, що не належать жодній з цих множин (розглядаються лише справжні покупці). Тому немає потреби визначати множину-універсум $\boldsymbol{U}$. Тепер за допомогою кругів Ейлера необхідно визначити множину, потужність якої нас цікавить. Із схеми можна побачити, що покупці, які придбали і торт, і цукерки – це елементи множини $(\boldsymbol{T}\cap\boldsymbol{K})$. Із умови задачі відомо, що $|\boldsymbol{T}\cap\boldsymbol{K}|$**=12**. Нас цікавить загальна кількість покупців, тобто потужність множини $(\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{K})$. Область, що відповідає цій множині, на схемі зафарбовано блакитним кольором. Елементами шуканої множини є всі елементи множини $\boldsymbol{T}$ і всі елементи множини $\boldsymbol{K}$. Але якщо додати потужності цих множин, то елементи, що належать обом цим множинам одночасно, тобто належать множині $\boldsymbol{T}\cap\boldsymbol{K}$, будуть враховані двічі (в складі елементів множини $\boldsymbol{T}$ і в складі елементів множини $\boldsymbol{K}$). Тому один раз ці елементи потрібно вилучити із розгляду, тому що при переліку елементів множини ті елементи, що повторюються, треба враховувати лише один раз. Таким чином, кількість елементів шуканої множини обчислюється в наступний спосіб:



$$|\boldsymbol{T}\cup\boldsymbol{K}| = |\boldsymbol{T}| + |\boldsymbol{K}| - |\boldsymbol{T}\cap\boldsymbol{K}| = \mathbf{57+36-12=81}.$$

Відповідь. Протягом дня кондитерську відвідав **81** покупець.

Користуючись формулою

$$|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|, \tag{33}$$

справедливість якої було обґрунтовано при розв'язанні прикладу 5, і властивостями операцій над множинами (1) – (14), можна отримати формулу для кількості елементів будь-якої скінченної сукупності скінченних множин [4].

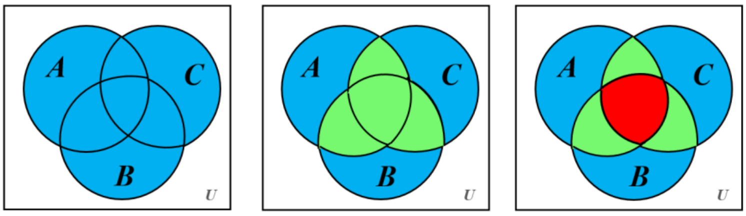
Приклад 6. Необхідно знайти потужність об'єднання трьох скінченних множин.

Розв'язання.

$$|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}\cup(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A}\cap(\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C})| =$$
$$= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}| - |(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cup(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})| =$$
$$= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}| - (|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}| - |(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\cap(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})| =$$
$$= |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}|.$$

Відповідь. $|\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|+|\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\boldsymbol{C}|$.

Процес розв'язання задачі 6 за допомогою кругів Ейлера наочно зображений на рис. 12 [1]. Спочатку множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ об'єднуються (рис. 12*а*). При цьому області їх попарних перетинів (на рис. 12*б* їх зафарбовано зеленим кольором) враховуються кожна по два рази. Отже, по одному разу їх треба відняти. В процесі цього віднімання область перетину всіх трьох множин одночасно (на рис. 12*в* її зафарбовано червоним кольором) віднімається тричі. Таким чином, цю область з самого початку було враховано тричі (з кожною із множин при їх об'єднанні), потім тричі вилучено (з кожним із попарних перетинів при їх вилученні). Отже, при виконаній послідовності дій її не буде враховано жодного разу. Тому елементи цієї області один раз треба додати. Це приводить нас до формули, що отримано як відповідь у прикладі 6.



а) *б*) *в*)

Рис. 12. – Метод включень та вилучень для трьох множин

Виходячи з отриманих результатів, можна сформулювати наступну загальну теорему [4].

Теорема 9. *Формулювання*. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – деякі скінченні множини, то потужність множини, яку отримано в результаті їх об'єднання, обчислюється за формулою:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} |A_i \cap A_j| + \tag{34}$$
$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{\substack{i,j,\ldots,m \\ i \neq j \neq \cdots \neq m}} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m| \ .$$

Доведення. Щоб довести цю теорему, треба показати, що кожен елемент множини $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ враховується в правій частині рівності (34) лише один раз. Нехай $a \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ – такий елемент, що міститься в складі x множин зі всіх можливих A_i, $i = \overline{1, n}$. Тоді цей елемент a враховується в правій частині рівності (1.33) $C_x^1 - C_x^2 + C_x^3 - \ldots + (-1)^{x-1} C_x^x$ разів. Але в той же час,

$$C_x^1 - C_x^2 + C_x^3 - \ldots + (-1)^{x-1} C_x^x =$$
$$= 1 - (1 - C_x^1 + C_x^2 - C_x^3 + \ldots + (-1)^{x-1} C_x^x) = 1 - (1 - 1)^x = 1.$$

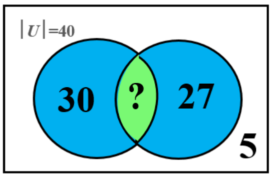
Цей результат свідчить про те, що кожен елемент $a \in (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ враховується в правій частині виразу (34) лише один раз. **Теорему доведено**.

Означення. Метод обчислення кількості елементів скінченної множини за формулою (34), що полягає в послідовному виконанні операцій додавання та віднімання, які чергуються між собою, називається *методом включень та вилучень* [1].

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

№ 1. ***В групі із 40 дітей 30 вміють плавати, 27 вміють грати в шахи і лише 5 не вміють ні того, ні іншого. Скільки дітей в цій групі вміють і плавати, і грати в шахи?***

Розв'язання. В розгляданні беруть участь лише діти із описаної групи. Тому всіх дітей цієї групи доцільно прийняти за універсум $\boldsymbol{U}$. Таким чином, отримуємо, що $|\boldsymbol{U}| = \mathbf{40}$.



Позначимо множину дітей із цієї групи, які вміють плавати, через $\boldsymbol{П}$. З умови задачі відомо, що $|\boldsymbol{П}| = \mathbf{30}$. Позначимо множину дітей цієї групи, які вміють грати в шахи, через $\boldsymbol{Ш}$. З умови задачі потужність цієї множини також відома і складає $|\boldsymbol{Ш}| = \mathbf{27}$. На схемі множина дітей, які володіють хоча б однією з зазначених навичок, зафарбовано синім кольором. Множина дітей, які не вміють ані плавати, ані грати в шахи, на схемі залишилася білою та відповідає множині $(\overline{П} \cap \overline{Ш})$. З умови задачі також відомо, що $|\overline{П} \cap \overline{Ш}| = \mathbf{5}$. Діти, які вміють і плавати, і грати в шахи належать до перетину множин $\boldsymbol{П}$ і $\boldsymbol{Ш}$. Цей перетин на схемі зафарбовано зеленим кольором. Саме його потужність і треба знайти. Позначимо цю потужність як $|\boldsymbol{П} \cap \boldsymbol{Ш}| = \boldsymbol{x}$. Отже, з одного боку, користуючись методом включень та вилучень, маємо співвідношення

$$|\boldsymbol{П} \cup \boldsymbol{Ш}| = |\boldsymbol{П}| + |\boldsymbol{Ш}| - |\boldsymbol{П} \cap \boldsymbol{Ш}|.$$

З іншого боку, як видно із наведеної схеми, об'єднання $\boldsymbol{П} \cup \boldsymbol{Ш}$ містить всі ті елементи універсуму, які не належать перетину $\overline{П} \cap \overline{Ш}$. Таким чином, має місце співвідношення:

$$|\boldsymbol{П} \cup \boldsymbol{Ш}| = |\boldsymbol{U}| - |\overline{П} \cap \overline{Ш}|.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$|\boldsymbol{П}| + |\boldsymbol{Ш}| - |\boldsymbol{П} \cap \boldsymbol{Ш}| = |\boldsymbol{U}| - |\overline{П} \cap \overline{Ш}|.$$

Підставляючи до цього виразу всі відомі з умови задачі дані, отримуємо наступне рівняння:

$$\mathbf{30 + 27} - \boldsymbol{x} = \mathbf{40 - 5}.$$

Розв'язавши це рівняння, отримуємо кількість дітей, які вміють і плавати, і грати у шахи:

$$\mathbf{57} - \boldsymbol{x} = \mathbf{35};$$

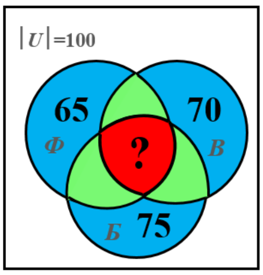
$$\boldsymbol{x} = \mathbf{57 - 35};$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{22}.$$

Відповідь. В зазначеній групі **22** дитини вміють і плавати, і грати в шахи.

№ 2. *В спортивному таборі 65 % дітей вміють грати в футбол, 70 % вміють грати в волейбол і 75 % вміють грати в баскетбол. Яка найменша кількість дітей, що вміють грати і в футбол, і в волейбол, і в баскетбол?*

Розв'язання. Як і в попередній задачі, в розгляданні беруть участь лише діти, що



відпочивають в даному таборі. Тому за універсум доцільно обрати всю кількість дітей в таборі. Умову задачі сформульовано у відсотковому поданні. Тому в якості потужності цього універсуму виступає повна кількість дітей, тобто всі 100%. Таким чином, $|\boldsymbol{U}| = \mathbf{100}$. Позначимо множину дітей, які вміють грати у футбол, через $\boldsymbol{Ф}$. Множину дітей, що вміють грати у волейбол, позначимо через $\boldsymbol{B}$. Через $\boldsymbol{Б}$ позначимо множину дітей, які вміють грати у баскетбол. З умови задачі відомо, що $|\boldsymbol{Ф}| = 65$, $|\boldsymbol{B}| = 70$ і $|\boldsymbol{Б}| = 75$. На схемі діти, що вміють грати лише в одну з зазначених ігор, зафарбовані синім кольором. Діти, що вміють грати в якісь дві з трьох зазначених ігор (попарні перетини множин $\boldsymbol{Ф}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{Б}$), на схемі розташовані в області, яку зафарбовано зеленим кольором. Діти, які опанували всі три гри, є елементами множини, яку на схемі зафарбовано червоним кольором. Ця червона область відповідає перетину всіх трьох множин. Саме її потужність і треба знайти в цій задачі. Позначимо цю величину через $|\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{Б}| = x$.

Конкретна кількість дітей в кожній множині, а тому і в їх перетинах або об'єднаннях, невідома. Тому **припустимо**, що всі діти в таборі вміють грати в ***футбол або в волейбол***, тобто $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Ф} \cup \boldsymbol{B}$. Тоді, згідно з методом включень та вилучень, маємо, що

$$|\boldsymbol{U}| = |\boldsymbol{Ф} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{Ф}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{B}|,$$

звідки випливає, що мінімальна кількість дітей, які одночасно вміють грати і в футбол, і в волейбол, можна знайти із співвідношення

$$|\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{Ф}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{U}| = 65\ \% + 70\ \% - 100\ \% = 35\ \%.$$

Тепер **припустимо**, що всі діти в таборі вміють грати в ***футбол або в баскетбол***, тобто $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Ф} \cup \boldsymbol{Б}$. Тоді, згідно з методом включень та вилучень, маємо, що

$$|\boldsymbol{U}| = |\boldsymbol{Ф} \cup \boldsymbol{Б}| = |\boldsymbol{Ф}| + |\boldsymbol{Б}| - |\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{Б}|,$$

звідки випливає, що мінімальна кількість дітей, які одночасно вміють грати і в футбол, і в баскетбол, можна знайти із співвідношення

$$|\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{Б}| = |\boldsymbol{Ф}| + |\boldsymbol{Б}| - |\boldsymbol{U}| = 65\ \% + 75\ \% - 100\ \% = 40\ \%.$$

Тепер **припустимо**, що всі діти в таборі вміють грати в ***волейбол або в баскетбол***, тобто $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{Б}$. Тоді, згідно з методом включень та вилучень, маємо, що

$$|\boldsymbol{U}| = |\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{Б}| = |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{Б}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{Б}|,$$

звідки випливає, що мінімальна кількість дітей, які одночасно вміють грати і в волейбол, і в баскетбол, можна знайти із співвідношення

$$|\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{Б}| = |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{Б}| - |\boldsymbol{U}| = 70\ \% + 75\ \% - 100\ \% = 45\ \%.$$

Припущення, яке мінімізує кількість дітей, передбачає, що $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Ф} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{Б}$. Тоді, згідно з методом включень та вилучень для трьох множин, маємо:

$$|\boldsymbol{Ф} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{Б}| = |\boldsymbol{Ф}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{Б}| - |\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{Б}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{Б}| + |\boldsymbol{Ф} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{Б}|.$$

Підставляючи у цей вираз всі вже відомі величини, отримуємо

$$100 = 65 + 70 + 75 - 35 - 40 - 45 + x;$$

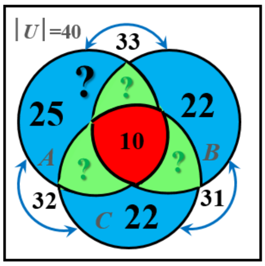
$$x = 10\ \%.$$

Відповідь. Найменша кількість дітей, які опанували всі три гри (і футбол, і волейбол, і баскетбол), складає **10 %** від загальної кількості дітей в таборі.

№ 3. ***Із 40 учнів класу книгу «А» прочитали 25 дітей, книгу «В» і книгу «С» кожну прочитали по 22 дитини. Книгу «А» або книгу «В» прочитали 33 учня. Книгу «А» або книгу «С» прочитали 32 учня. Книгу «В» або книгу «С» прочитав 31 учень. Всі три книги прочитали 10 учнів.***

а) ***Скільки учнів прочитали лише по одній книзі?***

Розв'язання. В розгляданні беруть участь лише учні зазначеного класу. Тому саме цей клас доцільно прийняти за універсум $\boldsymbol{U}$. Із умови задачі відомо, що $|\boldsymbol{U}| = \mathbf{40}$. Через $\boldsymbol{A}$ позначимо множину дітей, що прочитали книгу «*А*», через $\boldsymbol{B}$ – множину дітей, що прочитали книгу «*В*», і через $\boldsymbol{C}$ – множину дітей, які прочитали книгу «*С*». Як відомо із умови задачі, $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{25}$, $|\boldsymbol{B}| = \mathbf{22}$ і $|\boldsymbol{C}| = \mathbf{22}$. Діти, що прочитали книгу «*А*» або книгу «*В*» складають об'єднання $\boldsymbol{A \cup B}$, діти, що прочитали книгу «*А*» або «*С*» - об'єднання $\boldsymbol{A \cup C}$, а діти, що прочитали книгу «*В*» або книгу «*С*» - об'єднання $\boldsymbol{B \cup C}$. Потужності цих об'єднань з умови задачі також відомі: $|\boldsymbol{A \cup B}| = \mathbf{33}$, $|\boldsymbol{A \cup C}| = \mathbf{32}$ і $|\boldsymbol{B \cup C}| = \mathbf{31}$. Діти, що прочитали всі три книжки, складають перетин всіх трьох множин. На схемі цей перетин зафарбовано червоним кольором. Його потужність також відома із умови задачі: $|\boldsymbol{A \cap B \cap C}| = \mathbf{10}$. Множина, потужність якої потрібно знайти, на схемі залишилась зафарбованою синім кольором. Позначимо цю потужність через $\boldsymbol{x}$.



З формули методу включень та вилучень для двох множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ маємо, що

$$\mathbf{33} = |\boldsymbol{A \cup B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A \cap B}| = \mathbf{25 + 22} - |\boldsymbol{A \cap B}| = \mathbf{47} - |\boldsymbol{A \cap B}|.$$

Звідси випливає, що

$$|\boldsymbol{A \cap B}| = \mathbf{47 - 33 = 14}.$$

З формули методу включень та вилучень для двох множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ маємо, що

$$\mathbf{32} = |\boldsymbol{A \cup C}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A \cap C}| = \mathbf{25 + 22} - |\boldsymbol{A \cap C}| = \mathbf{47} - |\boldsymbol{A \cap C}|.$$

Звідси випливає, що

$$|\boldsymbol{A \cap C}| = \mathbf{47 - 32 = 15}.$$

З формули методу включень та вилучень для двох множин $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ маємо, що

$$\mathbf{31} = |\boldsymbol{B \cup C}| = |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B \cap C}| = \mathbf{22 + 22} - |\boldsymbol{B \cap C}| = \mathbf{44} - |\boldsymbol{B \cap C}|.$$

Звідси випливає, що

$$|\boldsymbol{B \cap C}| = \mathbf{44 - 31 = 13}.$$

При об'єднанні множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ кожний з їх попарних перетинів (зелені області на схемі) був врахований двічі (по одному разу з кожною множиною). Але до складу множини, яку треба знайти, ці попарні перетини взагалі не входять. Тому із суми елементів множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ кожний із цих попарних перетинів треба двічі відняти. Але при цьому треба враховувати, що червона область міститься в кожній із зелених. При додаванні елементів множин A, B і C цю область було враховано тричі, а потім при відніманні елементів попарних перетинів шість раз віднято. Для підтримки нульового балансу (ці елементи також не входить до множини, потужність якої є метою даної задачі) елементи цього потрійного перетину треба знову тричі додати (тричі додали, шість разів відняли і ще тричі додали). Таким чином, для потужності множини, яка на схемі залишилася синьою, маємо наступний вираз:

$$x = |A|+|B|+|C| - 2\cdot|A \cap B| - 2\cdot|A \cap C| - 2\cdot|B \cap C| + 3\cdot|A \cap B \cap C|.$$

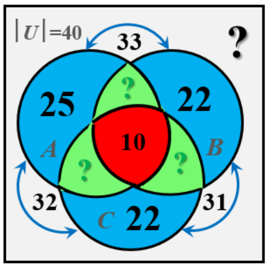
Підставляючи в цей вираз всі відомі величини, отримуємо:

$$x = 25 + 22 + 22 - 2\cdot 14 - 2\cdot 15 - 2\cdot 13 + 3\cdot 10 = 69 - 84 + 30 = 15.$$

Відповідь. Лише по одній книжці прочитали **15** учнів зазначеного класу.

