

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

## Дипломна робота

бакалавра

на тему «Асимптотична поведінка розв'язків диференціальних рівнянь другого  
порядку»

«Asymptotic behavior of solutions of second order differential equations»

Виконав:

студент денної форми навчання  
спеціальності 111 Математика

Ротар Микита Вікторович

Керівник \_\_\_\_\_

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент \_\_\_\_\_

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№\_\_ від \_\_\_\_\_ р.

Захищено на засіданні ЕК №\_\_\_\_\_

протокол №\_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_

(підпис)

(прізвище, ініціали)

Голова ЕК

\_\_\_\_\_

(підпис)

(прізвище, ініціали)

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b>	<b>3</b>
<b>РОЗДІЛ I. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ</b>	<b>5</b>
§ 1. Правильно змінні функції та їх властивості	5
§ 2. Деякі властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку	14
<b>РОЗДІЛ II. УМОВИ ІСНУВАННЯ ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 2-ГО ПОРЯДКУ</b>	<b>18</b>
§ 1. Умови існування правильно змінних розв'язків	18
§ 2. Умови існування швидко змінних розв'язків	26
<b>РОЗДІЛ III. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ</b>	<b>30</b>
§ 1. Основні результати	30
<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>39</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b>	<b>40</b>

## ВСТУП

Вивчення властивостей розв'язків лінійних і деяких нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку належить до числа найбільш актуальних завдань сучасної теорії диференціальних рівнянь і викликано численними додатками на практиці.

Що стосується лінійних рівнянь, то проблеми встановлення асимптотики їх рішень вивчається вже досить довго. Існує велика кількість літератури з цього питання, в тому числі для більш загального випадку лінійних систем. Крім того присутній інтерес у сучасної теоретичної фізики, так як описане лінійне рівняння являє собою одномірне рівняння Шредінгера.

Відомий сербський математик Йован Карамат ввів новий клас функцій однієї змінної, родинних ступеневим по прояву ряду їх властивостей. У 1930 році він дав їм назву правильно змінні функції. Функції класу Карамат називають іноді регулярно змінюються, а також автотодельного функціями.

Правильно змінна функції - це односторонньо локально асимптотична властивість заданої функції, виділення якої продиктоване прагненням логічно і корисно розширити клас функцій з ступеневою асимптотичною поведінкою в околиці деякої точки до класу функцій з асимптотикою типу ступеневої функції, помноженої на коефіцієнт, який змінюється «більш повільно», ніж ступенева функція.

Для лінійного рівняння

$$y'' = f(x)y \tag{0.1}$$

де  $f(x)$  неперервна функція певного знака, представляє інтерес встановлення необхідних і достатніх умов існування розв'язків, що належать до функцій класу Карамата.

Цим питанням присвячена ця робота. Вона складається з трьох розділів. У першому розділі подані основні відомості з теорії правильно змінних функцій і деякі властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. У другому розділі встановлюються умови існування правильно та швидко змінних розв'язків у лінійних диференціальних рівнянь другого порядку. У третьому - отримано асимптотичні зображення для розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

## ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків лінійного диференціального рівняння

$$y'' = f(x)y$$

У другому розділі роботи отримано у випадку, коли  $f(x) < 0$  на проміжку  $[0, +\infty)$ , необхідні і достатні умови існування у цього рівняння правильно та швидко змінних розв'язків, а точніше фундаментальної сім'ї розв'язків.

У третьому розділі роботи для випадку коли  $f(x)$  довільна неперервна функція на проміжку  $[0, +\infty)$ , встановлено асимптотичні зображення для фундаментальної сім'ї розв'язків рівняння (0.1).

Всі одержані в роботі результати суттєво використовували властивості правильно та швидко змінних функцій а також теорему 1.5.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. N.H. Bingham, C.M. Goldie and J. L. Teugels, Regular Variation, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 27, Cambridge Univ. Press, 1987.
2. M. Gregu's, Third Order Linear Differential Equations, D. Reidel, Dordrecht, 1987.
3. P. Hartman, Ordinary Differential Equations, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
4. H. Howard and V. Mari'c, Regularity and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Classe Sci. Mat. Mat., Sci. Math. 114(22)(1997), 85–98.
5. J. Jaro's and T. Kusano, Remarks on the existence of regularly varying solutions for second order linear differential equations, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.) 72(86) (2002), 113–118.
6. J. Jaro's and T. Kusano, Self-adjoint differential equations and generalized Karamata functions, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts, Classe Sci. Math. Nat., Sci. Math. 29 (2004), 25–60.
7. J. Jaro's, T. Kusano and T. Tanigawa, Nonoscillation theory for second order half-linear differential equations in the framework of regular variation, Results Math. 43 (2003), 129–149.
8. T. Kusano and V. Mari'c, Nonoscillatory second order linear and half-linear differential equations having regularly varying solutions, Adv. Math. Sci. Appl. 14 (2004), 351–357.
9. V. Mari'c, Regular Variation and Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics 1726, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2000.

10. G. Sansone, *Equazioni Differenziali nel Campo Reale, Parte Prima*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1956.
11. L. Sirovich, *Techniques of Asymptotic Analysis*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1971.
12. W. F. Trench, Canonical forms and principal systems for general disconjugate equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 189 (1974), 319–327.