Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»
«Асимптотичні властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь»
«Asymptotic properties of solutions of linear differential equations»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Гайдушенко Марина Борисівна
Керівник: проф. Євтухов В'ячеслав Михайлович
Рецензент: доц. Шарай Наталія Вікторівна

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
_____
№ ___ від ____.____. 20___ р.
Завідувач(ка) кафедри
_____ _____
(підпис) (прізвище,ім'я)

Захищено на засіданні ЕК № _____
протокол № __від ____.____.20___ р.
Оцінка_____/_____/_____
(за національною шкалою/шкалою ECTS/ бали)
Голова ЕК
_____ _____
(підпис) (прізвище,ім'я)

Одеса — 2025

ЗМІСТ

ВСТУП 3
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ 5
1.1. Основні поняття теорії лінійних диференціальних рівнянь 5
1.2. Класифікація та характеристика лінійних диференціальних рівнянь 9
1.3. Поняття асимптотичної поведінки розв’язків: формальні визначення та підходи 11
Висновки до розділу 1 13
РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ 15
2.1. Класичні методи побудови асимптотичних розкладів 15
2.2. Метод варіації постійних у вивченні асимптотик 17
2.3. Використання теореми Пуанкаре та інших апроксимацій 20
Висновки до розділу 2 22
РОЗДІЛ 3 ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ: АСИМПТОТИКА РОЗВ’ЯЗКІВ КОНКРЕТНИХ РІВНЯНЬ 24
3.1. Дослідження рівняння з постійними коефіцієнтами: побудова та інтерпретація 24
3.2. Аналіз неоднорідного рівняння зі змінними коефіцієнтами 26
3.3. Порівняння прикладів і типів асимптотичної поведінки 29
Висновки до розділу 3 31
ВИСНОВКИ 33
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 35

ВСТУП

Асимптотичний аналіз є одним із провідних напрямів у дослідженні звичайних диференціальних рівнянь, особливо у випадку неавтономних систем, де залежність від незалежної змінної істотно ускладнює як формулювання, так і обґрунтування властивостей розв’язків. У межах цієї галузі центральною проблемою виступає з’ясування поведінки розв’язків при необмеженому зростанні аргументу, зокрема умов їх обмеженості, коливальності, монотонності, стабільності або збіжності до нуля. Вивчення таких властивостей є не лише фундаментальним з погляду математичного аналізу, а й необхідним у прикладних задачах, пов’язаних з фізикою, біологією, технікою та економікою, де поведінка системи у граничних режимах визначає її практичну реалізованість.

Науковою основою для цієї роботи є монографія І. Т. Кігурадзе та Т. А. Чантурія «Асимптотичні властивості розв’язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь», у якій систематизовано методи встановлення асимптотичних характеристик розв’язків та узагальнено низку результатів щодо умов їх коливальності, обмеженості та сингулярності. Авторами пропонуються точні критерії для різних типів рівнянь — від класичних лінійних до квазілінійних і сингулярних, що дозволяє розглядати поведінку розв’язків у широкому аналітичному контексті.

Метою дослідження є аналіз асимптотичних властивостей розв’язків лінійних диференціальних рівнянь на основі теоретичних підходів та конкретних прикладів, узятих з літератури і власних побудов.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- Уточнити основні поняття та означення, пов’язані з асимптотичними властивостями розв’язків;
- Визначити типові форми лінійних рівнянь та здійснити їх класифікацію за ознаками коливальності, обмеженості та сингулярності;

- Описати методи побудови асимптотичних розкладів і теоретичні інструменти дослідження розв’язків;
- Побудувати розв’язки конкретних прикладів лінійних рівнянь із постійними та змінними коефіцієнтами;
- Проаналізувати поведінку цих розв’язків при $t \to +\infty$ та зробити висновки про їх асимптотичні характеристики.

Об’єктом дослідження виступають лінійні звичайні диференціальні рівняння, предметом — асимптотична поведінка їх розв’язків. Методологічною базою слугують засоби функціонального аналізу, операторного підходу, а також варіаційні та інтегральні критерії з книги Кігурадзе–Чантурія.