б) ***Скільки учнів не прочитали жодної книги?***

Розв'язання. Всі позначення та кількісні характеристики для універсуму U і множин A, B і C є тими ж самими, що й для попереднього завдання. Тобто розглядається той самий клас і ті самі учні класу. В попередньому завданні універсум та учні, що не прочитали жодної книжки, не брали участі у розрахунках. Але тепер нас цікавить частина універсуму, яка на новій схемі зафарбована сірим кольором. Вона є доповненням до універсуму об'єднання множин A, B і C (множини тих учнів, що прочитали хоча б щось із зазначеного списку літератури). Потужність цього доповнення – це різниця між потужністю універсуму та потужністю об'єднання множин A, B і C. Позначимо цю потрібну потужність через x. Метод включень та вилучень для трьох множин A, B і C дозволяє записати формулу для потужності їх об'єднання:



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Таким чином, для потужності потрібної множини маємо співвідношення

$$x = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Потужності попарних перетинів було знайдено при розв'язанні попереднього завдання. Тому зараз можна використовувати цей вже відомий результат. Отже, підставляючи в дане співвідношення всі відомі величини, отримуємо:

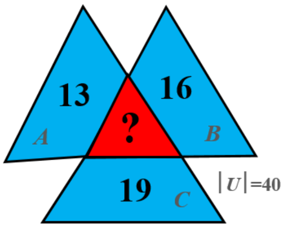
$$x = 40 - 25 - 22 - 22 + 14 + 15 + 13 - 10 = 82 - 79 = 3.$$

Відповідь. Жодної книги із зазначеного списку не прочитали **3** учні класу.

№ 4. ***Протягом доби в кінотеатрі демонструвалися дитячі фільми «А», «В» і «С». Кінотеатр відвідали 40 дітей. Кожен з них подивився або всі три фільми, або лише один з трьох. При цьому фільм «А» подивилися 13 дітей, фільм «В» подивилися 16 дітей і***

фільм «С» подивилися 19 дітей. Скільки дітей подивилися всі три фільми?

<u>*Розв'язання*</u>. Позначимо через $\boldsymbol{A}$ множину дітей, які подивилися фільм «*А*», через $\boldsymbol{B}$ – множину дітей, які подивилися фільм «*В*» і через $\boldsymbol{C}$ – множину дітей, що подивилися фільм «*С*».



Потужності цих множин з умови задачі відомі: $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{13}$, $|\boldsymbol{B}| = \mathbf{16}$ і $|\boldsymbol{C}| = \mathbf{19}$. В розгляданні беруть участь лише ті діти, які відвідали кінотеатр. Тому за універсум $\boldsymbol{U}$ доцільно прийняти саме цю множину дітей, тобто $|\boldsymbol{U}| = \mathbf{40}$. Але з умови задачі відомо, що кожна дитина, яка відвідала кінотеатр, подивилася хоча б один фільм. Тобто універсум не містить елементів, які б не належали хоча б одній з множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ або $\boldsymbol{C}$. Таким чином, очевидно, що універсум збігається з об'єднанням цих множин, тобто $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$. До того ж нема жодної дитини, яка б подивилася лише два фільми із трьох запропонованих – або один, або всі три. Це означає, що множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ не мають попарних перетинів, лише їх спільний потрійний перетин. З цього випливає, що для графічного зображення описаної ситуації круги використовувати не треба, бо вони завжди будуть мати попарні перетини. В описаній ситуації стануть в нагоді трикутники, за допомогою яких цей випадок графічно можна зобразити правильно. На схемі цей єдиний можливий перетин всіх трьох множин зафарбовано червоним кольором. Необхідно знайти потужність саме той множини, що відповідає цій червоній області. Позначимо її через $|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| = \boldsymbol{x}$.

При обчисленні кількості елементів об'єднання множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ їх спільний перетин був врахований тричі. Тому двічі його треба відняти від суми елементів множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. З урахуванням того, то вказані множини не мають попарних перетинів, більше ніякі величини в обчисленні участі не беруть. Таким чином, маємо наступне співвідношення:

$$|\boldsymbol{U}| = |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - 2 \cdot |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|.$$

Підставляючи у цей вираз всі відомі величини, отримуємо:

$$\mathbf{40 = 13 + 16 + 19 - 2}\,\boldsymbol{x}\,;$$

$$\mathbf{2}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{8}\,;$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{4}.$$

<u>*Відповідь*</u>. Всі три фільми переглянули **4** дитини.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. В чому полягає метод включень та вилучень?
2. Дайте графічне обґрунтування методу включень та вилучень для двох та трьох множин.
3. Кожен з учнів класу протягом місяця рівно двічі відвідав театр. При цьому одночасно на спектаклі «*А*» були присутніми 25 дітей, на спектаклі «*В*» - 12 дітей, на спектаклі «*С*» - 23 дитини. Скільки учнів в класі? Скільки з них бачили спектаклі «*А*» і «*В*»? Скільки з них бачили спектаклі «*А*» і «*С*»? скільки з них бачили спектаклі «*В*» і «*С*» ? [3]

4. В групі студентів кожен студент або блондин, або брюнет. Серед студентів 10 блондинів, решта – брюнети. 12 студентів люблять читати детективи. Серед цих 12-ти 5 блондинів і 7 брюнетів. Скільки студенті в групі, якщо два брюнети не люблять читати детективи [4]?
5. В кімнаті знаходиться декілька людей, кожен з яких володіє хоча б однією з трьох мов: 6 чоловік володіють англійською, 6 – німецькою і 7 – французькою. При цьому 4 знають і англійську, і німецьку; 3 – німецьку та французьку; 2 – англійську та французьку. Одна людина володіє всіма трьома мовами. Скільки осіб в кімнаті? Скільки з них володіє лише англійською мовою [13]?
6. В класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують і математичний, і фізичний гуртки? Скільки учнів відвідують лише математичний гурток?
7. При дослідженні читацьких смаків виявилося, що 60 % студентів читають журнал «*A*», 50 % - журнал «*B*», 50 % - журнал «*C*». При цьому 30 % читають журнали «*A*» і «*B*», 20 % - журнали «*B*» і «*C*», 40 % - журнали «*A*» і «*C*». Всі три журнали читають 10 % студентів. Який відсоток студентів не читає жодного з цих журналів? Який відсоток студентів читає рівно 2 журнали? Який відсоток студентів читає не менше двох журналів?

5. КОРТЕЖІ

5.1. ДЕКАРТОВИЙ ДОБУТОК МНОЖИН

Означення. *Декартовий* (*прямий*) *добуток* множин $\boldsymbol{A\times B}$ – це множина всіх упорядкованих пар елементів $\boldsymbol{(a, b)}$, із яких $\boldsymbol{a\in A}$, $\boldsymbol{b\in B}$, тобто $\boldsymbol{A \times B = \{(a, b)\colon a\in A, b\in B\}}$.

Наприклад, для множин $\boldsymbol{A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}}$ і $\boldsymbol{B=\{b_1, b_2\}}$ їх декартовим добутком буде множина $\boldsymbol{A\times B=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_2)\}}$. Порядок розташування пар може бути довільним, але розташування елементів в кожній парі визначається порядком розташування множин, для яких виконується добуток [1]. Тому **декартовий добуток множин не є комутативним**. Тобто ***якщо*** $\boldsymbol{A\neq B}$, ***то*** $\boldsymbol{A\times B \neq B\times A}$.

Слід звернути увагу на суттєву відмінність декартового добутку множин від введених раніше операцій над множинами. В результаті таких операцій як об’єднання, перетин тощо завжди отримуємо множину, елементи якої (якщо вона не порожня) належать початковим множинам. Елементи декартового добутку множин істотно відрізняються від елементів помножувачів і є об’єктами іншої категорії. Тому зобразити графічно за допомогою діаграм Ейлера-Венна декартовий добуток множин неможливо [1].

Незважаючи на те, що декартовий добуток множин не підкорюється комутативному та асоціативному законам, для нього виконуються *законі дистрибутивності відносно операцій об’єднання, перетину і різниці* [1], а також *властивість порожньої множини* [14]:

$$\boldsymbol{A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)}; \quad (35)$$

$$\boldsymbol{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}; \quad (36)$$

$$\boldsymbol{A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)}; \quad (37)$$

$$A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C); \quad (38)$$

$$A \times \varnothing = \varnothing \times A = A. \quad (39)$$

Для доведення цих властивостей можна використовувати властивості відношення включення [14]. Доведемо **рівність (35)**.

Доведення. Якщо $(x, y) \in (A \times (B \cup C))$, то, за означенням декартового добутку, $x \in A$, а $y \in (B \cup C)$. З того, що $y \in (B \cup C)$ випливає, що $y \in B$ або $y \in C$. Якщо $y \in B$, то $(x, y) \in (A \times B)$. Якщо ж $y \in C$, то $(x, y) \in (A \times C)$. Таким чином, $(x, y) \in (A \times B)$ або $(x, y) \in (A \times C)$, тобто $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Отже, $(A \times (B \cup C)) \subseteq ((A \times B) \cup (A \times C))$.

Нехай тепер $(x, y) \in ((A \times B) \cup (A \times C))$. Тоді за означенням операції об’єднання множин, $(x, y) \in (A \times B)$ або $(x, y) \in (A \times C)$. Якщо $(x, y) \in (A \times B)$, то, за означенням декартового добутку множин, $x \in A$ і $y \in B$. Якщо ж $(x, y) \in (A \times C)$, то $x \in A$ і $y \in C$. Таким чином, в будь-якому випадку $x \in A$, а для y може виконуватися будь-яке відношення приналежності з $y \in B$ і $y \in C$, тобто $y \in (B \cup C)$. Отже, $((A \times B) \cup (A \times C)) \subseteq (A \times (B \cup C))$.

З урахуванням властивостей відношення включення, $(A \times (B \cup C)) = ((A \times B) \cup (A \times C))$. Таким чином, **рівність (35) доведено**.

Доведемо тепер **властивість (36)**.

Доведення. Якщо $(x, y) \in (A \times (B \cap C))$, то, за означенням декартового добутку, $x \in A$, а $y \in (B \cap C)$. З того, що $y \in (B \cap C)$ випливає, що одночасно $y \in B$ і $y \in C$. Таким чином, одночасно виконуються два відношення приналежності: $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \in (A \times C)$, тобто $(x, y) \in ((A \times B) \cap (A \times C))$. Отже, $(A \times (B \cap C)) \subseteq ((A \times B) \cap (A \times C))$.

Нехай тепер $(x, y) \in ((A \times B) \cap (A \times C))$. Тоді за означенням операції перетину множин, $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \in (A \times C)$ одночасно. З того, що $(x, y) \in (A \times B)$ випливає, що $x \in A$ і $y \in B$. В свою чергу, з того, що $(x, y) \in (A \times C)$ випливає, що $x \in A$ і $y \in C$. Таким чином, для y одночасно виконуються два відношення приналежності: $y \in B$ і $y \in C$, тобто $y \in (B \cap C)$. З урахуванням того, що $x \in A$, можна стверджувати, що $(x, y) \in (A \times (B \cap C))$. Отже, $((A \times B) \cap (A \times C)) \subseteq (A \times (B \cap C))$. Одночасне виконання двох отриманих відношень включення доводить рівність $(A \times (B \cap C)) = ((A \times B) \cap (A \times C))$. Таким чином, **рівність (36) доведено**.

Доведемо тепер **властивість (37)**.

Доведення. Якщо $(x, y) \in (A \times (B \setminus C))$, то, за означенням декартового добутку, $x \in A$, а $y \in (B \setminus C)$. З того, що $y \in (B \setminus C)$ випливає, що $y \in B$ і $y \notin C$. Таким чином, $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \notin (A \times C)$, тобто $(x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C)$. Отже, $(A \setminus (B \times C)) \subseteq ((A \times B) \setminus (A \times C))$.

Нехай тепер $(x, y) \in ((A \times B) \setminus (A \times C))$. Це означає, що, за означенням операції різниці множин, $(x, y) \in (A \times B)$ і $(x, y) \notin (A \times C)$. З того, що $(x, y) \in (A \times B)$ випливає, що $x \in A$ і $y \in B$. В той же час, з того, що $(x, y) \notin (A \times C)$, випливає, що $x \notin A$ або $y \notin C$. Випадок, коли $x \notin A$, протирічить приналежності $(x, y) \in (A \times B)$, тому з розгляду вилучається. Залишається єдиний варіант, коли $x \in A$, а для y одночасно виконується $y \in B$ і $y \notin C$, тобто $x \in A$ і $y \in (B \setminus C)$. З цього випливає, що $(x, y) \in (A \times (B \setminus C))$. Отже, $((A \times B) \setminus (A \times C)) \subseteq (A \times (B \setminus C))$. Одночасне виконання двох отриманих відношень включення доводить рівність $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$. Таким чином, **рівність (37) доведено**.

Властивість (38) можна довести за допомогою тотожних перетворень з використанням властивостей (35) – (37):

$$(A \times B) \oplus (A \times C) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми* (26) *для множини* $A \times B$ *і множини* $A \times C$)

$$= ((A \times B) \cup (A \times C)) \cap ((\overline{A \times B}) \cup (\overline{A \times C})) =$$

(*за законом де Моргана* (20) *для множини* $\overline{A \times B}) \cup (\overline{A \times C}$))

$$= ((A \times B) \cup (A \times C)) \cap (\overline{(A \times B) \cap (A \times C)}) =$$

(*за законом дистрибутивності декартового добутку відносно операції об'єднання* (34))

$$= (A \times (B \cup C)) \cap (\overline{(A \times B) \cap (A \times C)}) =$$

(*за законом дистрибутивності декартового добутку відносно операції перетину* (35))

$$= (A \times (B \cup C)) \cap (\overline{(A \times (B \cap C)}) =$$

(*за властивістю операції різниці* (24) *для множин* $A \times (B \cup C)$ *і* $\overline{(A \times (B \cap C)}$)

$$= (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times (B \cap C)) =$$

(*за законом дистрибутивності декартового добутку відносно операції різниці* (36))

$$= A \times ((B \cup C) \setminus (B \cap C)) =$$

(*за властивістю операції різниці* (24) *для множин* $B \cup C$ *і* $B \cap C$)

$$= A \times ((B \cup C) \cap \overline{(B \cap C)}) =$$

(*за законом де Моргана* (20) *для множини* $\overline{(B \cap C)}$)

$$= A \times ((B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми* (26) *для множин* B *і* C)

$$= A \times (B \oplus C).$$

Наведені перетворення і **доводять рівність (38)**.

Доведемо **властивість (39)**.

Доведення. Множина $A \times \varnothing$ для будь-якої множини A є множиною всіх упорядкованих пар елементів (x, y) таких, що $x \in A$ і $y \in \varnothing$. Але таких елементів y, що $y \in \varnothing$, не існує. Отже, не існує й упорядкованих пар $(x, y) \in (A \times \varnothing)$, тобто $A \times \varnothing = \varnothing$. Аналогічно доводиться, що $\varnothing \times A = \varnothing$. Отже, **рівність (39) доведено** [1].

Із властивості (39) випливає, що порожня множина при побудові декартових добутків множин грає ту ж саму роль, що й «0» при добутку чисел [14].

5.2. ПОНЯТТЯ КОРТЕЖУ

Разом з поняттям множини як сукупності елементів важливим поняттям є поняття упорядкованої множини або кортежу [7].

Означення. *Кортежом* називається упорядкована послідовність елементів, тобто сукупність елементів, в якій кожен елемент займає певне місце. Самі елементи при цьому називаються *компонентами кортежу* (перша компонента, друга компонента тощо).

Означення. Кількість елементів кортежу називається його *довжиною*.

Для позначення кортежу використовується запис $\boldsymbol{a}$=($\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$), що позначає кортеж довжини $\boldsymbol{n}$ з елементами $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$.

Означення. Кортежі довжини **2** називаються упорядкованими парами, кортежі довжини **3** – упорядкованими трійками тощо. В загальному випадку кортежі довжини $\boldsymbol{n}$ називають *упорядкованими n-ками* (енками).

Окремим випадком кортежу є кортеж $(\boldsymbol{a})$ довжини **1** і порожній кортеж довжини **0**, що позначається **( )** або $\boldsymbol{\Lambda}$. На відміну від звичайної множини в кортежі можуть бути й однакові елементи [3].

Означення. Кортежі, елементами яких є дійсні числа, називаються *точками простору* або *векторами*.

Використовуючи поняття кортежу можна узагальнити операцію декартового добутку множин на будь-яку їх кількість.

