

УДК 521.1

А. Л. Рачинская, Д. А. Рачинская

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Исследована задача об оптимальном по быстрдействию торможении вращений твердого тела под действием управляющего момента с неравными коэффициентами. Кроме того, на твердое тело действует тормозящий момент сил вязкого трения. Считается, что тело динамически несимметрично. Проведено численное исследование годографа вектора кинетического момента в трехмерном пространстве.

MSC: 70F15.

Ключевые слова: твердое тело, управляющий момент, сопротивление, вектор кинетического момента, годограф.

ВВЕДЕНИЕ. Развитие исследований задач динамики и управления движением твердых тел вокруг неподвижной точки состоит в учете того обстоятельства, что тела не являются абсолютно твердыми, а близки к указанным идеальным моделям. Необходимость анализа влияния различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера некоторого фиктивного твердого тела. Наличие возмущающих моментов в уравнениях Эйлера приводит к различным видам годографа вектора кинетического момента твердого тела. Исследования, близкие к приведенному, имеются в работах [1–5].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановка задачи. Рассматривается динамически несимметричное твердое тело, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой совместим с центром инерции твердого тела, а оси связаны с главными центральными осями инерции твердого тела.

На основе подхода [6] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$) (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [6]

$$J\dot{\omega} + [\omega \times J\omega] = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^r. \quad (1)$$

Здесь $\omega = (p, q, r)$ – вектор абсолютной угловой скорости; $J = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела; \mathbf{M}^u – вектор управляющего момента сил; \mathbf{M}^r – момент сил диссипации.

Кинетический момент тела определяется стандартным образом

$$\mathbf{G} = J\omega, \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3), G_1 = A_1p, G_2 = A_2q, G_3 = A_3r, \quad (2)$$

где $G = |\mathbf{G}| = \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}$ его величина.

В работе предполагается, что движение твердого тела происходит в среде с сопротивлением, которое моделируется моментом вида

$$\mathbf{M}^r = -\mathbf{L}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (3)$$

Здесь $L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – тензор сопротивления среды. Сопротивление, действующее на тело, представлено тремя парами приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами $\lambda_1 A_1 p$, $\lambda_2 A_2 q$, $\lambda_3 A_3 r$.

Компоненты управляющего момента сил \mathbf{M}^u на оси Ox_i представлены в виде произведений постоянных b_i имеющих размерность момента сил на безразмерные управляющие функции u_i , подлежащие определению,

$$M_i^u = b_i u_i. \quad (4)$$

Выражения $b_{1,2,3}$ характеризуют эффективность системы управления по каждой из связанной осей.

Для системы (1) требуется найти оптимальные управления $u_i = u_i(t, p, q, r)$, $i = 1, 2, 3$, которые удовлетворяют ограничению $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1$ и переводят систему (1) за минимальное время из произвольного начального состояния $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}^0$ в состояние покоя $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$, где T – время торможения.

Известно, что при $b_i = b$ ($b > 0$) где параметр b может быть функцией времени, оптимальный по быстродействию закон торможения имеет вид: $M_i = -G_i G^{-1}$. Движение в этом частном случае системы управления было изучено в [6].

Если величины b_i близки, то указанный закон торможения будет квазиоптимальным [6]. Поэтому для прикладных задач представляет интерес исследование движения твердого тела с заданным законом управления достаточно простого вида [6]:

$$M_1 = -b_1 \frac{A_1 p}{G}, M_2 = -b_2 \frac{A_2 q}{G}, M_3 = -b_3 \frac{A_3 r}{G}. \quad (5)$$

Уравнения управляемого движения (1) в проекциях на главные центральные оси инерции имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{p} + (A_3 - A_2) qr &= -b_1 \frac{A_1 p}{G} - \lambda_1 A_1 p, \\ A_2 \dot{q} + (A_1 - A_3) pr &= -b_2 \frac{A_2 q}{G} - \lambda_2 A_2 q, \\ A_3 \dot{r} + (A_2 - A_1) pq &= -b_3 \frac{A_3 r}{G} - \lambda_3 A_3 r. \end{aligned} \quad (6)$$

Кинематические соотношения не выписываем, так как уравнения (6) образуют замкнутую систему.