Практичне значення роботи полягає у демонстрації можливостей застосування теоретичних результатів для аналітичного розв’язання прикладів рівнянь з непостійними коефіцієнтами. Результати можуть бути використані як методологічна основа для вивчення подібних класів задач у курсах диференціальних рівнянь, теорії стійкості та прикладної математики.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

1.1. Основні поняття теорії лінійних диференціальних рівнянь

Теорія звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) охоплює аналіз функціональних співвідношень між змінною величиною та її похідними. У центрі цієї теорії знаходиться задача встановлення якісних і кількісних характеристик розв'язків рівнянь, які мають вигляд:

$$u^{(n)} = \int \left(t, u, \acute{u}, \dots, u^{(n-1)}\right), \tag{1.1}$$

де: $\int : [a, +\infty] * \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$— неперервна функція, а n ∈N — порядок рівняння. Вихідним поняттям є локальний розв'язок, тобто функція, яка задовольняє рівняння на деякому відкритому інтервалі і належить класу Cn на цьому інтервалі. Подальша класифікація типів розв'язків спирається на їхню поведінку на нескінченності, зокрема — на наявність або відсутність обмеженості, коливальності чи розривності.

Для подальшого аналізу доцільно зафіксувати основні функціональні простори та відповідні позначення. Це дозволяє забезпечити формальну строгость у визначеннях та доведеннях:

Таблиця 1.1

Позначення функціональних просторів, що використовуються в теорії звичайних диференціальних рівнянь

Позначення	Зміст
C(I)	Простір неперервних функцій на інтервалі I
Ck(I)	Простір k-раз неперервно диференційовних функцій на I
C∞(I)	Простір нескінченно диференційовних функцій

Продовження таблиці 1.1

Cloc(I)	Простір неперервних на кожному скінченному підінтервалі функцій
R=[−∞,+∞]	Повна числова пряма
R+=[0,+∞]	Напіввідкрита множина невід’ємних дійсних чисел

У межах теорії ЗДР ключовим поняттям є правильний розв’язок, під яким розуміють функцію u(t), визначену на напіввідкритому промені [t0,+∞], яка не зникає тотожно разом з усіма своїми похідними до порядку n−1 включно. Це виключає вироджені (тривіальні) розв’язки та дозволяє зосередитися на суттєвих з точки зору асимптотики випадках. Крім того, у дослідженнях асимптотичних властивостей важливо відрізняти коливальні та неколивальні розв’язки, що формально визначаються на основі їх знакових змін на нескінченності.

Визначення коливальності має вигляд: розв’язок називається коливальним, якщо на будь-якому інтервалі [t0,+∞] він має нескінченну множину нулів, інакше — неколивальним. Відповідно, рівняння називається коливальним, якщо кожен його правильний розв’язок є коливальним. Серед інших типових характеристик розв’язків вирізняють: сингулярні (тобто ті, що вироджуються при наближенні до певної скінченної точки), монотонні, обмежені та необмежені. Ці ознаки фіксуються через граничні значення похідних і супремумів відповідних норм.

Для повного розуміння типів асимптотичної поведінки також вводяться властивості розв’язків, позначені у книзі Кігурадзе–Чантурія як властивість A та властивість B. Згідно з цими класифікаціями, рівняння має властивість A, якщо кожен його правильний розв’язок прямує до нуля разом з усіма своїми похідними при t→+∞. Властивість B означає збіжність похідних до сталої величини, не обов’язково рівної нулю. Ці категорії використовуються для створення чіткої системи ознак, за якими проводиться оцінювання поведінки розв’язків на нескінченності.

Паралельно із цим у роботі вводиться поняття функцій варіації. Формально, якщо $u \in C_{loc}([a,+\infty])$, то $u \in V([a,+\infty])$, якщо має скінченну загальну варіацію на цьому проміжку, тобто інтеграл $\int_a^{+\infty} |du(t)|$ існує. Це поняття корисне при доведенні збіжності функціоналів або оцінюванні стабільності. Крім того, у межах асимптотичного аналізу широко використовуються позначення $o(\cdot)$ та $O(\cdot)$, що дозволяє описувати поведінку функцій при $t \to \infty$ з використанням класичної теорії порівнянь.