Означення. *Декартовим добутком множин* $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{A_n}$ називається множина, що складається із всіх тих і лише тих кортежів $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ довжини $\boldsymbol{n}$, перша компонента яких належить $\boldsymbol{A_1}$, друга – $\boldsymbol{A_2}$ тощо, тобто $\boldsymbol{a_1} \in \boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{a_2} \in \boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{a_n} \in \boldsymbol{A_n}$ [3].

Таким чином, декартовий добуток довільної кількості скінченних множин може бути заданий в наступний спосіб:

$$\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}}\ .$$

Слід зазначити, що якщо хоча б одна із множин $\boldsymbol{A_i}$ є нескінченною, то її декартовий добуток з будь-якими іншими множинами буде містити нескінченну кількість кортежів [1].

<u>Теорема 10</u>. <u>*Формулювання*</u>. Нехай $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{A_n}$ – скінченні множини і $|\boldsymbol{A_1}|$=$\boldsymbol{m_1}$, $|\boldsymbol{A_2}|$=$\boldsymbol{m_2}$, …, $|\boldsymbol{A_n}|$=$\boldsymbol{m_n}$, де $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$, …, $\boldsymbol{m_n}$ – потужності множин $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{A_n}$ відповідно. Тоді потужність множини $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}$ дорівнює добутку потужностей множин $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, …, $\boldsymbol{A_n}$ [4], тобто [1]

$$\boldsymbol{|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n}.$$

<u>*Доведення*</u>. Доведення будемо проводити методом математичної індукції. Для $\boldsymbol{n}$=1 теорема є тривіальною. Припустимо, що вона виконується для $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{k}$, і доведемо її справедливість для $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{k}$+**1**. За припущенням $\boldsymbol{|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$. Візьмемо будь-який вектор $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ із $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k}$ та припишемо справа елемент $\boldsymbol{a_{k+1}} \in \boldsymbol{A_{k+1}}$. Це можливо зробити в $\boldsymbol{m_{k+1}}$ спосіб. При цьому буде $\boldsymbol{m_{k+1}}$ різних векторів із $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{k+1}}$. Таким чином, із всіх $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$ векторів приписуванням справа елементу із $\boldsymbol{A_{k+1}}$ можна отримати $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k \cdot m_{k+1}}$ векторів із $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \times A_{k+1}}$. Причому всі вони різні, і ніяких інших векторів в $\boldsymbol{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{k+1}}$ не міститься. Тому для $\boldsymbol{n}$=$\boldsymbol{k}$+**1** теорема виконується і, як наслідок, виконується для будь-яких $\boldsymbol{n}$. **Теорему доведено**.

Окремим випадком операції декартового добутку є поняття ступенів множини.

Означення. Нехай $\boldsymbol{A}$ – довільна множина. *S-тим ступенем множини* $\boldsymbol{A}$ називається декартовий добуток $\boldsymbol{s}$ однакових множин, що дорівнюють A, тобто $\boldsymbol{A^s = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{s \text{ разів}}}$ [3].

Це означення придатне для $\boldsymbol{s}$=**2, 3, …** . Його можна поширити на будь-яке ціле невід’ємне число $\boldsymbol{s}$, якщо спеціальним означенням покласти $\boldsymbol{A^1}$=A, $\boldsymbol{A^0}$=$\{\boldsymbol{\Lambda}\}$. Якщо $\mathbb{R}$ –

множина дійсних чисел, то $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є дійсною площиною, а $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – тривимірний дійсний простір. Так, <u>наприклад</u>, кортеж $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ довжини **2** може розглядатися як точка на площині або вектор, що проведений із початку координат в дану точку (рис. 13*а*). Кортеж довжини **3** $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ може розглядатися як точка в тривимірному просторі або вектор, що проведений із початку координат в цю точку (рис. 13*б*) [1].

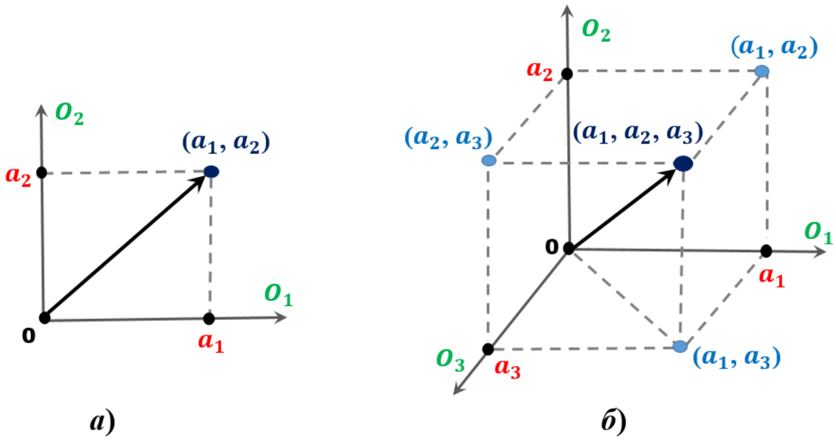


Рис. 13. – Кортежі як точки (вектори) на площині або в просторі

Над множинами, елементами яких є кортежі, можна проводити ті ж самі операції, що й над раніше розглянутими множинами. Більш за те, раніше розглянуті множини можна розуміти як множини кортежів одиничної довжини. <u>Наприклад</u>, множини на рис. 3, рис. 4 і рис. 11*а* є множинами точок на числовій прямій, тобто кожен елемент цих множин є кортежем, що складається тільки із однієї компоненти (єдиної координати на прямій).

<u>**Приклад 7**</u>. Задано множини $\boldsymbol{A}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1) + (y^2 - 2) \leqslant 4\}$ і $\boldsymbol{B}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geqslant |3x|\}$. Знайти їх об'єднання, перетин, різницю й диз'юнктивну суму [1].

<u>*Розв'язання*</u>. Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Обидві множини задані кортежами довжини **2**. Тому елементи цих множин можуть бути подані точками на площині. З урахуванням цього, множини $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і операції над ними подані як області на декартовій площині (рис. 14) [1].

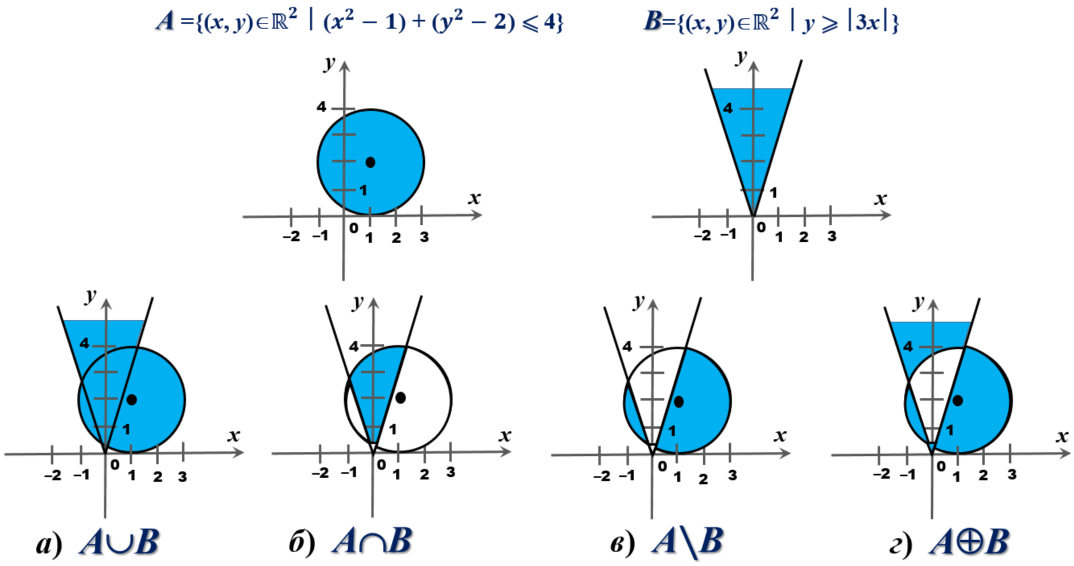


Рис. 14. – Приклад операцій над множинами, що задані кортежами

5.3. ПРОЕКЦІЇ

Розглядаючи кортежі як точки на площині або в просторі, можна говорити про проекції цих точок. Кожну окрему компоненту кортежу можна інтерпретувати як проекцію кортежу на відповідну вісь. Таким чином, на рис. 13*а* компоненти $\boldsymbol{a_1}$ і $\boldsymbol{a_2}$ будуть проекціями вектору $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ на 1-у і 2-у осі. На рис. 13*б* компоненти $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ і $\boldsymbol{a_3}$ будуть проекціями вектору $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ на 1-у, 2-у і 3-ю осі відповідно (Пр$_1(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_1}$, Пр$_2(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_2}$, Пр$_3(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_3}$), тобто Пр$_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = \boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1,3}}$.

Однак якщо довжина кортежу більша за **2**, то можна говорити про проекції кортежу відразу на декілька осей [1]. На рис.13*б* це можуть бути проекції на осі $\boldsymbol{O_1}$ і $\boldsymbol{O_2}$, осі $\boldsymbol{O_1}$ і $\boldsymbol{O_3}$ або осі $\boldsymbol{O_2}$ і $\boldsymbol{O_3}$. Ці проекції будуть являти собою двоелементні кортежі: Пр$_{(\boldsymbol{1,2})}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, Пр$_{(\boldsymbol{1,3})}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_3})$ і Пр$_{(\boldsymbol{2,3})}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$.

Узагальнюючи поняття проекції, можна розглядати упорядковану $\boldsymbol{n}$-елементну множину як упорядковану множину дійсних чисел $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\}$ як точку в уявному $\boldsymbol{n}$-вимірному просторі, що іноді називають *гіперпростором* [24], або як $\boldsymbol{n}$-вимірний вектор $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$. При цьому компоненти $\boldsymbol{n}$-елементного кортежу $\boldsymbol{a}$ можна розглядати як проекції цього кортежу на відповідні осі: Пр$_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{i}=\overline{\boldsymbol{1,n}}$. Якщо $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \ldots, \boldsymbol{l}$ – номери осей, причому $\boldsymbol{1<i<j<\ldots<l<n}$, то проекція кортежу $\boldsymbol{a}$ на осі $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \ldots, \boldsymbol{l}$ дорівнює: Пр$_{(\boldsymbol{i,j,\ldots,l})}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}, \ldots, \boldsymbol{a_l})$. При цьому кількість осей, на які відбувається проектування кортежу, є *розмірністю гіперплощини* [24], на яку виконується проекція.

Операція проектування множини тісно пов'язана з операцією проектування кортежу і може застосовуватися тільки до таких множин, елементами яких є кортежі однакової довжини [1].

Означення. Нехай $\boldsymbol{A}$ – множина, що складається із кортежів довжини $\boldsymbol{n}$. Тоді *проекцією множини* $\boldsymbol{A}$ називається множина проекцій кортежів із $\boldsymbol{A}$.

Приклад 8. Нехай $\boldsymbol{A=\{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)\}}$. Знайти проекції цієї множини на 2-у вісь, на 5-у вісь, на 2-у і 4-у осі [1].

Розв'язання. Елементами цієї множини є кортежі однакової довжини. Отже, шукані проекції існують. Проекцією на 2-у вісь буде множина других компонент кортежів. Але у 1-го и 4-го кортежів другі компоненти збігаються. При переліку елементів множини елементи, що повторюються, вказуються лише один раз. Отже, Пр$_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A=\{2, 1, 3\}}$. При переліку елементів множини ці елементи можуть вказуватися в довільному порядку. В даному випадку вони є натуральними числами, які зручно перелічити за зростанням. Таким чином, Пр$_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A=\{1, 2, 3\}}$.

Проекцією на 5-у ось буде множина п'ятих компонент кортежів. Але п'яті компоненти збігаються у $\boldsymbol{a_1=(1, 2, 3, 4, 5)}$ і $\boldsymbol{a_2=(2, 1, 3, 5, 5)}$, а також у $\boldsymbol{a_3=(3, 3, 3, 3, 3)}$ і $\boldsymbol{a_4=(3, 2, 3, 4, 3)}$ Отже, з урахуванням порядку їх зростання, Пр$_{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{A=\{3, 5\}}$.

Проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на 2-у і 4-у осі будуть кортежі довжини **2** (за розмірністю гіперплощини проектування), у який перші компоненти будуть являти собою другі компоненти кортежів множини $\boldsymbol{A}$, що проектується. Другі компоненти кортежів проекції будуть являти собою четверті компоненти кортежів множини $\boldsymbol{A}$, для якої виконується проекція. Таким чином, Пр$_{(\boldsymbol{2,4})}\boldsymbol{A=\{(2, 4), (1, 5), (3, 3), (2, 4)\}}$. Всередині кортежів різні компоненти можуть дорівнювати одна одній. Але, як вже було зазначено, однакові елементи множини вказуються лише один раз. При виконанні даної проекції серед її елементів отримано два однакові кортежі, тобто два однакові елементи множини. Тому такий кортеж, що повторюється, також вказується лише один раз. Отже, Пр$_{(2,4)}$$\boldsymbol{A}$=**{(2, 4), (1, 5), (3, 3)}**.

<u>Відповідь</u>. Пр$_{\boldsymbol{2}}$$\boldsymbol{A}$=**{1, 2, 3}**, Пр$_{\boldsymbol{5}}$$\boldsymbol{A}$=**{3, 5}**, Пр$_{(2,4)}$$\boldsymbol{A}$=**{(2, 4), (1, 5), (3, 3)}**.

<u>Приклад 9</u>. Для множин із прикладу 7 (рис. 14) побудувати їх проекції на координатні осі.

<u>Розв'язання</u>. Як і приклад 7, цю задачу також зручніше розв'язувати графічно. Шукані проекції подано на рис. 15 [1].

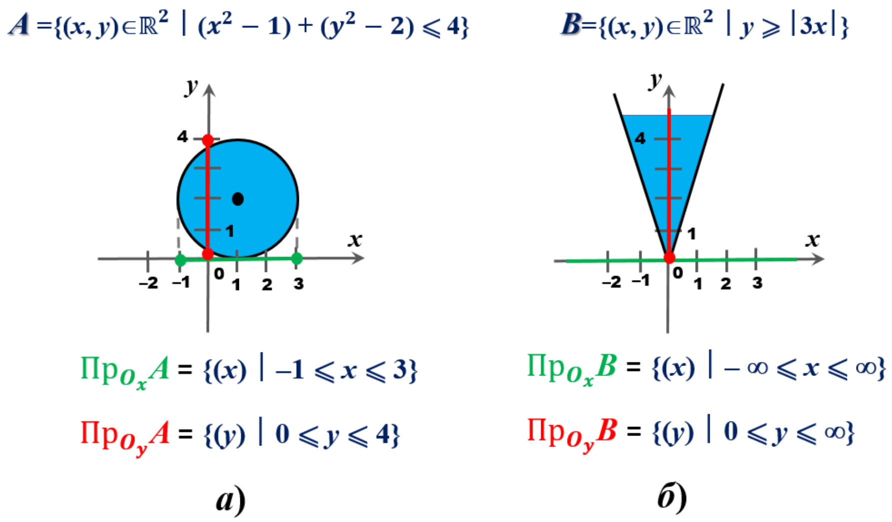


Рис. 15. – Проекції множин

З рис. 15 можна побачити, що якщо множина, яка проектується, має інфінум і супремум по усіх компонентах своїх кортежів, то її проекції також будуть мати ці точні границі, причому точні границі проекцій будуть збігатися з точними границями множини, для якої виконується проекція. Але якщо множина, що проектується, не має хоча б однієї точної границі хоча б по одній з компонент своїх кортежів, то її проекції на відповідну вісь також не будуть мати цієї точної границі [1]. Множина $\boldsymbol{A}$ на рис. 15*а* має обидві точні границі і по першій, і по другій компоненті. Проекції цієї множини на $\boldsymbol{O_x}$ і $\boldsymbol{O_y}$ будуть мати такі ж самі точні границі, що й сама множина $\boldsymbol{A}$. Множина $\boldsymbol{B}$ (рис. 15*б*) по 1-й компоненті не має ані супремуму, ані інфінуму. Тому її проекцією на $\boldsymbol{O_x}$ є вся ця числова вісь, тобто Пр$_{\boldsymbol{O_x}}$$\boldsymbol{B}$ також не має ані супремуму, ані інфінуму. По 2-й компоненті множина $\boldsymbol{B}$ має інфінум (він розташований в точці початку координат), але не має супремуму. Тому її проекція на $\boldsymbol{O_y}$ буде мати інфінум, що дорівнюватиме нулю. Супремум для цієї проекції також не існує.

Виходячи із всього сказаного, для множин, що складаються із кортежів однакової довжини, можна ввести поняття точної границі по $\boldsymbol{i}$-тій компоненті [1].

<u>Означення</u>. *Точною верхньою границею множини по* $\boldsymbol{i}$*-тій компоненті* називається супремум її проекції на $\boldsymbol{i}$-у ось, тобто $\boldsymbol{sup_i A}$ = **sup** (Пр$_i$$\boldsymbol{A}$).

<u>Означення</u>. *Точною нижньою границею множини по* $\boldsymbol{i}$*-тій компоненті* називається інфінум її проекції на $\boldsymbol{i}$-у ось, тобто $\boldsymbol{inf_i A}$ = **inf** (Пр$_i$$\boldsymbol{A}$).

<u>Теорема 11</u>. *<u>Формулювання</u>*. Якщо $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$, то Пр$_1$$\boldsymbol{A}$=$\boldsymbol{B}$ і Пр$_2$$\boldsymbol{A}$=$\boldsymbol{C}$. Якщо ж $\boldsymbol{A} \subseteq (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, то Пр$_1$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, Пр$_2$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$ [1].