Для численного исследования системы (6) приведем ее к безразмерному виду. В качестве характерных параметров задачи выберем момент инерции твердого тела относительно оси x_1 – A_1 , начальную скорость вращения твердого тела $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$. Введем безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и безразмерные величины $\tilde{p} = \frac{p}{\omega_0}$, $\tilde{q} = \frac{q}{\omega_0}$, $\tilde{r} = \frac{r}{\omega_0}$, $\tilde{A}_2 = \frac{A_2}{A_1}$, $\tilde{A}_3 = \frac{A_3}{A_1}$, $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{\omega_0}$, $\tilde{\lambda}_2 = \frac{\lambda_2}{\omega_0}$, $\tilde{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3}{\omega_0}$, $\tilde{G} = \frac{G}{G_0}$.

Введем обозначения для соотношений величин коэффициентов управляющего момента

$$\chi_1 = \frac{b_1}{b_3}, \quad \chi_2 = \frac{b_2}{b_3} \quad (7)$$

и характерное число задачи

$$\sigma_1 = \frac{b_3}{G_0 \omega_0}. \quad (8)$$

В результате получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}}{d\tau} &= -\tilde{r}\tilde{q}(\tilde{A}_3 - \tilde{A}_2) - \chi_1\sigma_1\frac{\tilde{p}}{\tilde{G}} - \tilde{\lambda}_1\tilde{p}, \\ \tilde{A}_2\frac{d\tilde{q}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{r}(1 - \tilde{A}_3) - \chi_2\sigma_1\tilde{A}_2\frac{\tilde{q}}{\tilde{G}} - \tilde{\lambda}_2\tilde{A}_2\tilde{q}, \\ \tilde{A}_3\frac{d\tilde{r}}{d\tau} &= -\tilde{p}\tilde{q}(\tilde{A}_2 - 1) - \sigma_1\tilde{A}_3\frac{\tilde{r}}{\tilde{G}} - \tilde{\lambda}_3\tilde{A}_3\tilde{r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Имеем многопараметрическую систему дифференциальных уравнений, численное исследование которой позволит найти законы изменения кинетического момента \mathbf{G} и кинетической энергии $T = 0.5(A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2)$, построить и проанализировать годограф вектора кинетического момента твердого тела.

В случае $\chi_1 = \chi_2 = 1$ для $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ известны закон изменения модуля вектора кинетического момента и время торможения твердого тела [1]. В этом случае годограф вектора кинетического момента имеет вид, представленный на рис. 1. На рисунке построены два годографа вектора кинетического момента.

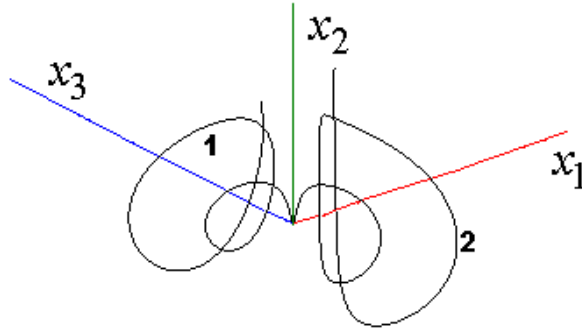


Рис. 1

Кривая 1 построена для твердого тела с геометрией масс $\tilde{A}_2 = 0.8$ и $\tilde{A}_3 = 0.6$. В начальный момент времени проекции вектора угловой скорости на оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$) имеют значения $\tilde{p}_0 = 0.5$, $\tilde{q}_0 = 0.25$ и $\tilde{r}_0 \approx 1.404$. Для характерного числа выбрано значение $\sigma_1 = 0.01$ и коэффициенты сопротивления $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.01$. Кривая 2 получена для твердого тела с геометрией масс $\tilde{A}_2 = 0.85$ и $\tilde{A}_3 = 0.75$. В начальный момент времени проекции вектора угловой скорости на оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$) имеют значения $\tilde{p}_0 = 0.6$, $\tilde{q}_0 = 0.8$ и $\tilde{r}_0 \approx 0.56$. Для характерного числа

выбрано значение $\sigma_1 = 0.005$ и коэффициенты сопротивления $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.001$.

В первом расчетном случае годограф вектора кинетического момента охватывает ось x_3 , а во втором ось x_1 . Поворот вектора происходит около указанных осей на протяжении всего времени торможения. В первом расчетном случае в начальный момент времени выполняется неравенство $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$, а во втором $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$, что и определяет ось годографа вектора кинетического момента.