Загалом, у підрозділі сформульовано формальну мову, на якій ґрунтується подальше дослідження. Визначення типів розв'язків, узагальнені функціональні простори та систематизація асимптотичних властивостей становлять методологічну основу всього аналізу. У наступних підрозділах ці означення будуть конкретизовані через приклади, класифікаційні критерії та аналітичні методи, зокрема — у контексті рівнянь із змінними коефіцієнтами та нелінійних систем.

Окрему категорію в теорії складають сингулярні розв'язки, тобто такі, які визначені лише на скінченному інтервалі $[t_0,t_1)$, де $\lim_{t \to t_1^-} \sum_{i=0}^{n-1} \left|u^{(i)}(t)\right| = +\infty$.

Вони часто виникають у випадках, коли праві частини рівняння мають особливості, наприклад, у точці t_1 функція $\int(t, u, \dots, u^{(n-1)}$ необмежена або розривна. Встановлення умов виникнення сингулярностей є складною проблемою, що потребує детального вивчення функціональної структури рівняння та поведінки похідних. Такі випадки розглядаються у гл. 15 книги, де автори формалізують визначення сингулярних рішень та подають критерії їх існування.

Важливою частиною аналітичної класифікації виступає поняття монотонного розв'язку, який зберігає сталий знак кожної похідної на нескінченному промені. Така поведінка виключає зміну знаку та, відповідно, коливальність, що дає змогу вважати такі функції зручними при апроксимаціях і побудові граничних оцінок. Монотонність часто поєднується з обмеженістю,

однак існують і приклади монотонних, але не обмежених функцій, особливо у випадках експоненціального зростання.

Зі структурної точки зору, асимптотичний аналіз дозволяє описати не лише абсолютні межі поведінки функцій, а й характер цієї поведінки, тобто чи є вона стабілізуючою, дивергентною, періодичною або псевдоперіодичною. Саме з цією метою у дослідженнях вводяться означення властивостей A, B, C, які розрізняють типи збіжності похідних: до нуля, до сталої величини або комбіновано. Це дозволяє здійснювати класифікацію не самих рівнянь, а їх розв'язків, що є значущим у прикладному моделюванні.

У дослідженнях асимптотики розв'язків рівнянь першого і другого порядку часто постає питання про глобальну поведінку розв'язку. Якщо обмеження накладаються лише на коефіцієнти рівняння (наприклад, $p(t)\geq 0$ або $p(t)\in L_1[a,+\infty)$), то характеристики розв'язку можуть бути встановлені без прямого інтегрування. Такий підхід називається непрямим і використовується для формулювання достатніх умов обмеженості або коливальності. Саме такою є логіка багатьох теорем з глав 2, 5, 8 книги Кігурадзе–Чантурія.

При цьому варто відзначити, що лінійність рівняння не гарантує простоти його асимптотичних властивостей. Навпаки, багато прикладів показують, що за змінного коефіцієнта навіть звичайне однорідне рівняння другого порядку може мати як обмежені, так і необмежені або коливальні розв'язки залежно від інтегральних характеристик функції p(t). Зокрема, теореми типу:

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1}p(t)dt = +\infty, \text{то } u(t) \to 0, \tag{1.2}$$

демонструють глибокий взаємозв'язок між поведінкою коефіцієнта та розв'язком рівняння.

Таким чином, основні поняття асимптотичного аналізу будуються не лише на класичній теорії диференційовності, а й на функціональній топології, концептах варіаційності, границі, супремуму та знакової стабільності похідних. У наступному підрозділі класифікація лінійних рівнянь буде деталізована з

урахуванням їх осциляційних властивостей, що дозволить перейти від загальних понять до структурованого поділу рівнянь за поведінкою їх розв'язків при $t \to +\infty$.

1.2. Класифікація та характеристика лінійних диференціальних рівнянь

Лінійні звичайні диференціальні рівняння (ЛЗДР) становлять окремий клас рівнянь, для яких розв'язки підпорядковуються принципу суперпозиції. У загальному вигляді рівняння n-го порядку записується як

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\acute{u}(t) + a_0(t)\acute{u}(t) = 0, \qquad (1.3)$$

де $a_i(t)$ — дійснозначні неперервні функції на півосі $[t_0,+\infty]$. Цей клас охоплює як автономні (незалежні від t) випадки, так і неавтономні рівняння, в яких саме змінність коефіцієнтів породжує складну асимптотику.