<u>Доведення</u>. Нехай $\boldsymbol{B}$={$\boldsymbol{b_1, b_2, \dots, b_n}$}, $\boldsymbol{C}$={$\boldsymbol{c_1, c_2, \dots, c_m}$}, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$. Тоді

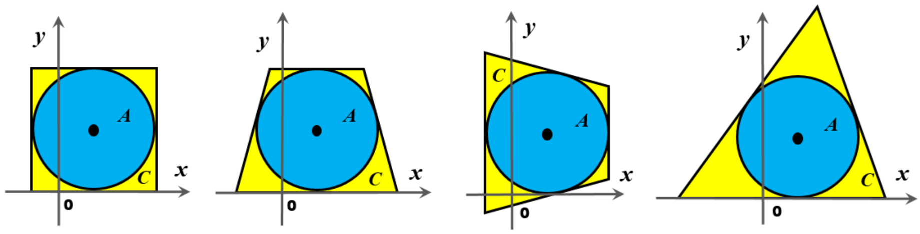
$$A=\{a_t=(b_i,c_j),\ t=\overline{1,k}\ \mid\ b_i\in B,\ i=\overline{1,n},\ c_j\in C,\ j=\overline{1,m}\},$$

тобто множина $\boldsymbol{A}$ складається зі всіх можливих кортежів, в яких перша компонента є елементом множини $\boldsymbol{B}$, а друга – елементом множини $\boldsymbol{C}$. Тоді проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на 1-у ось будуть усі перші компоненти усіх кортежів, із яких складається множина $\boldsymbol{A}$, тобто всі елементи множини $\boldsymbol{B}$. Отже, $\text{Пр}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. Проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на 2-у ось будуть усі другі компоненти усіх кортежів, з яких складається множина $\boldsymbol{A}$, тобто всі елементи множини $\boldsymbol{C}$. Отже, $\text{Пр}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$.

Розглянемо тепер множину $\boldsymbol{A'}\subseteq \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$, тобто $\boldsymbol{A'}\subseteq(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. Таким чином, множина $\boldsymbol{A'}$ складається лише із тих кортежів, що містяться в множині $\boldsymbol{A}$, але не з усіх. Отже, може так трапитися, що деякий елемент $\boldsymbol{B}$ не є першою компонентою жодного кортежу множини $\boldsymbol{A'}$, але при цьому всі перші компоненти цих кортежів в множині $\boldsymbol{B}$ містяться. Таким чином, множина всіх перших компонент кортежів множини $\boldsymbol{A'}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{B}$. Аналогічно можливий випадок, коли деякий елемент множини $\boldsymbol{C}$ не є другою компонентою жодного кортежу множини $\boldsymbol{A'}$, але при цьому всі другі компоненти цих кортежів в множині $\boldsymbol{C}$ містяться. Таким чином, множина всіх других компонент кортежів множини $\boldsymbol{A'}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{C}$. Два отриманих відношення включення свідчать про те, що у випадку, коли $\boldsymbol{A}\subseteq(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$, маємо $\text{Пр}_1\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$, $\text{Пр}_2\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{C}$.

Теорему доведено.

Результат цієї теореми наочно зображено на рис. 16 для двох множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{C}$ [1].



$\text{Пр}_{O_x}A=\text{Пр}_{O_x}C$	$\text{Пр}_{O_x}A\subseteq\text{Пр}_{O_x}C$	$\text{Пр}_{O_x}A=\text{Пр}_{O_x}C$	$\text{Пр}_{O_x}A\subseteq\text{Пр}_{O_x}C$
$\text{Пр}_{O_y}A=\text{Пр}_{O_y}C$	$\text{Пр}_{O_y}A=\text{Пр}_{O_y}C$	$\text{Пр}_{O_y}A\subseteq\text{Пр}_{O_y}C$	$\text{Пр}_{O_y}A\subseteq\text{Пр}_{O_y}C$
$inf_{O_x}A=inf_{O_x}C$	$inf_{O_x}A\geqslant inf_{O_x}C$	$inf_{O_x}A=inf_{O_x}C$	$inf_{O_x}A\geqslant inf_{O_x}C$
$sup_{O_x}A=sup_{O_x}C$	$sup_{O_x}A\leqslant sup_{O_x}C$	$sup_{O_x}A=sup_{O_x}C$	$sup_{O_x}A\leqslant sup_{O_x}C$
$inf_{O_y}A=inf_{O_y}C$	$inf_{O_y}A=inf_{O_y}C$	$inf_{O_y}A\geqslant inf_{O_y}C$	$inf_{O_y}A=inf_{O_y}C$
$sup_{O_y}A=sup_{O_y}C$	$sup_{O_y}A=sup_{O_y}C$	$sup_{O_y}A\leqslant sup_{O_y}C$	$sup_{O_y}A\leqslant sup_{O_y}C$
а)	*б*)	*в*)	*г*)

Рис. 16. – Співвідношення проекцій для множин $A\subseteq C$

На рис. 16*а* і для множини $\boldsymbol{A}$, і для множини $\boldsymbol{C}$ збігаються проекції на обидві координатні осі, хоча ці множини й не дорівнюють одна одній. Для них виконується включення $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{C}$. Очевидно, що інфінуми і супремуми по обом компонентам кортежів для них при цьому також збігаються. На рис. 16*б* для множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ збігаються проекції на $\boldsymbol{O_y}$. Отже, інфінум і супремум по 2-й компоненті для цих множин також збігаються. По 1-й компоненті $\text{Пр}_{O_x}\boldsymbol{A}\subseteq\text{Пр}_{O_x}\boldsymbol{C}$. Отже, згідно з теоремою 7, $\boldsymbol{inf_{O_x}A\geqslant inf_{O_x}C}$, $\boldsymbol{sup_{O_x}A\leqslant sup_{O_x}C}$. На рис. 16*в* у множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ збігаються проекції на $\boldsymbol{O_x}$. Отже, для них збігаються інфінум і супремум по першій компоненті. По 2-й компоненті $\text{Пр}_{O_y}\boldsymbol{A}\subseteq\text{Пр}_{O_y}\boldsymbol{C}$.

Це означає, що $\boldsymbol{inf}_{O_y}\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{inf}_{O_y}\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{sup}_{O_y}\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{sup}_{O_y}\boldsymbol{C}$. На рис. 16*в* у множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ не збігаються проекції на жодну з осей. Тому вказані співвідношення для супремумів і інфінумов по компонентах виконуються і по $\boldsymbol{O_x}$, і по $\boldsymbol{O_y}$ [1].

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

№ 1. *Переліком елементів задано множини A* = {1, 2, 4, 5, 7}, *B* = {*a*, *m*, *t*}, *C* = {*b*, 9}. *Записати декартовий добуток A × C × B. Скільки елементів містить отримана множина*?

Розв'язання. Результатом вказаного декартового добутку буде множина кортежів, в якій перша компонента буде елементом множини **A = {1, 2, 4, 5, 7}**, друга компонента – елементом множини **C = {b, 9}**, третя компонента – елементом множини **B = {a, m, t}**. Отже, маємо:

$$\boldsymbol{A \times C \times B = \{1, 2, 4, 5, 7\} \times \{b, 9\} \times \{a, m, t\} =}$$
$$\boldsymbol{= \{(1, b, a), (1, b, m), (1, b, t), (1, 9, a), (1, 9, m), (1, 9, t),}$$
$$\boldsymbol{(2, b, a), (2, b, m), (2, b, t), (2, 9, a), (2, 9, m), (2, 9, t),}$$
$$\boldsymbol{(4, b, a), (4, b, m), (4, b, t), (4, 9, a), (4, 9, m), (4, 9, t),}$$
$$\boldsymbol{(5, b, a), (5, b, m), (5, b, t), (5, 9, a), (5, 9, m), (5, 9, t),}$$
$$\boldsymbol{(7, b, a), (7, b, m), (7, b, t), (7, 9, a), (7, 9, m), (7, 9, t)\}.}$$

Як видно із задання вказаних множин, $\boldsymbol{|A| = 5}$, $\boldsymbol{|B| = 3}$, $\boldsymbol{|C| = 2}$. Тому декартовий добуток цих множин, в якому би порядку він не виконувався, має містити $\boldsymbol{|A| \cdot |B| \cdot |C| = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30}$ елементів-кортежів. Для отриманого декартового добутку цей результат отриманий, тобто $\boldsymbol{|A \times C \times B| = 30}$.

Відповідь. $\boldsymbol{|A \times C \times B| = 30}$.

№ 2. *Заданий декартовий добуток множин*:

M = {(3, *a*, 8, *k*), (3, *a*, 3, *k*), (3, *b*, 8, *k*), (3, *b*, 3, *k*), (3, *c*, 8, *k*), (3, *c*, 3, *k*), (8, *a*, 8, *k*), (8, *a*, 3, *k*), (8, *b*, 8, *k*), (8, *b*, 3, *k*), (8, *c*, 8, *k*), (8, *c*, 3, *k*)}.

а) *Відновити множини, що брали участь у даному добутку.*

Розв'язання. Довжина кортежів даного декартового добутку дорівнює **4**. Тому в даному декартовому добутку брали участь чотири множини-множника. В кортежах, що є елементами даного декартового добутку, перші компоненти є елементами множини ***A*** (першого множника), другі компоненти – елементами множини ***B*** (другого множника), треті компоненти – елементами множини ***C*** (третього множника), четверті компоненти – елементами множини ***D*** (четвертого множника). Серед перших компонент зустрічаються лише «3» і «8». Серед других компонент – лише «*a*», «*b*» і «*c*». Серед третіх компонент – лише «8» і «3». Серед четвертих компонент – лише «*k*». Тому можна стверджувати, що

$$\boldsymbol{A = \{3, 8\};\ B = \{a, b, c\};\ C = \{8, 3\};\ D = \{k\}.}$$

При цьому стає очевидним, що $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = \{3, 8\}$. З цього випливає, що перший множник збігається з третім. Таким чином, вказана множина є результатом декартового добутку

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}.$$

Також є очевидним, що $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{2}$, $|\boldsymbol{B}| = \mathbf{3}$, $|\boldsymbol{D}| = \mathbf{1}$. Тому

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D}| = \mathbf{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12}.$$

Цей результат збігається з кількістю кортежів в заданій множині $\boldsymbol{M}$.

Відповідь. $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{A} = \{3, 8\}$; $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$; $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{k}\}$.

б) ***Знайти проекції множини М на 1-у і 2-у осі, на 1-у і 4-у осі, на 2-у і 3-ю осі, на 3-ю і 4-у осі.***

Розв'язання. Проекцією множини $\boldsymbol{M}$ на 1-у і 2-у осі буде множина всіх кортежів, в яких перша компонента буде збігатися з якоюсь першою компонентою, а друга – з якоюсь другою компонентою кортежів множини $\boldsymbol{M}$. Якщо в результаті деякі отримані кортежі виявляються однаковими, то ми записуємо їх лише один раз. Різні компоненти одного кортежу можуть приймати однакові значення. В той же час, повністю однакові кортежі є однаковими елементами однієї й тієї самої множини. Як вже зазначалося, такі елементи в переліку вказуються лише один раз. Таким чином, отримуємо:

$$\text{Пр}_{\mathbf{1,2}}\boldsymbol{M} = \{(3,\boldsymbol{a}), (3,\boldsymbol{b}), (3,\boldsymbol{c}), (8,\boldsymbol{a}), (8,\boldsymbol{b}), (8,\boldsymbol{c})\} = \{3, 8\} \times \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}.$$

Проекцією множини $\boldsymbol{M}$ на 1-у і 4-у осі буде множина всіх кортежів, в яких перша компонента буде збігатися з якоюсь першою компонентою, а друга – з якоюсь четвертою компонентою кортежів множини $\boldsymbol{M}$. З урахуванням всього вищесказаного, маємо:

$$\text{Пр}_{\mathbf{1,4}}\boldsymbol{M} = \{(3,\boldsymbol{k}), (8,\boldsymbol{k})\} = \{3, 8\} \times \{\boldsymbol{k}\} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}.$$

Проекцією множини $\boldsymbol{M}$ на 2-у і 3-ю осі буде множина всіх кортежів, в яких перша компонента буде збігатися з якоюсь другою компонентою, а друга – з якоюсь третьою компонентою кортежів множини $\boldsymbol{M}$. З урахуванням всього вищесказаного, маємо:

$$\text{Пр}_{\mathbf{2,3}}\boldsymbol{M} = \{(\boldsymbol{a},8), (\boldsymbol{a},3), (\boldsymbol{b},8), (\boldsymbol{b},3), (\boldsymbol{c},8), (\boldsymbol{c},3)\} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\} \times \{3, 8\} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}.$$

Проекцією множини $\boldsymbol{M}$ на 3-ю і 4-ю осі буде множина всіх кортежів, в яких перша компонента буде збігатися з якоюсь третьою компонентою, а друга – з якоюсь четвертою компонентою кортежів множини $\boldsymbol{M}$. З урахуванням всього вищесказаного, маємо:

$$\text{Пр}_{\mathbf{3,4}}\boldsymbol{M} = \{(8,\boldsymbol{k}), (3,\boldsymbol{k})\} = \{3, 8\} \times \{\boldsymbol{k}\} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}.$$

Як було показано при розв'язанні попереднього завдання, в декартовому добутку для множини $\boldsymbol{M}$ перший множник збігається з третім. Тому отриманий результат є передбачуваним, тобто $\text{Пр}_{\mathbf{3,4}}\boldsymbol{M} = \text{Пр}_{\mathbf{1,4}}\boldsymbol{M} = \{3, 8\} \times \{\boldsymbol{k}\} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}$.

Відповідь. $\text{Пр}_{\mathbf{1,2}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$; $\text{Пр}_{\mathbf{1,4}}\boldsymbol{M} = \text{Пр}_{\mathbf{3,4}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D}$, $\text{Пр}_{\mathbf{2,3}}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

№ 3. *Довести тотожності аналітично*

а) $(A \times (C \setminus B)) \cup (A \times (C \cap B)) = A \times C$

Доведення. Права частина цієї рівності перетворень не передбачає. Тому для доведення тотожності треба привести до такого ж вигляду ліву частину рівності.

$$(A \times (C \setminus B)) \cup (A \times (C \cap B)) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції об'єднання*)

$$= A \times ((C \setminus B) \cup (C \cap B)) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* ***C*** *і* ***B***)

$$= A \times ((C \cap \overline{B}) \cup (C \cap B)) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* ***C*** *та множин* $\overline{B}$ *і* ***B***)

$$= A \times (C \cap (\overline{B} \cup B)) =$$

(*за властивістю універсуму для множини* ***B***)

$$= A \times (C \cap U) =$$

(*за властивістю універсуму для множини* ***C***)

$$= A \times C.$$

Отже, за допомогою послідовності тотожних перетворень вдалося формулу в лівій частині рівності звести до формули в правій частині рівності. *Тотожність доведено*.

б) $C \times ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = C \times (A \oplus B)$

Доведення. Спростимо за допомогою тотожних перетворень ***ліву частину*** цієї рівності.

$$C \times ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $A \cup B$ *і* $A \cap B$)

$$= C \times ((A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{A \cap B}$)

$$= C \times ((A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми для множин* ***A*** *і* ***B***)

$$= C \times (A \oplus B).$$

Отже, за допомогою послідовності тотожних перетворень формула в лівій частині рівності звелася до вигляду формули в ***правій частині*** рівності. Тому обробляти окремо праву частину рівності нема потреби. *Тотожність доведено*.

в) $(C \times A) \oplus (C \times (A \cap B)) = C \times (A \setminus B)$

Доведення. Опрацюємо ***ліву частину*** цієї рівності.

$$(C \times A) \oplus (C \times (A \cap B)) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми для множин* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$)

$$= ((C \times A) \cup (C \times (A \cap B)) \cap ((\overline{C \times A}) \cup (\overline{C \times (A \cap B)}) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції об'єднання*)

$$= (C \times (A \cup (A \cap B))) \cap ((\overline{C \times A}) \cup (\overline{C \times (A \cap B)}) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції перетину*)

$$= (C \times (A \cup (A \cap B))) \cap ((\overline{C \times A}) \cup (\overline{(C \times A) \cap (C \times B)}) =$$

(*за законом елімінації (поглинання) для множин* $\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{B}$)

$$= (C \times A) \cap ((\overline{C \times A}) \cup (\overline{(C \times A) \cap (C \times B)}) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cap (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B})}$)

$$= (C \times A) \cap ((\overline{C \times A}) \cup (\overline{C \times A}) \cup (\overline{C \times B})) =$$

(*за законом ідемпотентності об'єднання для множини* $\overline{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}}$)

$$= (C \times A) \cap ((\overline{C \times A}) \cup (\overline{C \times B})) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}$ *та множин* $\overline{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}}$ *і* $\overline{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}}$)

$$= ((C \times A) \cap (\overline{C \times A})) \cup ((C \times A) \cap (\overline{C \times B})) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}$)

$$= \varnothing \cup ((C \times A) \cap (\overline{C \times B})) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* $(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cap (\overline{\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}})$)

$$= ((C \times A) \cap (\overline{C \times B})) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}$)

$$= (C \times A) \setminus (C \times B) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції різниці*)

$$= C \times (A \setminus B).$$

Таким чином, за допомогою послідовності тотожних перетворень формула в лівій частині рівності звелася до вигляду формули в ***правій частині*** рівності. Тому обробляти окремо праву частину цієї рівності нема потреби. *Тотожність доведено*.