Из неравенства $\tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$ можно получить соотношение между проекциями угловой скорости на оси x_1 и x_3 .

$$\tilde{p}^2 > \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2. \quad (10)$$

На рис. 2 показаны квадранты неравенства (10). Прямая соответствует равенству

$$\tilde{p}^2 = \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2, \quad (11)$$

квадрант А – годограф вектора кинетического момента охватывающий ось x_1 , квадрант В – ось x_3 . Угол наклона прямой зависит от геометрии масс твердого тела, а следовательно и величина квадрантов зависит от геометрии масс твердого тела. С помощью квадрантов рис. 2 можно показать, как вид годографа вектора кинетического момента зависит от соотношения величин проекций угловых скоростей \tilde{p} и \tilde{r} . На рис. 3 в одном масштабе представлены кривые, образованные точками с координатами $(\tilde{p}^2, \tilde{A}_3 \frac{\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3}{1 - \tilde{A}_2} \tilde{r}^2)$ согласно проведенному численному эксперименту. Кривая 1 рис. 3 соответствует годографу 1 рис. 1, кривая 2 – годографу 2. Из рисунка 3 видно, что на протяжении всего времени торможения твердого тела кривые сохраняют свое расположение в соответствующих квадрантах: кривая 1 находится в квадранте В, что соответствует вращению твердого тела около оси x_3 ; кривая 1 находится в квадранте А, что соответствует вращению твердого тела около оси x_1 .

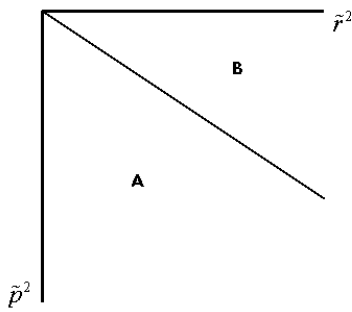


Рис. 2

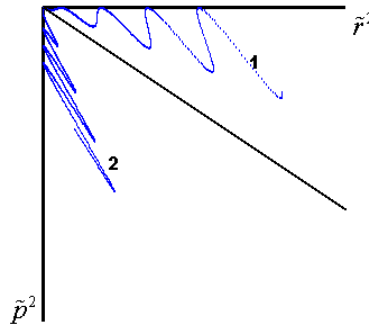


Рис. 3

Исследование движения твердого тела проводится для $\sigma_1 \geq 0.01$, так как для малых σ_1 влияние управляющего момента мало, что упрощает модель исследо-

вания до движения твердого тела в среде с сопротивлением. Такое исследование было проведено в [4].

Проведено численное исследование для различных значений коэффициентов управляющего момента при выполнении неравенства $\chi_1 < \chi_2 < 1$ для твердого тела, кинематические и геометрические характеристики которого в начальный момент времени удовлетворяют неравенству $2\tilde{T}\tilde{A}_2 > \tilde{G}^2 \geq 2\tilde{T}\tilde{A}_3$. Исследование показало, что практически во всех расчетных случаях получен годограф вектора кинетического момента, подобный представленному на рис. 4.

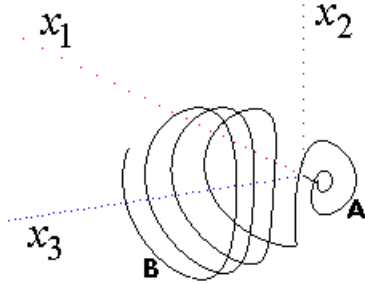


Рис. 4

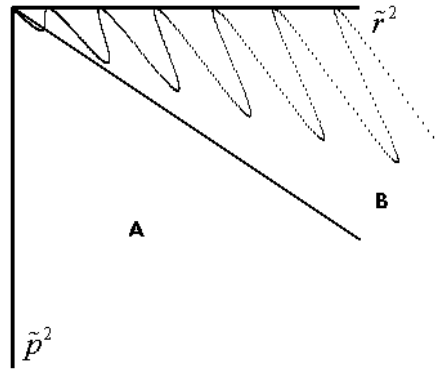


Рис. 5

Кривая соответствует расчетному случаю $\tilde{p}_0 = 0.5$, $\tilde{q}_0 = 0.25$, $\sigma_1 = 0.01$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.001$, $\chi_1 = 0.1$, $\chi_2 = 0.2$ и геометрии масс $\tilde{A}_2 = 0.8$, $\tilde{A}_3 = 0.6$. Изначально кривая годографа охватывает ось наименьшего момента инерции x_3 , затем при убывании модуля вектора кинетического момента наблюдается поворот самого вектора к оси наибольшего момента инерции x_1 , около которой и происходит торможение твердого тела. Рис. 5 иллюстрирует ось годографа вектора кинетического момента при движении твердого тела в процессе торможения.