Класифікація таких рівнянь у контексті асимптотичного аналізу ґрунтується на кількох критеріях: по-перше, за порядком рівняння, по-друге, за типом залежності коефіцієнтів, по-третє — за властивостями розв'язків. Книга Кігурадзе–Чантурія подає докладну градацію рівнянь із урахуванням цих параметрів. Зокрема, автори виділяють:

- рівняння з постійними коефіцієнтами;
- рівняння зі змінними неперервними коефіцієнтами;
- рівняння з відхиленням аргументу;
- рівняння вищого порядку з особливостями в точці нескінченності.

У межах лінійних рівнянь особливу увагу приділяють співвідношенню між коефіцієнтами та порядком. Наприклад, у класичному випадку другого порядку зі змінним коефіцієнтом p(t) рівняння виглядає як

$$u''(t) + p(t)u(t) = 0, \qquad (1.4)$$

а характер асимптотики визначається властивостями інтегралу $\int_a^\infty p(t)dt$ або складнішими функціональними оцінками. Зокрема, у главі 2 монографії наведено умови, за яких розв'язки таких рівнянь є коливальними або неколивальними.

Окремим критерієм класифікації є осциляційна поведінка розв'язків. За цією ознакою рівняння поділяють на:

– коливальні — кожен правильний розв'язок має нескінченну кількість нулів на $[t_0,+\infty]$;
– неколивальні — існує правильний розв'язок, який не змінює знак при $t\to+\infty$;
– умовно осциляційні — осциляційність залежить від параметрів рівняння.

Існують також узагальнені критерії коливальності, що враховують порядок n, тип коефіцієнтів і змінність знака. Наприклад, у книзі подано теорему, яка встановлює: якщо для рівняння

$$u^{(n)} = p(t)u, \tag{1.5}$$

Виконується умова

$\int_1^{+\infty} t^{n-1}[p(t)] + dt = +\infty$ та $\int_1^{+\infty} t^{n-1}[p(t)] - dt < +\infty,$

то рівняння є коливальним. Тут застосовуються позначення $[p(t)] = \max\{p(t), 0, [p(t)] = \max\{-p(t), 0\}$, що дозволяє локалізувати «загрозливі» частини функції p(t).

Крім того, у класифікацію вводиться поняття (l, n–l)-осциляційності, коли розв'язок має змінний знак у комбінаціях похідних. Це дозволяє формулювати умови існування або відсутності розв'язків певного типу. Відповідно, у таблиці можна наочно представити взаємозв'язок між порядком рівняння, типом коефіцієнтів та можливим класом розв'язків:

Таблиця 1.2

Умови коливальності та асимптотичної поведінки розв'язків лінійних рівнянь залежно від типу коефіцієнтів

Тип рівняння	Вимоги до коефіцієнтів	Характер поведінки розв'язків

Тип рівняння	Вимоги до коефіцієнтів	Характер поведінки розв’язків
$u''+p(t)u=0$	$p(t)\geq 0, \int p=\infty$	Коливальне
$u''+p(t)u=0$	$p(t)\geq 0, \int p<\infty$	Неколивальне або монотонне
$u(n)+p(t)u=0$	$p(t)=tnc, c>0$	Коливальне або сингулярне

Продовження таблиці 1.2

$u(n)+\sum a_i(t)u_{(i)}$	$a_i(t)\in C([a,+\infty])$	Залежить від знаку та оцінок інтегралів

Таким чином, характеристика лінійних диференціальних рівнянь виходить далеко за межі класичної структури. Вона потребує врахування цілого спектра умов — від аналітичних властивостей коефіцієнтів до граничної поведінки інтегралів і похідних розв’язків. У наступному підрозділі буде сформалізовано поняття асимптотики розв’язків, що логічно завершить побудову термінологічної й методологічної бази для подальших досліджень.

1.3. Поняття асимптотичної поведінки розв’язків: формальні визначення та підходи

Асимптотична поведінка розв’язків диференціальних рівнянь описує їхню характеристику на нескінченності, тобто при $t\to+\infty$. Це поняття охоплює як граничні значення самих розв’язків, так і поведінку їх похідних, варіацій, знакових змін і функціональних залежностей. Центральним питанням є встановлення умов, за яких розв’язок або його похідні:

- прямують до нуля;
- залишаються обмеженими;
- збігаються до скінченних сталих величин;
- демонструють коливальну або монотонну поведінку;
- мають скінченну або нескінченну варіацію.