г) $A \times (C \cap (B \oplus C)) = (A \times C) \oplus (A \times (C \cap B))$

Доведення. Спочатку опрацюємо ***ліву частину*** цієї рівності.

$$A \times (C \cap (B \oplus C)) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми для множин* $\boldsymbol{B}$ *і* $\boldsymbol{C}$)

$$= A \times (C \cap (B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) =$$

(*за законом елімінації (поглинання) для множин* $\boldsymbol{C}$ *і* $\boldsymbol{B}$)

$$= A \times (C \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* $\boldsymbol{C}$ *та множин* $\overline{\boldsymbol{B}}$ *і* $\overline{\boldsymbol{C}}$)

$$= A \times ((C \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{C})) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* $\boldsymbol{C}$)

$$= A \times ((C \cap \overline{B}) \cup \varnothing) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* $\boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$)

$$= A \times (C \cap \overline{B}) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $\boldsymbol{C}$ *і* $\boldsymbol{B}$)

$$= A \times (C \setminus B).$$

Тепер опрацюємо ***праву частину*** досліджуваної рівності.

$$(A \times C) \oplus (A \times (C \cap B)) =$$

(*за властивістю диз'юнктивної суми для множин* $\boldsymbol{A \times C}$ *і* $\boldsymbol{A \times (C \cap B)}$)

$$= ((A \times C) \cup (A \times (C \cap B)) \cap ((\overline{A \times C}) \cup (\overline{A \times (C \cap B)}) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції об'єднання*)

$$= (A \times (C \cup (C \cap B))) \cap ((\overline{A \times C}) \cup (\overline{A \times (C \cap B)}) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції перетину*)

$$= (A \times (C \cup (C \cap B))) \cap ((\overline{A \times C}) \cup (\overline{(A \times C) \cap (A \times B)}) =$$

(*за законом елімінації (поглинання) для множин* $\boldsymbol{C}$ *і* $\boldsymbol{B}$)

$$= (A \times C) \cap ((\overline{A \times C}) \cup (\overline{(A \times C) \cap (A \times B)}) =$$

(*за законом де Моргана для множини* $\overline{(\boldsymbol{A \times C}) \cap (\boldsymbol{A \times B})}$)

$$= (A \times C) \cap ((\overline{A \times C}) \cup (\overline{A \times C}) \cup (\overline{A \times B})) =$$

(*за законом ідемпотентності об'єднання для множини* $\overline{\boldsymbol{A \times C}}$)

$$= (A \times C) \cap ((\overline{A \times C}) \cup (\overline{A \times B})) =$$

(*за законом дистрибутивності для множини* $\boldsymbol{A \times C}$ *та множин* $\overline{\boldsymbol{A \times C}}$) *і* $\overline{\boldsymbol{A \times B}}$))

$$= ((A \times C) \cap (\overline{A \times C})) \cup ((A \times C) \cap (\overline{A \times B})) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* $\boldsymbol{A \times C}$)

$$= \varnothing \cup ((A \times C) \cap (\overline{A \times B})) =$$

(*за властивістю порожньої множини для множини* $(\boldsymbol{A \times C}) \cap (\overline{\boldsymbol{A \times B}})$)

$$= ((A \times C) \cap (\overline{A \times B})) =$$

(*за властивістю операції різниці для множин* $\boldsymbol{A \times C}$ *і* $\boldsymbol{A \times B}$)

$$= (A \times C) \setminus (A \times B) =$$

(*за властивістю дистрибутивності декартового добутку відносно операції різниці*)

$$= A \times (C \setminus B).$$

Отримання тієї ж самої формули для лівої та правої частин рівності доводить наведену тотожність. *Тотожність доведено*.

№ 4. *Множини кортежів задано характеристичними предикатами*

$$A = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{и} \quad -1 \leqslant y \leqslant 3\};$$

$$B = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4\};$$

$$C = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y+2)^2 \leqslant 9\}.$$

а) *Графічно зобразити ці множини на координатній площині, а також знайти їх проекції на обидві осі .*

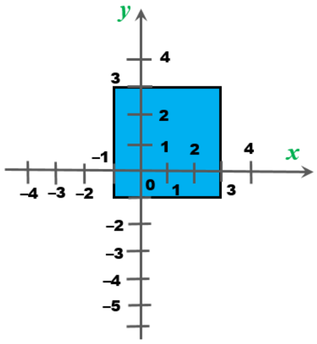
Розв'язання. Множина $\boldsymbol{A}$ на площині являє собою квадрат, обмежений зовні прямими $x = -1$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 3$. Є очевидним, що проекція цієї множини на O_x – це відрізок числової осі в інтервалі від найменшої точки $x = -1$ до найбільшої $x = 3$. З цього випливає, що саме ці точки осі O_x будуть відповідно інфінумом і супремумом множини $\boldsymbol{A}$ по першій компоненті. Проекція цієї множини на O_y – це відрізок числової осі в інтервалі від найменшої точки $y = -1$ до найбільшої $y = 3$. Це означає, що саме ці точки осі O_y будуть відповідно інфінумом і супремумом множини $\boldsymbol{A}$ по другій компоненті.

Характеристичний предикат множини $\boldsymbol{B}$ описує область площини всередині окружності радіусом $r = 2$ і з центром в точці $(2; -1)$. Таким чином, проекція цієї множини на O_x – це відрізок числової осі в інтервалі від найменшої точки $x = 2 - r = 2 - 2 = 0$ до найбільшої $x = 2 + r = 2 + 2 = 4$. Тому саме точки осі O_x $x = 0$ і $x = 4$ будуть відповідно інфінумом і супремумом множини $\boldsymbol{B}$ по першій компоненті. В той же час, проекція цієї множини на O_y – це відрізок числової осі в інтервалі від найменшої точки $y = -1 - r = -1 - 2 = -3$ до найбільшої $y = -1 + r = -1 + 2 = 1$. Тому саме точки осі O_y $y = -3$ і $y = 1$ будуть відповідно інфінумом і супремумом множини $\boldsymbol{B}$ по другій компоненті.

Характеристичний предикат множини $\boldsymbol{C}$ описує область площини всередині окружності радіусом $r = 3$ і з центром в точці $(-1; -2)$. Таким чином, проекція цієї множини на O_x – це відрізок числової осі в інтервалі від найменшої точки $x = -1 - r = -1 - 3 = -4$ до найбільшої $x = -1 + r = -1 + 2 = 1$. Тому саме точки осі O_x $x = -4$ і $x = 1$ будуть відповідно інфінумом і супремумом множини $\boldsymbol{C}$ по першій компоненті. В той же час, проекція цієї множини на O_y – це відрізок числової осі в інтервалі від найменшої точки $y = -2 - r = -2 - 3 = -5$ до найбільшої $y = -2 + r = -2 + 3 = 1$. Тому саме точки осі O_y $y = -5$ і $y = 1$ будуть відповідно інфінумом і супремумом множини $\boldsymbol{C}$ по другій компоненті.

Графічно цей результат виглядає наступним чином.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 3$ и $-1 \leqslant y \leqslant 3\}$



$\text{Пр}_{O_x}A = \{(x) \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

$\text{Пр}_{O_y}A = \{(y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

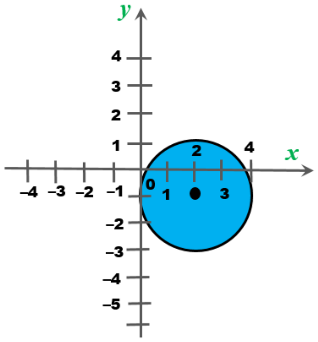
$inf_{O_x}(A) = -1$

$sup_{O_x}(A) = 3$

$inf_{O_y}(A) = -1$

$sup_{O_y}(A) = 3$

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 4\}$



$\text{Пр}_{O_x}B = \{(x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$

$\text{Пр}_{O_y}B = \{(y) \mid -3 \leqslant y \leqslant 1\}$

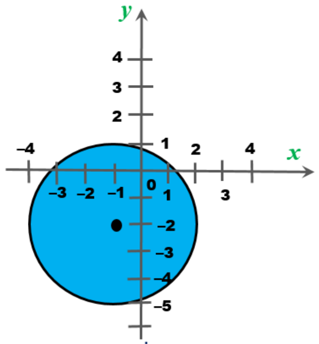
$inf_{O_x}(B) = 0$

$sup_{O_x}(B) = 4$

$inf_{O_y}(B) = -3$

$sup_{O_y}(B) = 1$

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (y+2)^2 \leqslant 9\}$



$\text{Пр}_{O_x}C = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 2\}$

$\text{Пр}_{O_y}C = \{(y) \mid -5 \leqslant y \leqslant 1\}$

$inf_{O_x}(C) = -4$

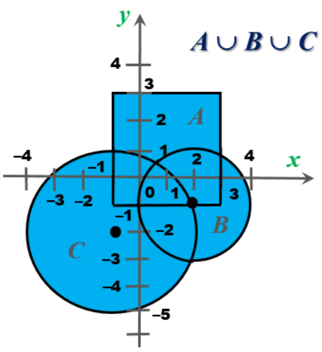
$sup_{O_x}(C) = 2$

$inf_{O_y}(C) = -5$

$sup_{O_y}(C) = 1$

б) *Графічно знайти для цих множин об'єднання, перетин, диз'юнктивну суму, а також проекції результатів цих операцій на обидві осі та їх інфінуми та супремуми по обом осям*

<u>*Розв'язання*</u>. Графічно виконання вказаних операцій має наступний вигляд.



$\text{Пр}_{O_x}(A \cup B \cup C) = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$

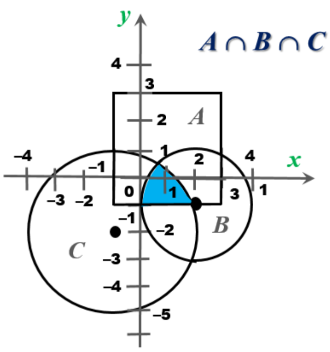
$\text{Пр}_{O_y}(A \cup B \cup C) = \{(y) \mid -5 \leqslant y \leqslant 3\}$

$inf_{O_x}(A \cup B \cup C) = -4$

$sup_{O_x}(A \cup B \cup C) = 4$

$inf_{O_y}(A \cup B \cup C) = -5$

$sup_{O_y}(A \cup B \cup C) = 3$



$\text{Пр}_{O_x}(A \cap B \cap C) = \{(x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2} - 1\}$

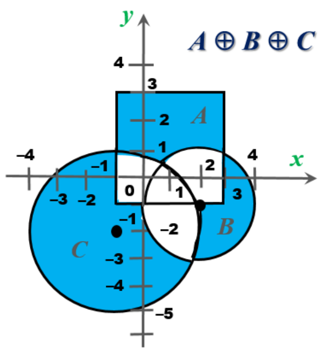
$\text{Пр}_{O_y}(A \cap B \cap C) = \{(y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 0{,}49\}$

$inf_{O_x}(A \cap B \cap C) = 0$

$sup_{O_x}(A \cap B \cap C) = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}83$

$inf_{O_y}(A \cap B \cap C) = -1$

$sup_{O_y}(A \cap B \cap C) = 0{,}49$



$\text{Пр}_{O_x}(A \oplus B \oplus C) = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$

$\text{Пр}_{O_y}(A \oplus B \oplus C) = \{(y) \mid -5 \leqslant y \leqslant 3\}$

$inf_{O_x}(A \oplus B \oplus C) = -4$

$sup_{O_x}(A \oplus B \oplus C) = 4$

$inf_{O_y}(A \oplus B \oplus C) = -5$

$sup_{O_y}(A \oplus B \oplus C) = 3$

Очевидно, що інтервали, які є проекціями на одну й ту саму вісь для множин, що беруть участь в операції <u>***об'єднання***</u>, також об'єднуються і утворюють проекцію на відповідну вісь множини, що є результатом об'єднання. Таким чином,

$$inf_{O_x}(A \cup B \cup C) = \min\,(inf_{O_x}(A),\ inf_{O_x}(B),\ inf_{O_x}(C));$$

$$inf_{O_y}(A \cup B \cup C) = \min\,(inf_{O_y}(A),\ inf_{O_y}(B),\ inf_{O_y}(C));$$

$$sup_{O_x}(A \cup B \cup C) = \max\,(sup_{O_x}(A),\ sup_{O_x}(B),\ sup_{O_x}(C));$$

$$sup_{O_y}(A \cup B \cup C) = \boldsymbol{max}\,(sup_{O_y}(A), sup_{O_y}(B), sup_{O_y}(C)).$$

Цей результат можна узагальнити на довільну кількість об'єднуваних множин:

$$inf_{O_i}\left(\bigcup_j A_j\right) = min_j(inf_{O_i}(A_j);$$

$$sup_{O_i}\left(\bigcup_j A_j\right) = max_j(inf_{O_i}(A_j).$$

Для розглянутих множин найменший інфінум по обом компонентам має множина $\boldsymbol{C}$. Найбільший супремум по першій компоненті має множина $\boldsymbol{B}$, а по другій компоненті – множина $\boldsymbol{A}$. Отже, для об'єднання розглянутих множин маємо:

$$inf_{O_x}(A \cup B \cup C) = inf_{O_x}(C) = -4, \quad inf_{O_y}(A \cup B \cup C) = inf_{O_y}(C) = -5;$$

$$sup_{O_x}(A \cup B \cup C) = sup_{O_x}(B) = 4, \quad sup_{O_y}(A \cup B \cup C) = sup_{O_y}(A) = 3.$$

Розглянемо тепер ***перетин*** вказаних множин $A \cap B \cap C$. Очевидно, що знизу ця множина обмежена однією з ліній, що задають множину $\boldsymbol{A}$, а саме лінією $x = -1$, ліворуч – окружністю множини $\boldsymbol{B}$, а праворуч – окружністю множини $\boldsymbol{C}$. Тому інфінумом по 1-й компоненті множини $A \cap B \cap C$ буде точка перетину лінії $y = -1$ і окружності множини $\boldsymbol{B}$, тобто $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$. Знайдемо координати цієї точки.

$$\begin{cases} y = -1, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x-2)^2 + (-1+1)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x-2)^2 + 0 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x-2)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ \left[\begin{array}{l} x - 2 = 2, \\ x - 2 = -2. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В результаті розв'язання цієї системи рівнянь отримано дві точки: **(4; – 1)** і **(0; – 1)**. Але точка **(4; – 1)** не належить ані множині $\boldsymbol{A}$, ані множині $\boldsymbol{C}$. Тому вона не може належати жодному перетину за участю цих множин. Отже, нас задовольняє лише точка **(0; – 1)**, яка належить усім трьом множинам. Таким чином, $inf_{O_x}(A \cap B \cup C) = 0$. Також є очевидним, що $inf_{O_y}(A \cap B \cap C) = -1$.

Супремумом по 1-й компоненті для перетину $A \cap B \cup C$ є точка перетину лінії $y = -1$ і окружності множини $\boldsymbol{C}$, тобто $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$. Знайдемо координати цієї точки.

$$\begin{cases} y = -1, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x+1)^2 + (-1+2)^2 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x+1)^2 + 1 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ (x+1)^2 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ \left[\begin{array}{l} x + 1 = 2\sqrt{2}, \\ x + 1 = -2\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} - 1, \\ x = -2\sqrt{2} - 1. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2\sqrt{2} - 1, \\ y = -1. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2\sqrt{2} - 1, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В результаті розв'язання цієї системи рівнянь отримано дві точки: $(2\sqrt{2} - 1; -1)$ і $(-2\sqrt{2} - 1; -1)$. Але точка $(-2\sqrt{2} - 1; -1)$ не належить ані множині A, ані множині B. Тому вона не може належати жодному перетину за участю цих множин. Отже, нас задовольняє лише точка $(2\sqrt{2} - 1; -1)$, яка належить усім трьом множинам. Таким чином, $sup_{O_x}(A \cap B \cap C) = 2\sqrt{2} - 1$.

Супремумом по 2-й компоненті для перетину $A \cap B \cap C$ є ордината точки перетину окружностей множини B і множини C. Знайдемо координати цієї точки.