При увеличении коэффициентов управляющего момента область годографа из квадранта А уменьшается. Установлено, что для коэффициента управляющего момента $\chi_2 \leq 1$ всегда есть значения $\chi_1 < \chi_2$, при которых вектор кинетического момента совершает поворот от оси наименьшего момента инерции x_3 к оси x_1 .

Численное исследование годографа вектора кинетического момента было проведено для твердого тела с коэффициентами управляющего момента вида $\chi_1 > \chi_2 > 1$ при той же геометрии масс, что и в предыдущем расчете. Кривая рис. 6 соответствует расчетному случаю $\tilde{p}_0 = 0.5$, $\tilde{q}_0 = 0.25$, $\sigma_1 = 0.01$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.001$, $\chi_1 = 1.4$, $\chi_2 = 1.2$. Получено, что годограф вектора кинетического момента всегда остается в квадранте В, что представлено на рис. 7.

Проводился численный эксперимент при различных значениях коэффициентов управляющего момента для твердого тела, кинематические и геометрические характеристики которого в начальный момент времени удовлетворяют неравенству $2\tilde{T}\tilde{A}_1 \geq \tilde{G}^2 > 2\tilde{T}\tilde{A}_2$. В этом случае годограф вектора кинетического момента в начальный момент времени охватывает ось наибольшего момента инерции x_1 . Если выполняется неравенство $\chi_1 < \chi_2 < 1$, то годограф вектора всегда остается около оси x_1 , т.е. в квадранте А (подобно кривой 2 рис. 1). В случае неравенства

$\chi_1 > \chi_2 > 1$ для коэффициентов управляющего момента наблюдается поворот от оси x_1 к оси x_3 , т. е. переход от квадранта А к квадранту В.

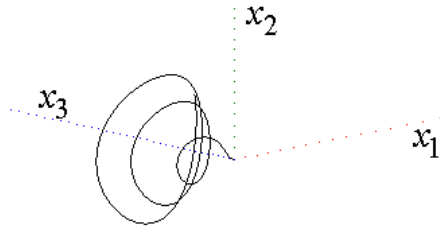


Рис. 6

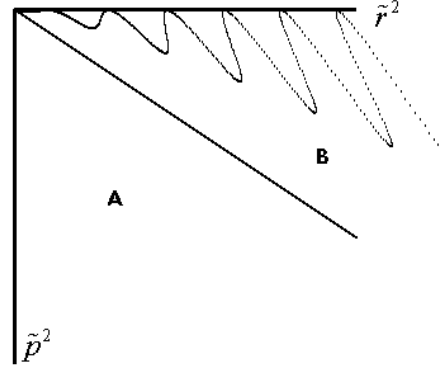


Рис. 7

Проведенное численное исследование позволяет сделать вывод, что в случае малого момента сопротивления среды, при движении твердого тела под действием управляющего момента в задаче оптимального по быстродействию торможения мгновенная ось вращения относительно центра масс стремится занять положение оси с наименьшим управляющим моментом.

При моделировании сопротивления среды с параметрами

$$0.01 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \quad (12)$$

в уравнениях (9) в случае управляющего момента с коэффициентами $\chi_1 < \chi_2 < 1$ характер поведения годографа кинетического момента подобен кривой рис. 4. При этом наблюдается уменьшение времени торможения и более быстрый поворот к оси x_1 . Например, при параметрах рис. 4 для коэффициентов момента сопротивления $\lambda_1 = 0.001$, $\lambda_2 = 0.002$, $\lambda_3 = 0.005$ (среда с малым сопротивлением) уменьшение времени торможения происходит на 4% и времени до поворота оси годографа на 33%.

Проводился численный эксперимент годографа вектора кинетического момента в среде с параметрами

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0.01 \quad (13)$$

при управляющем моменте с неравенством $\chi_1 < \chi_2 < 1$. Было получено, что для любой комбинации параметров χ_1 и χ_2 существует комбинация параметров λ_1 , λ_2 , λ_3 , при которых годограф принимает вид кривой рис.6. Так же исследовались случаи комбинаций параметров $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0.01$, $\chi_1 > \chi_2 > 1$ и $0.01 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, $\chi_1 > \chi_2 > 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Проведенное численное исследование показало, что в среде с сопротивлением, параметры которого удовлетворяют неравенству (12), необходимо проводить оптимальное торможение твердого тела управляющим моментом с коэффициентами $\chi_1 < \chi_2 < 1$. В случае выполнения неравенства (13) — с коэффициентами $\chi_1 > \chi_2 > 1$.