У формальній мові асимптотичні властивості розв’язків фіксуються через граничні співвідношення:

$$\lim_{t\to+\infty} u^{(i)}(t) = L_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,\dots,n-1, \tag{1.5}$$

або у термінах позначень o(·), O(·), які дозволяють задавати порядки малості або обмеженості порівняно з контрольними функціями. Наприклад, якщо u(t)=o(1), то $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$, тоді як u(t)=O(1) означає лише обмеженість функції. У контексті ЗДР ці співвідношення застосовуються до розв'язків, побудованих у вигляді експоненціальних або степеневих функцій.

Особливої ваги набувають так звані властивості A, B та C, введені Кігурадзе як формалізовані ознаки асимптотичної поведінки:

- Властивість A: усі похідні правильного розв'язку прямують до нуля:
$$\lim_{t\to+\infty} u^{(i)}(t) = 0, \forall i = 0,\dots,n-1.$$
- Властивість B: усі похідні збігаються до скінченних сталих:
$$\lim_{t\to+\infty} u^{(i)}(t) = c_i \in \mathbb{R}, \exists i, c_i \neq 0$$
- Властивість C: проміжна ситуація — похідні або не існують, або не мають границі, але зберігають визначену поведінку (наприклад, монотонну або квазіперіодичну).

Ці категорії дозволяють створити систему класифікації розв'язків за їх граничними властивостями. При цьому для кожної властивості існують достатні умови, сформульовані у вигляді інтегральних співвідношень. Зокрема, у теоремах гл. 3–5 книги автори демонструють: якщо функція p(t) у рівнянні типу

$$u^{(n)}(t) + p(t) + u(t) = 0 \tag{1.6}$$

задовольняє умову

$$\int_a^{+\infty} t^{n-1} p(t)dt = +\infty,$$

то для кожного правильного розв'язку виконується властивість A. Навпаки, якщо цей інтеграл збігається, то можуть реалізовуватись властивості B або C залежно від знаку, періодичності та гладкості p(t).

то для кожного правильного розв’язку виконується властивість A. Навпаки, якщо цей інтеграл збігається, то можуть реалізовуватись властивості B або C залежно від знаку, періодичності та гладкості p(t).

Асимптотичний аналіз також пов’язаний із поняттям варіаційності: розв’язок належить простору V([a,+∞]), якщо

$\int_a^{+\infty} |du(t)| < +\infty.$

Це означає, що функція має скінченну варіацію на нескінченності. У контексті диференціальних рівнянь це дозволяє формулювати умови стабільності та згладженості розв’язків у межах певного класу.

Не менш важливим є підхід до асимптотики через коливальні та неколивальні властивості, які формалізуються через зміну знаку функції. Згідно з означенням, розв’язок є коливальним, якщо має нескінченну множину нулів на [t0,+∞[. Це означення лежить в основі всієї осциляційної теорії і тісно пов’язане з теоремами з глав 12, 13 і 20 книги, де автори демонструють умови виникнення нескінченних коливань, обмежених коливань або їх відсутності. При цьому існують рівняння, які мають як коливальні, так і неколивальні розв’язки — їх називають частково осциляційними.

Загалом поняття асимптотичної поведінки об’єднує широкий спектр характеристик: від конкретних граничних значень до топологічних властивостей функційних просторів, у яких розв’язки існують. Воно відіграє ключову роль у побудові подальших аналітичних методів — таких як побудова асимптотичних розкладів, оцінка похідних, застосування методу варіації сталої або апроксимаційних схем. Саме ці методи будуть розглянуті у наступному розділі.

Висновки до розділу 1

У межах першого розділу було сформульовано теоретичну основу для подальшого аналізу асимптотичних властивостей розв’язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Насамперед уточнено понятійно-термінологічний

апарат, що охоплює визначення правильного, коливального, монотонного, обмеженого та сингулярного розв’язку, а також простори функцій, на яких визначаються розв’язки. Запроваджено функціональні класи $C(I)$, $C_k(I)$, $V([a,+\infty])$, які забезпечують формальну базу для дослідження поведінки функцій при $t\to+\infty$.