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + (y+1)^2 = 4, \\ x^2 + 2x + 1 + (y+2)^2 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ 6x - 3 + (y+2)^2 - (y+1)^2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ 6x - 3 + y^2 + 4y + 4 - y^2 - 2y - 1 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ 6x + 2y = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(\frac{5-6x}{2} + 1\right)^2 = 4, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + \left(\frac{5-6x}{2}\right)^2 + 5 - 6x + 1 = 4, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 6 + \left(\frac{5-6x}{2}\right)^2 = 0, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 40x + 24 + (5-6x)^2 = 0, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 40x + 24 + 25 - 60x + 36x^2 = 0, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 40x^2 - 100x + 49 = 0, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 4 \cdot 40 \cdot 49}}{80}, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 7840}}{80}, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{2160}}{80}, \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

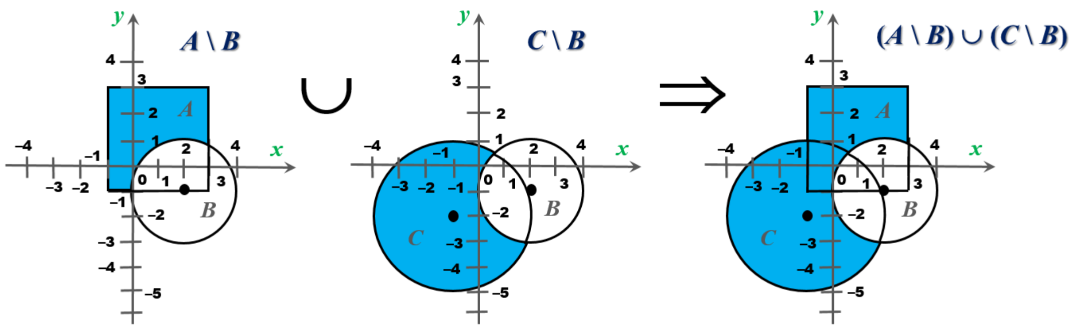
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} x_1 &= 1.83,\\ x_2 &= 0.67,\end{aligned}\right. \\ y = \frac{5-6x}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1.83,\\ y = -2.99.\end{cases}\\ \begin{cases} x = 0.67,\\ y = 0.49.\end{cases}\end{array}\right.$$

В результаті розв’язання цієї системи рівнянь отримано дві точки: **(1.83; – 2.99)** і **(0.67; 0.49)**. Але точка **(1.83; – 2.99)** не належить множині $\boldsymbol{A}$, тому не може належати жодному перетину за участю цієї множини. Тому нас задовольняє єдина точка **(0.67; 0.49)**. Отже, $\boldsymbol{sup_{O_y}}(A \cap B \cap C) = \mathbf{0.49}$.

Розглянемо тепер ***<u>диз’юнктивну суму</u>*** $\boldsymbol{A \oplus B \oplus C}$. Як можна побачити із графічного подання цієї операції для зазначених множин, інтервали проекцій множин $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ при виконанні диз’юнктивної суми, як і при об’єднанні множин, також об’єднуються. З цього випливає, що для диз’юнктивної суми зазначених множин інфінуми і супремуми по всім компонентам будуть збігатися із відповідними інфінумами та супремумами об’єднання цих множин. Але об’єднання інтервалів проекцій, на відміну від обчислення інфінумів та супремумів, при диз’юнктивній сумі не є загальним правилом.

в) *Графічно знайти множину (A \ B) ∪ (C \ B), а також проекцію цієї множини на обидві осі та її інфінум та супремум по обом осям*

<u>Розв’язання</u>. Як і у випадках задання множин кругами Ейлера, операції над графічно заданими множинами кортежів також виконуються покроково. Спочатку графічно виконується операція різниці $\boldsymbol{A \setminus B}$, потім операція різниці $\boldsymbol{C \setminus B}$, і в останню чергу операція об’єднання отриманих множин. При цьому пошук проекцій та інфінумів та супремумів для різниці $\boldsymbol{A \setminus B}$ і остаточної множини $\boldsymbol{(A \setminus B) \cup (C \setminus B)}$ не викликає труднощів. Для різниці $\boldsymbol{C \setminus B}$ супремум по 1-й компоненті досягається в точці перетину окружностей множин $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Ці точки було знайдено в попередньому завданні: це точки **(1.83; – 2.99)** і **(0.67; 0.49)**. Із цих двох точок точка **(1.83; – 2.99)** розташована правіше по осі $\boldsymbol{O_x}$, тому супремум цієї різниці по 1-й компоненті буде дорівнювати **1.83**. Графічно цей процес відображений на наступній схемі.



$\text{Пр}_{O_x}(A \setminus B) = \{(x) \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$ ∪ $\text{Пр}_{O_x}(C \setminus B) = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 1{,}83\}$ = $\text{Пр}_{O_x}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 3\}$

$\text{Пр}_{O_y}(A \setminus B) = \{(y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$ ∪ $\text{Пр}_{O_y}(C \setminus B) = \{(y) \mid -5 \leqslant y \leqslant 1\}$ = $\text{Пр}_{O_y}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = \{(y) \mid -5 \leqslant y \leqslant 3\}$

$inf_{O_x}(A \setminus B) = -1$	$inf_{O_x}(C \setminus B) = -4$	$inf_{O_x}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = -4$
$sup_{O_x}(A \setminus B) = 3$	$sup_{O_x}(C \setminus B) = 1{,}83$	$sup_{O_x}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = 3$
$inf_{O_y}(A \setminus B) = -1$	$inf_{O_y}(C \setminus B) = -5$	$inf_{O_y}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = -5$
$sup_{O_y}(A \setminus B) = 3$	$sup_{O_y}(C \setminus B) = 1$	$sup_{O_y}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = 3$

Для пошуку інфінумів та супремумів остаточної множини були обрані відповідно мінімальні та максимальні величини серед інфінумів та супремумів об’єднуваних множин, тобто

$$\boldsymbol{inf}_{O_x}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = \boldsymbol{min}\,(\boldsymbol{inf}_{O_x}(A \setminus B),\ \boldsymbol{inf}_{O_x}(C \setminus B)) = -4\ ;$$

$$\boldsymbol{inf}_{O_y}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = \boldsymbol{min}\,(\boldsymbol{inf}_{O_y}(A \setminus B),\ \boldsymbol{inf}_{O_y}(C \setminus B)) = -5;$$

$$\boldsymbol{sup}_{O_x}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = \boldsymbol{max}\,(\boldsymbol{sup}_{O_x}(A \setminus B),\ \boldsymbol{sup}_{O_x}(C \setminus B)) = 3;$$

$$\boldsymbol{sup}_{O_y}((A \setminus B) \cup (C \setminus B)) = \boldsymbol{max}\,(\boldsymbol{sup}_{O_y}(A \setminus B),\ \boldsymbol{sup}_{O_y}(C \setminus B)) = 3.$$

№ 5. *Множини кортежів задано характеристичними предикатами*

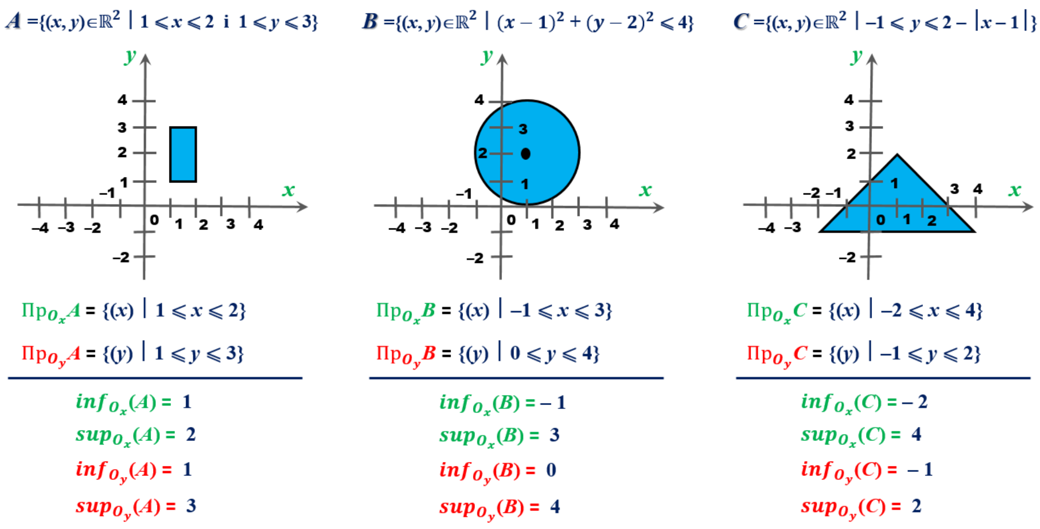
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2 \ \text{ і } \ 1 \leqslant y \leqslant 3\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant 2 - |x-1|\}.$$

а) *Графічно зобразити ці множини на координатній площині, а також знайти їх проекції на обидві осі*

Розв’язання. Множина A на координатній площині є прямокутником, який зовні обмежений прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 3$. Множина B розташована всередині окружності радіусу $r = 2$ і з центром в точці $(1; 2)$. Множина і C розташована всередині трикутнику, обмеженого прямою $y = -1$ і ламаною $y = 2 - |x - 1|$. Графічно ці множини мають наступний вигляд.



Для множини A очевидно, що її проекція на O_x – це відрізок осі абсцис від найменшої точки $x = 1$ (відповідно в цій точці досягається інфінум множини A по 1-й компоненті) до найбільшої $x = 2$ (відповідно в цій точці досягається супремум множини A по 1-й компоненті). Проекція множини A на O_y – це відрізок осі ординат від найменшої точки $y = 1$ (відповідно в цій точці досягається інфінум множини A по 2-й компоненті) до найбільшої $y = 3$ відповідно в цій точці досягається супремум множини A по 2-й компоненті).

Для множини $\boldsymbol{B}$ її проекція на $\boldsymbol{O_x}$ - це відрізок осі абсцис від найменшої точки $\boldsymbol{x}$ **= 1 –** $\boldsymbol{r}$ **= 1 – 2 = – 1** (відповідно в цій точці досягається інфінум множини $\boldsymbol{B}$ по 1-й компоненті) до найбільшої $\boldsymbol{x}$ **= 1 +** $\boldsymbol{r}$ **= 1 + 2 = 3** (відповідно в цій точці досягається супремум множини $\boldsymbol{B}$ по 1-й компоненті). Проекція множини $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{O_y}$ – це відрізок осі ординат від найменшої точки $\boldsymbol{y}$ **= 2–** $\boldsymbol{r}$ **= 2 – 2 = 0** (відповідно в цій точці досягається інфінум множини $\boldsymbol{B}$ по 2-й компоненті) до найбільшої $\boldsymbol{y}$ **= 2 +** $\boldsymbol{r}$ **= 2 + 2 = 4** (відповідно в цій точці досягається супремум множини $\boldsymbol{B}$ по 2-й компоненті).

Для множини $\boldsymbol{C}$ її інфінум і супремум по 1-й компоненті досягається в точках перетину прямої $\boldsymbol{y}$ **= – 1** з ламаною $\boldsymbol{y}$ **= 2 –** $|\boldsymbol{x} - \mathbf{1}|$. Знайдемо ці точки.

$$\begin{cases} \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}, \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{2} - |\boldsymbol{x} - \mathbf{1}|. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}, \\ \mathbf{2} - |\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| = -\mathbf{1}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}, \\ |\boldsymbol{x} - \mathbf{1}| = \mathbf{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}, \\ \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x} - \mathbf{1} = \mathbf{3}, \\ \boldsymbol{x} - \mathbf{1} = -\mathbf{3}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{4}, \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}. \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{x} = -\mathbf{2}, \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1}. \end{cases} \end{array}\right.$$

В результаті розв'язання даної системи рівнянь було отримано дві точки: **(4; – 1)** і **(– 2; – 1)**. По осі $\boldsymbol{O_x}$ точка **(– 2; – 1)** розташована лівіше точки **(4; – 1)**. Отже, інфінум по першій компоненті множини $\boldsymbol{C}$ досягається в точці **(– 2; – 1)**, тобто $\boldsymbol{inf_{O_x}(C)}$ **= – 2**, а $\boldsymbol{sup_{O_x}(C)}$ **= 4**. Аналітичне розв'язання вказаної системи рівнянь лише підтвердило отриманий графічний результат, який в даному випадку є очевидним.

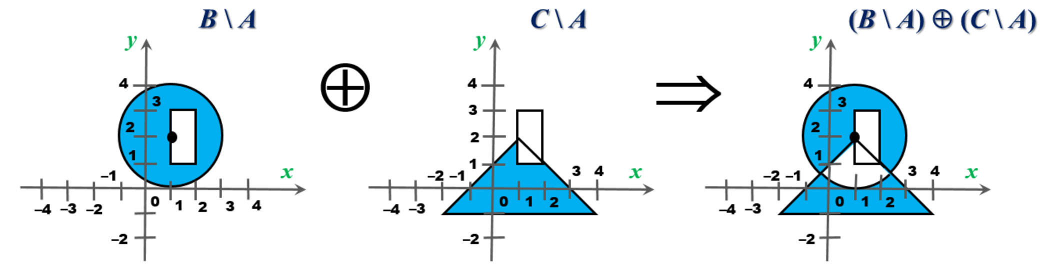
Із рівняння ламаної $\boldsymbol{y}$ **= 2 –** $|\boldsymbol{x} - \mathbf{1}|$, що обмежує сторони трикутника для множини $\boldsymbol{C}$, зрозуміло, що її найвищою точкою (єдиною точкою злому) є точка **(1; 2)**. Тому саме в цій точці досягається супремум множини $\boldsymbol{C}$ по 2-й компоненті, тобто $\boldsymbol{sup_{O_y}(C)}$ **= 2**. Знизу по осі $\boldsymbol{O_y}$ множина $\boldsymbol{C}$ обмежена прямою $\boldsymbol{y}$ **= – 1**. Тому є очевидним, що $\boldsymbol{inf_{O_y}(C)}$ **= – 1**.

В зв'язку з цим, проекція на $\boldsymbol{O_x}$ множини $\boldsymbol{C}$ очевидно є відрізком осі абсцис від найменшої точки $\boldsymbol{x}$ **= – 2** до найбільшої $\boldsymbol{x}$ **= 4**. Проекція множини $\boldsymbol{C}$ на ось $\boldsymbol{O_y}$ – це відрізок осі ординат від найменшої точки $\boldsymbol{y}$ **= – 1** до найбільшої $\boldsymbol{y}$ **= 2**.

б) *Графічно знайти множину* $(B \setminus A) \oplus (C \setminus A)$, *а також проекцію цієї множини на обидві осі та її інфінум та супремум по обом компонентам*

Розв'язання. Покроково ця множина графічно будується в наступний спосіб.

Як легко помітити із цього графічного подання, різниця з множиною $\boldsymbol{A}$ жодним чином не вплинула на проекції та інфінуми і супремуми по 1-й компоненті множин $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Це є наслідком того, що для проекцій цих множин виконуються включення $\text{Пр}_{\boldsymbol{O_x}}(\boldsymbol{A}) \subset \text{Пр}_{\boldsymbol{O_x}}(\boldsymbol{B})$ і $\text{Пр}_{\boldsymbol{O_x}}(\boldsymbol{A}) \subset \text{Пр}_{\boldsymbol{O_x}}(\boldsymbol{C})$. Як можна побачити, для самих множин ця вимога не є обов'язковою ($\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, але $\boldsymbol{A} \not\subset \boldsymbol{C}$). По 2-й компоненті для цих різниць склалася та сама ситуація, але її причини вже різні. Для множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ причиною є відношення включення проекцій, тобто $\text{Пр}_{\boldsymbol{O_y}}(\boldsymbol{A}) \subset \text{Пр}_{\boldsymbol{O_y}}(\boldsymbol{B})$. Для множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ для проекцій на $\boldsymbol{O_y}$ таке включення не виконується, тобто $\text{Пр}_{\boldsymbol{O_y}}(\boldsymbol{A}) \not\subset \text{Пр}_{\boldsymbol{O_y}}(\boldsymbol{C})$. Якщо б множина $\boldsymbol{A}$ була хоч трошки «ширшою» вліво або просто розташована лівіше (щоб точка **(1; 2)** злому для множини $\boldsymbol{C}$ була розташована всередині



$B \setminus A$	$C \setminus A$	$(B \setminus A) \oplus (C \setminus A)$
$Пр_{O_x}(B \setminus A) = \{(x) \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$	$Пр_{O_x}(C \setminus A) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$	$Пр_{O_x}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$
$Пр_{O_y}(B \setminus A) = \{(y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4\}$	$Пр_{O_y}(C \setminus A) = \{(y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 2\}$	$Пр_{O_y}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = \{(y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 4\}$
$inf_{O_x}(B \setminus A) = -1$	$inf_{O_x}(C \setminus A) = -2$	$inf_{O_x}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = -2$
$sup_{O_x}(B \setminus A) = 3$	$sup_{O_x}(C \setminus A) = 4$	$sup_{O_x}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = 4$
$inf_{O_y}(B \setminus A) = 0$	$inf_{O_y}(C \setminus A) = -1$	$inf_{O_y}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = -1$
$sup_{O_y}(B \setminus A) = 4$	$sup_{O_y}(C \setminus A) = 2$	$sup_{O_y}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = 4$

прямокутника множини A) при незмінній множині C, то по 2-й компоненті така ситуація вже була б неможливою. Далі для множин $B \setminus A$ і $C \setminus A$ виконується диз'юнктивна сума. В цьому випадку для проекцій, як і для точних границь по всім компонентам, виконуються ті ж самі операції, як і при об'єднанні множин, тобто інтервали проекцій при диз'юнктивній сумі вказаних множин об'єднуються. При цьому для інфінумів обирається мінімальний, а для супремумів – максимальний із наявних. Таким чином, для множини $(B \setminus A) \oplus (C \setminus A)$ маємо:

$$inf_{O_x}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = min\,(inf_{O_x}(B \setminus A),\ inf_{O_x}(C \setminus A)) = -2\,;$$

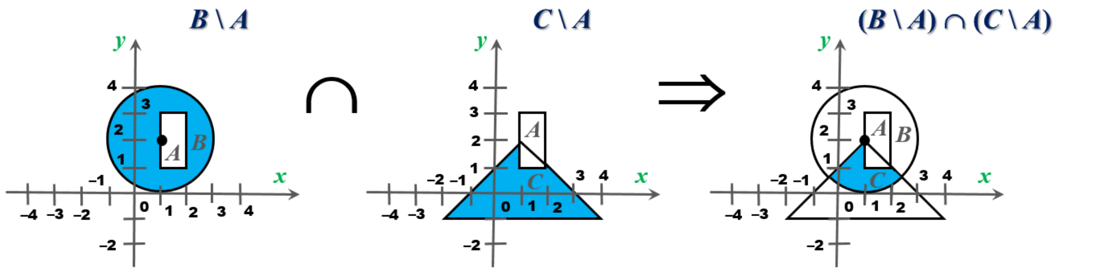
$$inf_{O_y}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = min\,(inf_{O_y}(B \setminus A),\ inf_{O_y}(C \setminus A)) = -1;$$

$$sup_{O_x}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = max\,(sup_{O_x}(B \setminus A),\ sup_{O_x}(C \setminus A)) = 4;$$

$$sup_{O_y}((B \setminus A) \oplus (C \setminus A)) = max\,(sup_{O_y}(B \setminus A),\ sup_{O_y}(C \setminus A)) = 4.$$

в) ***Графічно знайти множину $(B \setminus A) \cap (C \setminus A)$, а також проекцію цієї множини на обидві осі та її інфінум та супремум по обом компонентам***

Розв'язання. Покроково ця множина графічно будується в наступний спосіб.