1. **Акуленко Л. Д.** Оптимальное торможение вращений динамически несимметричного тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – №1. – С. 16–21.
2. **Акуленко Л. Д.** Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с подвижной массой в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – №2. – С. 20–26.
3. **Акуленко Л. Д.** Возмущенные и управляемые вращения твердого тела: научное издание [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская, Я. С. Зинкевич. – Одесса: Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, 2013. – 288 с.
4. **Рачинская А. Л.** Вращение твердого тела в среде с сопротивлением [текст] / А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2014. – Т. 19, вип. 3 (23). – С. 84–92.
5. **Акуленко Л. Д.** Квазиоптимальное торможение вращений несимметричного тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – №3. – С. 38–45.
6. **Акуленко Л. Д.** Асимптотические методы оптимального управления [текст] / Л. Д. Акуленко. – М.: Наука, 1987. – 368 с.

Рачинська А. Л., Рачинська Д. О.

ОПТИМАЛЬНЕ ГАЛЬМУВАННЯ ОБЕРТАНЬ НЕСИМЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА В СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Резюме

Досліджено задачу про оптимальне за швидкодією гальмування обертань твердого тіла під дією керуючого моменту з нерівними коефіцієнтами. Крім того, на тверде тіло діє гальмуючий момент сил в'язкого тертя. Вважається, що тіло динамічно несиметрично. Проведено чисельне дослідження годографа вектора кінетичного моменту в тривимірному просторі.

Ключові слова: тверде тіло, керуючий момент, опір, вектор кінетичного моменту, годограф.

Rachinskaya A. L., Rachinskaya D. A.

OPTIMAL BRAKING THE ROTATION OF RIGID BODY IN A RESISTANT MEDIUM

Summary

Researched the problem of the optimal by time braking rotation of a rigid body under the action of a control torque with unequal coefficients. In addition, braking torque of viscous friction forces acts on a rigid body. It is thought that the body is dynamically asymmetrical. Conducted a numerical study of the hodograph of the vector kinetic moment in three dimensions.

Key words: solid, the control moment, resistance, the angular momentum vector, hodograph.

REFERENCES

1. **Akulenko, Zinkevich, Ya. S., L. D. & Leschenko, D. D.** 2011, Optimalnoe tormozhenie vrascheniy dinamicheski nesimmetrichnogo tela v soprotivlyayusheysya srede [Optimal braking rotation dynamically asymmetric body in a resistant medium], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, no. 1, pp. 16–21.
2. **Akulenko, Zinkevich, Ya. S., L. D., Leschenko, D. D. & Rachinskaya, A. L.** 2011, Optimalnoe tormozhenie vrascheniy dinamicheski simmetrichnogo tela s podvizhnoy massoy v soprotivlyayusheysya srede [Optimal braking the rotation of a dynamically symmetric body with a moving mass in a resistant medium], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, no. 2, pp. 20–26.
3. **Akulenko, L. D., Leschenko, D. D., Rachinskaya, A. L. & Zinkevich, Ya. S.** 2013, *Vozmuschennyye i upravlyaemye vrascheniya tverdogo tela: nauchnoe izdanie* [Outraged and controlled rotation of a rigid body], Odessa: Odesskiy natsionalnyy universitet im. I. I. Mechnikova, 288 p.
4. **Rachinskaya A. L.** 2014, Vraschenie tverdogo tela v srede s soprotivleniem [Rotation of a rigid body in a medium with resistance], *Visnyk Odesk. nats. un-tu. Matem. i meh.*, vol. 19, no. 3 (23), pp. 84–92.
5. **Akulenko, L. D., Leschenko, D. D. & Rachinskaya, A. L.** 2014, Kvazioptimalnoe tormozhenie vrascheniy nesimmetrichnogo tela v soprotivlyayusheysya srede [Quasioptimal asymmetrical braking rotation of the body in a resistant medium], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, no. 3, pp. 38–45.
6. **Akulenko L. D.** 1987, *Asimptoticheskie metody optimalnogo upravleniya* [Asymptotic methods of optimal control], M.: Nauka, 368 p.