$B \setminus A$		$C \setminus A$		$(B \setminus A) \cap (C \setminus A)$
$Пр_{O_x}(B \setminus A) = \{(x) \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$	$\cap$	$Пр_{O_x}(C \setminus A) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$	$\neq$	$Пр_{O_x}((B \setminus A) \cap (C \setminus A)) = \{(x) \mid 1-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{2}\}$
$Пр_{O_y}(B \setminus A) = \{(y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4\}$	$\cap$	$Пр_{O_y}(C \setminus A) = \{(y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 2\}$	$\neq$	$Пр_{O_y}((B \setminus A) \cap (C \setminus A)) = \{(y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$
$inf_{O_x}(B \setminus A) = -1$		$inf_{O_x}(C \setminus A) = -2$		$inf_{O_x}((B \setminus A) \cap (C \setminus A)) = 1-\sqrt{2}$
$sup_{O_x}(B \setminus A) = 3$		$sup_{O_x}(C \setminus A) = 4$		$sup_{O_x}((B \setminus A) \cap (C \setminus A)) = 1+\sqrt{2}$
$inf_{O_y}(B \setminus A) = 0$		$inf_{O_y}(C \setminus A) = -1$		$inf_{O_y}((B \setminus A) \cap (C \setminus A)) = 0$
$sup_{O_y}(B \setminus A) = 4$		$sup_{O_y}(C \setminus A) = 2$		$sup_{O_y}((B \setminus A) \cap (C \setminus A)) = 2$

Процес обчислення інтервалів проекцій та точних границь по обом компонентам для різниць $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{A}$ було докладно описано при розв'язанні попереднього завдання. Будемо використовувати цей результат і тепер. Як видно із наведеного графічного подання, при перетині множин не відбувається перетину інтервалів проекцій цих множин по кожній із осей. Тому точки інфінумів та супремумів треба обчислювати. Точки, за якими визначається в даному випадку інфінум і супремум по 1-й компоненті множини $(\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}) \cap (\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{A})$, - це точки перетину окружності множини $\boldsymbol{B}$ і ламаної множини $\boldsymbol{C}$.

$$\begin{cases} y = 2 - |x-1|, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ (2-y)^2 + (y-2)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ 2(y-2)^2 = 4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ (y-2)^2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ (y-2)^2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y - 2 = \sqrt{2}, \\ y - 2 = -\sqrt{2}. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2 + \sqrt{2}, \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ y = 2 + \sqrt{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} |x-1| = 2 - y, \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x-1| = -\sqrt{2}, \\ y = 2 + \sqrt{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} |x-1| = \sqrt{2}, \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varnothing, \\ y = 2 + \sqrt{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{2}, \\ x - 1 = -\sqrt{2}, \end{array} \right. \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}, \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}, \\ y = 2 - \sqrt{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

В результаті розв'язання даної системи рівнянь було отримано дві точки: $(1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$ і $(1 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$. Очевидно, що точка $(1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$ по осі O_x розташована лівіше. Тому саме в цій точці досягається інфінум досліджуваної множини по 1-й компоненті. Супремум по 1-й компоненті досягається в точці $(1 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$. Відповідно проекцією множини $(\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}) \cap (\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{A})$ на O_x буде відрізок осі абсцис від найменшої точки $x = 1 - \sqrt{2}$ до найбільшої $x = 1 + \sqrt{2}$. При цьому із графічного подання цієї множини стає очевидним, що її інфінум по 2-й компоненті збігається з відповідним інфінумом множини $\boldsymbol{B}$, а її супремум по 2-й компоненті – з відповідним супремумом множини $\boldsymbol{C}$. Отже її проекцією на ось O_y буде відрізок осі ординат від найменшої точки $y = 0$ до найбільшої $y = 2$.

№ 6. *Множини кортежів задано характеристичними предикатами*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geqslant 2\};$$

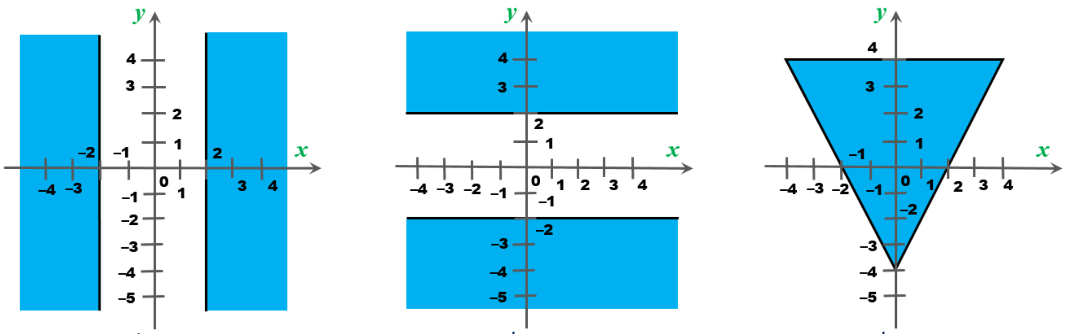
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \geqslant 2\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \geqslant y \geqslant |2x| - 4\}.$$

а) *Графічно зобразити ці множини на координатній площині а також знайти їх проекції на обидві осі*

<u>*Розв'язання*</u>. Характеристичний предикат множини $\boldsymbol{A}$ описує геометричне місце всіх точок координатної площини за винятком полоси вздовж осі ординат, яка обмежена зовні прямими $x = -2$ і $x = 2$. Характеристичний предикат множини $\boldsymbol{B}$ описує геометричне місце всіх точок координатної площини за винятком полоси вздовж осі абсцис, яка обмежена зовні прямими $y = -2$ і $y = 2$. Характеристичний предикат множини $\boldsymbol{C}$ описує область всередині трикутника, обмеженого прямою $y = 2$ і ламаною $y = |2x| - 4$. Графічно ці множини мають наступний вигляд.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geqslant 2\}$ $\quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \geqslant 2\}$ $\quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \geqslant y \geqslant |2x| - 4\}$



$\text{Пр}_{O_x}A = \{(x) \mid (-\infty \leqslant x \leqslant -2) \& (2 \leqslant x \leqslant \infty)\}$	$\text{Пр}_{O_x}B = \{(x) \mid (-\infty \leqslant x \leqslant \infty)\}$	$\text{Пр}_{O_x}C = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$
$\text{Пр}_{O_y}A = \{(y) \mid -\infty \leqslant y \leqslant \infty\}$	$\text{Пр}_{O_y}B = \{(y) \mid (-\infty \leqslant y \leqslant -2) \& (2 \leqslant y \leqslant \infty)\}$	$\text{Пр}_{O_y}C = \{(y) \mid -4 \leqslant y \leqslant 4\}$
$inf_{O_x}(A)$ = *не існує*	$inf_{O_x}(B)$ = *не існує*	$inf_{O_x}(C) = -4$
$sup_{O_x}(A)$ = *не існує*	$sup_{O_x}(B)$ = *не існує*	$sup_{O_x}(C) = 4$
$inf_{O_y}(A)$ = *не існує*	$inf_{O_y}(B)$ = *не існує*	$inf_{O_y}(C) = -4$
$sup_{O_y}(A)$ = *не існує*	$sup_{O_y}(B)$ = *не існує*	$sup_{O_y}(C) = 4$

Є очевидним, що ані множина $\boldsymbol{A}$, ані множина $\boldsymbol{B}$ не мають інфінумів або супремумів по жодній компоненті, бо ці множини не обмежені по жодній осі. З цього випливає, що проекцією множини $\boldsymbol{A}$ на ось $\boldsymbol{O_y}$ буде вся ось ординат. По осі $\boldsymbol{O_x}$ зі всієї осі абсцис при проектуванні на неї множини $\boldsymbol{A}$ вилучається відкритий відрізок від найменшої точки $x = -2$ до найбільшої $x = 2$. Тому проекція множини $\boldsymbol{A}$ на ось $\boldsymbol{O_x}$ буде об'єднувати два інтервали, тобто

$$\text{Пр}_{O_x}A = \{(x) \mid (-\infty \leqslant x \leqslant -2) \;\&\; (2 \leqslant x \leqslant \infty)\}.$$

Для множини $\boldsymbol{B}$ проекцією на ось $\boldsymbol{O_x}$ буде вся ось абсцис. При цьому при проектуванні множини $\boldsymbol{B}$ на ось $\boldsymbol{O_y}$ зі всієї осі ординат вилучається відкритий відрізок від найменшої точки $y = -2$ до найбільшої $y = 2$. Тому проекція множини $\boldsymbol{B}$ на ось $\boldsymbol{O_y}$ буде об'єднувати два інтервали, тобто

$$\text{Пр}_{O_y}B = \{(y) \mid (-\infty \leqslant y \leqslant -2) \;\&\; (2 \leqslant y \leqslant \infty)\}.$$

Множина $\boldsymbol{C}$ по осі $\boldsymbol{O_y}$ зверху обмежена прямою $y = 4$, а знизу точкою злому ламаної $y = |2x| - 4$, тобто точкою $(0; -4)$. Отже, проекцією цієї множини на ось $\boldsymbol{O_y}$ буде відрізок числової осі від найменшої точки $y = -4$ до найбільшої $y = 4$. Відповідно в цих точках будуть досягатися інфінум і супремум множини $\boldsymbol{C}$ по 2-й компоненті. Значення інфінуму та супремуму множини $\boldsymbol{C}$ по 1-й компоненті визначаються точками перетину прямої $\boldsymbol{y = 4}$ і ламаної $\boldsymbol{y = |2x| - 4}$.

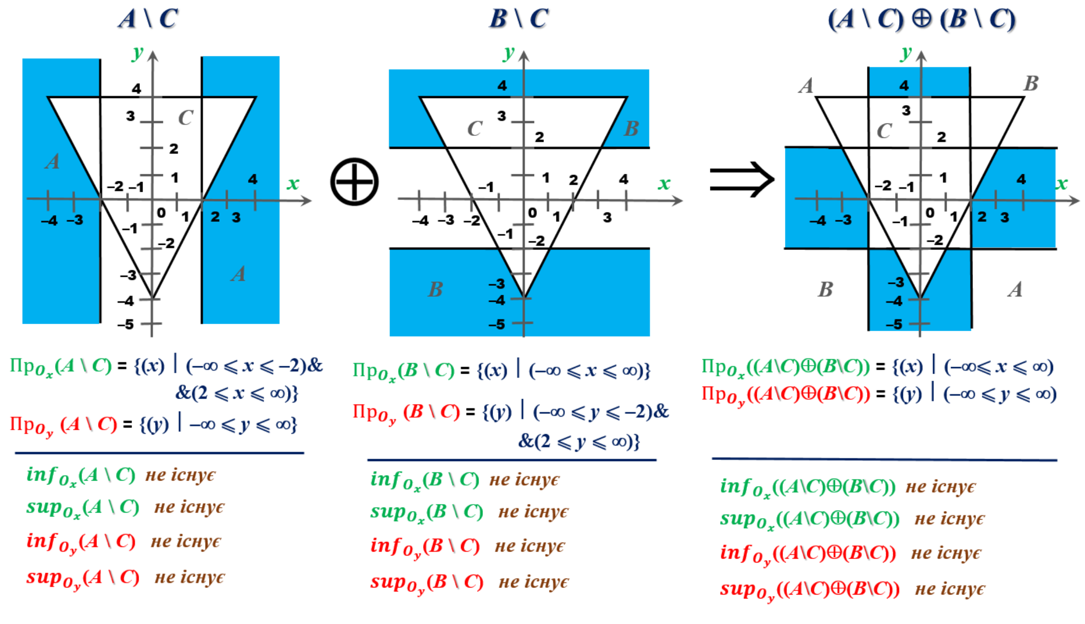
$$\begin{cases} y = 4, \\ y = |2x| - 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ 4 = |2x| - 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ |2x| = 8. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \left[\begin{array}{l} 2x = 8, \\ 2x = -8. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -4. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 4. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

В результаті розв'язання даної системи рівнянь було отримано дві точки: **(– 4; 4)** і **(4; 4)**. Точка **(– 4; 4)** по осі $\boldsymbol{O_x}$ розташована лівіше точки **(4; 4)**. Тому саме точка **(– 4; 4)** визначає інфінум, а точка **(4; 4)** – супремум множини $\boldsymbol{C}$ по 1-й компоненті. Отже, проекцією множини $\boldsymbol{C}$ на $\boldsymbol{O_x}$ буде відрізок осі абсцис від найменшої точки $\boldsymbol{x = -4}$ до найбільшої $\boldsymbol{x = 4}$. Аналітичне розв'язання наведеної системи рівнянь лише підтвердило очевидний графічний результат для множини $\boldsymbol{C}$.

б) *Графічно знайти множину (A \ C) ⊕ (B \ C), а також проекцію цієї множини на обидві осі та її інфінум та супремум по обом компонентам*

Розв'язання. Покроково ця множина графічно будується в наступний спосіб.



Різниця множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ з множиною $\boldsymbol{C}$ ніяк не позначається на проекції на обидві осі, а також на їх інфінумах та супремумах по обом компонентам. Це пов'язане з необмеженістю по обом осям множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Тому всі проекції та всі точні границі для різниці $\boldsymbol{A \setminus C}$ збігаються з відповідними показниками множини $\boldsymbol{A}$, а всі проекції та всі точні границі різниці $\boldsymbol{B \setminus C}$ збігаються з відповідними показниками множини $\boldsymbol{B}$. В даному прикладі знову при виконанні диз'юнктивної суми, як і при об'єднанні множин, інтервали проекцій множин-доданків об'єднуються. При проектуванні на будь-яку ось хоча б одна із множин $\boldsymbol{A \setminus C}$ або $\boldsymbol{B \setminus C}$ в якості проекції має всю числову ось, тобто універсум. Тому при об'єднанні з будь-яким іншим інтервалом буде отримано все той же універсум, тобто всю числову ось. При обчисленні інфінумів та супремумів для диз'юнктивної суми, як і для об'єднання множин, обираються відповідно мінімальні та максимальні значення серед значень для множин-доданків. Але в даному випадку для жодної з множин-доданків не існує ані жодного інфінуму, ані жодного супремуму. З цього випливає, що для диз'юнктивної суми цих множин жодна точна границя також не буде існувати.

в) *Графічно знайти множину $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, а також проекцію цієї множини на обидві осі та її інфінум та супремум по обом компонентам*

Розв'язання. При перетині множин A і C від множини C залишаються лише ті елементи, які одночасно належать і множині A. Через переривчастість інтервалу проекції на ось O_x проекція множини $A \cap C$ також буде складатися з двох інтервалів. Аде через обмеженість множини C вони також будуть обмеженими. З проекції на ось O_x множини C вилучається відрізок, який був відсутній в проекції на ось O_x множини A. Та частина множини C, що розташована у від'ємній півплощині відносно осі абсцис, також не ввійде до перетину, тому що вона відсутня в множині A. А саме ця частина множини C забезпечувала її інфінум по 2-й компоненті. Тому інфінум цього перетину по 2-й компоненті «підскочить» до нульового значення. Відповідно проекцією цього перетину на O_y буде відрізок числової осі від найменшого значення $y = 0$ до найбільшого $y = 4$. Супремум цього перетину по 2-й компоненті буде збігатися з відповідним супремумом множини C, тому що лише її «верхня» частина має спільні точки з множиною A.

При проектуванні перетину $B \cap C$ переривчастою буде проекція на ось O_y через переривчастість відповідної проекції множини B. При цьому інфінум та супремум по 2-й компоненті множини C збережуть свої значення і для перетину $B \cap C$. Проекція на ось O_x множини B збігалася зі всією осією абсцис, тобто являла собою універсум. Тому проекція на O_x перетину $B \cap C$ буде збігатися з відповідною проекцією множини C. З цього випливає, що інфінум і супремум цього перетину по 1-й компоненті також буде збігатися з відповідними інфінумом і супремумом множини C.

При об'єднанні множин об'єднуються інтервали їх проекції по кожній осі. Тому на ось O_x проекція множини $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ стає неперервною за рахунок того, що відповідна проекція множини $B \cap C$ повністю перекриває інтервал переривання проекції множини $A \cap C$. Тому проекція множини $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ є відрізком осі абсцис від найменшої точки $x = -4$ до найбільшої $x = 4$. На ось O_y проекція цієї множини буде переривчастою за рахунок того, що переривчастою була відповідна проекція множини $B \cap C$, а проекція на ось O_y множини $A \cap C$ цей інтервал переривання перекриває не повністю. Графічна покрокова побудова цієї множини має наступний вигляд.\

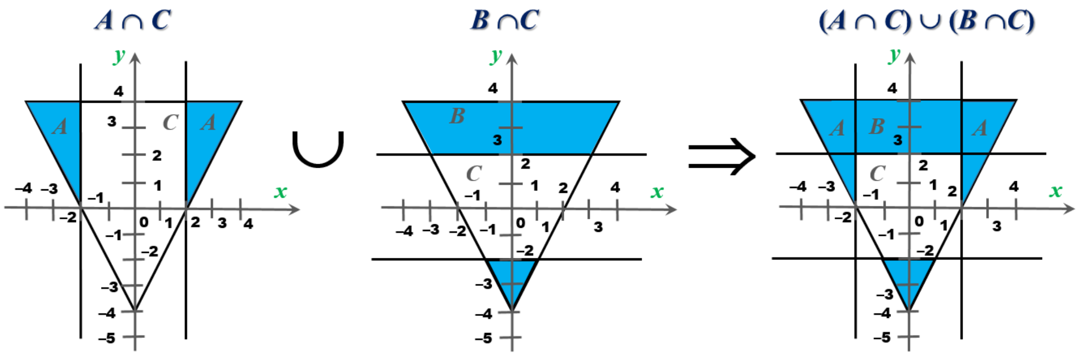
Скориставшись формулами для обчислення супремумів та інфінумів при об'єднанні множин, маємо:

$$inf_{O_x}((A\cap B)\cup(B\cap C)) = min\,(inf_{O_x}(A\cap B), inf_{O_x}(B\cap C)) = -4;$$

$$inf_{O_y}((A\cap B)\cup(B\cap C)) = min\,(inf_{O_y}(A\cap B), inf_{O_y}(B\cap C)) = -4;$$

$$sup_{O_x}((A\cap B)\cup(B\cap C)) = max\,(sup_{O_x}(A\cap B), sup_{O_x}(B\cap C)) = 4;$$

$$sup_{O_y}((A\cap B)\cup(B\cap C)) = max\,(sup_{O_y}(A\cap B), sup_{O_y}(B\cap C)) = 4.$$



$Пр_{O_x}(A \cap C) = \{(x) \mid (-4 \leqslant x \leqslant -2) \& \&(2 \leqslant x \leqslant 4)\}$

$Пр_{O_y}(A \cap C) = \{(y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4\}$

$inf_{O_x}(A \cap C) = -4$

$sup_{O_x}(A \cap C) = 4$

$inf_{O_y}(A \cap C) = 0$

$sup_{O_y}(A \cap C) = 4$

$Пр_{O_x}(B \cap C) = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$

$Пр_{O_y}(B \cap C) = \{(y) \mid (-4 \leqslant y \leqslant -2) \& \&(2 \leqslant y \leqslant 4)\}$

$inf_{O_x}(B \cap C) = -4$

$sup_{O_x}(B \cap C) = 4$

$inf_{O_y}(B \cap C) = -4$

$sup_{O_y}(B \cap C) = 4$

$Пр_{O_x}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \{(x) \mid -4 \leqslant x \leqslant 4\}$

$Пр_{O_y}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \{(y) \mid (-4 \leqslant y \leqslant -2) \& \&(0 \leqslant y \leqslant 4)\}$

$inf_{O_x}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = -4$

$sup_{O_x}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = 4$

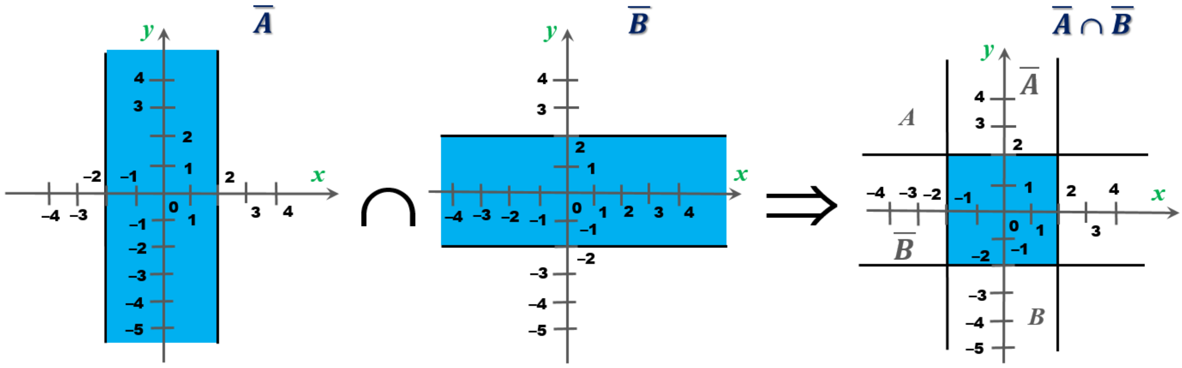
$inf_{O_y}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = -4$

$sup_{O_y}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = 4$

г) ***Графічно знайти множину*** $(\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)$***, а також проекцію цієї множини на обидві осі та її інфінум та супремум по обом компонентам***

Розв'язання. Спочатку побудуємо множину $\overline{A} \cap \overline{B}$. Множина $\overline{A}$ буде складатися із всіх тих точок площини, які не належать множині A. Множина $\overline{B}$, в свою чергу, буде складатися із всіх тих точок площини, які не ввійшли до множини B. Це робить множину $\overline{A}$ обмеженою по осі O_x, а множину $\overline{B}$ – обмеженою по осі O_y. Тепер замість об'єднання двох різних інтервалів, проекція множини $\overline{A}$ на ось O_x буде неперервним відрізком осі абсцис від найменшого значення $x = -2$ до найбільшого $x = -2$. Проекцією множини $\overline{A}$ на ось O_y залишається вся ось ординат, тобто універсум. Як наслідок, по 2-й компоненті у множини $\overline{A}$ не існує ані інфінуму, ані супремуму. Замість об'єднання двох різних інтервалів, проекція множини $\overline{B}$ на ось O_y буде неперервним відрізком осі ординат від найменшого значення $y = -2$ до найбільшого $y = -2$. Проекцією множини $\overline{B}$ на ось O_x залишається вся ось абсцис, тобто універсум. Як наслідок, по 1-й компоненті у множини $\overline{B}$ не існує ані інфінуму, ані супремуму. Отже в результаті перетину цих множин ми отримаємо множину, обмежену по обом осям. Графічно цей процес має наступний вигляд.

Супремум та інфінум по 1-й компоненті для перетину множин буде збігатися з відповідними показниками для множини $\overline{A}$, бо саме за її рахунок перетин є обмеженим по цій компоненті. Супремум та інфінум по 2-й компоненті для перетину буде збігатися з відповідними показниками множини $\overline{B}$, бо саме за її рахунок перетин є обмеженим по цій компоненті. Відповідно проекція перетину на O_x буде збігатися з аналогічною проекцією множини $\overline{A}$, а проекція перетину на ось O_y – з відповідною проекцією множини $\overline{B}$.



$Пр_{O_x}(\overline{A}) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
$Пр_{O_y}(\overline{A}) = \{(y) \mid -\infty \leqslant y \leqslant \infty\}$

$inf_{O_x}(\overline{A}) = -2$
$sup_{O_x}(\overline{A}) = 2$
$inf_{O_y}(\overline{A}) =$ *не існує*
$sup_{O_y}(\overline{A}) =$ *не існує*

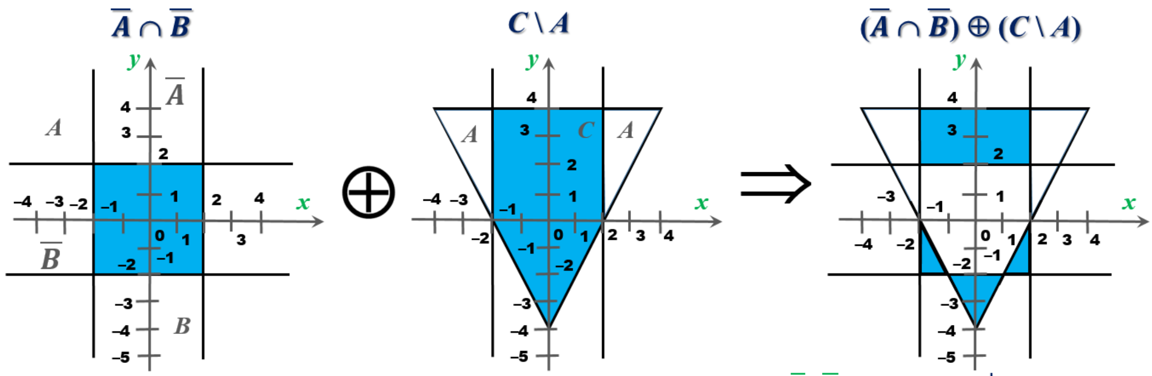
$Пр_{O_x}(\overline{B}) = \{(x) \mid -\infty \leqslant x \leqslant \infty\}$
$Пр_{O_y}(\overline{B}) = \{(y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

$inf_{O_x}(\overline{B}) =$ *не існує*
$sup_{O_x}(\overline{B}) =$ *не існує*
$inf_{O_y}(\overline{B}) = -2$
$sup_{O_y}(\overline{B}) = 2$

$Пр_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
$Пр_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{(y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

$inf_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}) = -2$
$sup_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2$
$inf_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}) = -2$
$sup_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2$

Тепер виконаємо операцію диз'юнктивної суми. Графічне подання даної операції для вказаних множин наочно показує, що об'єднання інтервалів проекцій на кожну вісь при диз'юнктивній сумі множин має місце не завжди. В даному випадку по осі $\boldsymbol{O_x}$ таке об'єднання дійсно відбувається. Але для множини $\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$ і для множини $\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{A}$ проекції на ось $\boldsymbol{O_x}$ однакові. Тому тут має місце ідемпотентність об'єднання множин, тобто проекція на ось $\boldsymbol{O_x}$ остаточної множини буде збігатися із проекцією на цю ось множин-доданків. Але для проекції на ось $\boldsymbol{O_y}$ множини $(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \oplus (\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{A})$ в даному випадку не мають місця ані об'єднання, ані диз'юнктивна сума інтервалів проекцій множин-доданків. Проекція на ось $\boldsymbol{O_y}$ множини $(\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \oplus (\boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{A})$ буде переривчастою і складатися з двох інтервалів: $\boldsymbol{y \in [-4; 0] \cup [2; 4]}$.



$Пр_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
$Пр_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{(y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$

$inf_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}) = -2$
$sup_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2$
$inf_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}) = -2$
$sup_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 2$

$Пр_{O_x}(C \setminus A) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
$Пр_{O_y}(C \setminus A) = \{(y) \mid -4 \leqslant y \leqslant 4\}$

$inf_{O_x}(C \setminus A) = -2$
$sup_{O_x}(C \setminus A) = 2$
$inf_{O_y}(C \setminus A) = -4$
$sup_{O_y}(C \setminus A) = 4$

$Пр_{O_x}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = \{(x) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$
$Пр_{O_y}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = \{(y) \mid (-4 \leqslant y \leqslant 0) \&$
$\& (2 \leqslant y \leqslant 4)\}$

$inf_{O_x}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = -2$
$sup_{O_x}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = 2$
$inf_{O_y}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = -4$
$sup_{O_y}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = 4$

Але для обчислення інфінумів та супремумів по обом осям при виконанні диз'юнктивної суми правило обрання відповідно мінімальних та максимальних значень зберігається. Таким чином, маємо:

$$\boldsymbol{inf_{O_x}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = min\ (inf_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}), inf_{O_x}(C \setminus A)) = -2;}$$

$$\boldsymbol{inf_{O_y}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = min\ (inf_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}), inf_{O_y}(C \setminus A)) = -4;}$$

$$\boldsymbol{sup_{O_x}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = max\ (sup_{O_x}(\overline{A} \cap \overline{B}), sup_{O_x}(C \setminus A)) = 2;}$$

$$\boldsymbol{sup_{O_y}((\overline{A} \cap \overline{B}) \oplus (C \setminus A)) = max\ (sup_{O_y}(\overline{A} \cap \overline{B}), sup_{O_y}(C \setminus A)) = 4.}$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. За яким правилом виконується декартовий добуток множин?
2. Чим декартовий добуток відрізняється від інших операцій над множинами?
3. Сформулюйте основні властивості декартового добутку множин.
4. Що таке кортеж та його довжина?
5. Як відбувається узагальнення декартового добутку множин?
6. Сформулюйте теорему про потужність декартового добутку скінченних множин.
7. Що таке ступінь множини?
8. Наведіть графічні приклади виконання операцій над множинами, елементами яких є кортежі.
9. Що таке проекція кортежу на деяку ось? Наведіть приклади.
10. Що таке проекція множини? Наведіть приклади.
11. Що таке супремум та інфінум множини за деякою компонентою? Наведіть графічні приклади.
12. Знайти декартовий добуток $\boldsymbol{C \times A \times B}$ множин $\boldsymbol{A = \{0, 3, b\}}$, $\boldsymbol{B = \{a, 1\}}$, $\boldsymbol{C = \{0, 1\}}$.
13. Знайти декартовий добуток $\boldsymbol{C \times B \times C}$ множин $\boldsymbol{B = \{a, 1\}}$, $\boldsymbol{C = \{0, 1\}}$.
14. Задано множину кортежів $\boldsymbol{D = \{(1, 0, 0),\ (1, a, 0),\ (a, 0, 0), (a, a, 0),\ (b, 0, 0),\ (b, a, 0)}$. Відновити множини, що беруть участь в цьому декартовому добутку. Вкажіть їх потужності.
15. Для множини $\boldsymbol{D}$ із п.14 знайти його проекції на 1-у і 2-у, на 2-у і 3-ю, а також на 1-у і 3-ю осі.
16. Аналітично довести тотожність $\boldsymbol{(A \cup B) \times (N \cup M) = (A \times N) \cup (B \times N) \cup (A \times M) \cup (B \times M)}$.
17. Аналітично довести тотожність $\boldsymbol{(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)}$.
18. Довести, що для будь-яких непорожніх множин $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ та довільної множини $\boldsymbol{C}$ із того, що $\boldsymbol{(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C}$, випливає, що $\boldsymbol{A = B = C}$.
19. Для множин із задачі № 4 побудувати множину $\boldsymbol{(B \setminus C) \cap \overline{A}}$.
20. Для множин із задачі № 4 побудувати множину $\boldsymbol{(\overline{B} \cap \overline{C}) \oplus A}$.

Список літератури

1. Якімова Н. А. Дискретна математика. Частина 1. Теорія множин. Теорія графів. Курс лекцій. – Одеса: ОНУ ім.І.І. Мечникова, 2022. – 102 с.
2. Марценюк Є. О. Комп'ютерна дискретна математика. – Тернопіль: ТДЕУ, 2014. – 53 с.
3. Михайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика. – Київ: Видавництво Європейського університету, 2003. – 318 с.
4. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
5. Баландіна Н. М., Федоровський С. В. Дискретна математика: методичні вказівки . – Одеса: НУ «ОЮА», 2020. – 65 с.
6. Гвоздинський А. М., Якімова Н. А, Губін В. О. Методи оптимізації в системах прийняття рішень: навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2006. – 324 с.
7. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики. – М.: Энергия, 1980. – 424 с.
8. Думіна О. О. Елементи теорії множин: методичні вказівки. – Харків: УДАЗТ, 2012. – 32 с.
9. Хайрова Н. Ф. Розробка математичного і лінгвістичного забезпечення автоматизованих інформаційно-бібліотечних систем: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 2000. – 20 с.
10. Матвієнко М. П. Комп'ютерна логіка. Навчальний посібник. – К.: Видавництво Ліра-К, 2012. – 288 с.
11. Гвоздинський А. М. Лінник О. В. Основи теорії керування в біомедичних системах: навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2014. – 212 с.
12. Федорова Т. М. Алгебро-логічні моделі та метод побудови ланцюгів лексичних одиниць в системах штучного інтелекту: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 2013. – 20 с.
13. Шапорев С. Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.
14. Белоусов А. И., Ткачев С. Б. Дискретная математика: Учеб. для ВУЗов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. – 744 с.
15. Андерсон Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 960 с.
16. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2001. – 304 с.
17. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2001. – 960 с.
18. Данилов В. Г., Дубнов В. Л., Лакерник А. Р., Райцин А. М. Дискретная математика. Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2008. – 136 с.
19. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики (множини і логіка). – Суми: СДУ, 1998. – 136 с.
20. Гвоздінська Н. А. Предикатні моделі логічних просторів в системах подання знань: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – Харків: ХНУРЕ, 1999. – 20 с.

21. Зиков. О. О. Лекції з алгебри. – Одеса: «Астропринт», 2007. – 400 с.
22. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра, языки, программирование. – Киев: Наук. думка, 1985. – 431 с.
23. Булитко В. К. Елементи теорії дискретних систем. – Одеса: «Астропринт», 1997. – 80 с.
24. Дементьєва В. І. Лінійна алгебра: Конспект лекцій. – Одеса: «Астропринт», 1999. – 256 с.

Навчальне видання

Якімова Наталья Анатольевна

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

В авторській редакції

Підп. до друку 20.12.2023. Формат 60x84/8.
Ум.-друк. арк. 10,0. Наклад 20 пр.
Зам. № 2724.

Видавець і виготовлювач
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4215 від 22.11.2011 р.
65082, м. Одеса, вул. Єлісаветинська, 12, Україна
Тел.: (048) 723 28 39, e-mail: druk@onu.edu.ua