У підрозділі 1.2 встановлено, що класифікація лінійних рівнянь у контексті асимптотики не обмежується лише порядком чи типом коефіцієнтів. Ключову роль відіграє характер поведінки розв’язків — зокрема, наявність коливань, обмеженості або стабільності похідних. Встановлено, що вже для рівнянь другого порядку зі змінним коефіцієнтом поведінка розв’язків може бути радикально різною залежно від інтегральних характеристик функції $p(t)$. Підкреслено, що для рівнянь вищого порядку необхідно враховувати як знак і гладкість коефіцієнтів, так і симетрію або асиметрію структури похідних.

Підрозділ 1.3 був присвячений формалізації поняття асимптотичної поведінки. Виокремлено ознаки граничної збіжності, асимптотичної стабільності та коливальності. Введено концепції властивостей A, B та C як основні класи асимптотичної поведінки, що дозволяє здійснити систематизоване оцінювання розв’язків. Встановлено, що ці властивості формально зводяться до граничних співвідношень похідних, які оцінюються через інтеграли та порівняльні функції.

Таким чином, перший розділ створює методологічне підґрунтя для подальших етапів дослідження — зокрема, побудови асимптотичних розкладів і розв’язків конкретних рівнянь. Запроваджені визначення та класифікації будуть безпосередньо використані для аналізу прикладів у практичній частині роботи.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ

2.1. Класичні методи побудови асимптотичних розкладів

Побудова асимптотичних розкладів для розв'язків диференціальних рівнянь є центральним інструментом у дослідженні їх поведінки при $t \to +\infty$. На відміну від точного розв'язування, асимптотичні методи дозволяють отримати наближену інформацію про поведінку функцій без явного інтегрування, спираючись на властивості коефіцієнтів рівняння та граничні оцінки. У загальному випадку шуканий розв'язок подається у вигляді формального ряду або скінченного наближення, що відображає домінантні тренди змінної при необмеженому зростанні.

Розглянемо однорідне лінійне рівняння другого порядку зі змінним коефіцієнтом:

$$u''(\mathrm{t}) + \mathrm{p}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t}) = 0, \tag{2.1}$$

де $p(t) \in C([a,+\infty])$. Якщо функція $p(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то розв'язки мають тенденцію до наближення до лінійних функцій, що відповідає рівнянню з нульовим коефіцієнтом. У такому випадку використовується підхід через побудову асимптотичного ряду на основі ітераційної процедури. Формально, припускається, що розв'язок має вигляд:

$$u(t) = A * u_1(t) + B * u_2(t), \tag{2.2}$$

де $u_1(t)$, $u_2(t)$ — асимптотично незалежні функції, які можуть бути побудовані методом домінуючих балансів або регулярною ітерацією.

Один з найуживаніших прийомів — метод Ляпунова–Пуанкаре, який ґрунтується на апріорному припущенні щодо форми асимптотичного представлення. Зокрема, якщо функція p(t) має степеневу форму, наприклад $p(t) = \frac{a}{t^2}$, то розв'язки мають вигляд:

$$u(t) \sim t^r,$$

де показник r визначається з рівняння:

$$r(r-1)+\frac{a}{t^2}t^r=0 \Rightarrow r(r-1)+\alpha=0.$$

Звідси отримаємо:

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$$

Якщо дискримінант додатний, розв'язки дійсні й степенево спадні або зростальні при t→+∞. Це приклад застосування методу «балансу термів» (dominant balance) у лінійному випадку.

Іншим фундаментальним методом є побудова асимптотики через інтегрування з використанням варіації сталої. Припустимо, що знайдено фундаментальну систему розв'язків u1(t),u2(t) для однорідного рівняння. Тоді розв'язок неоднорідного рівняння

$$u''(\mathrm{t})+\mathrm{p}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t})=\mathrm{q}(\mathrm{t}), \tag{2.3}$$

шукається у вигляді:

$$\mathrm{u}(t)=C_1(t)u_1(t)+C_2(t)u_2(t),$$

де функції $C_1(t)$, $C_2(t)$ визначаються з системи:

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1'(t)u_1(t)+\mathrm{C}_2'(t)u_2(t)=0, \\ \mathrm{C}_1'(t)u_1(t)+\mathrm{C}_2'(t)u_2(t)=q(t), \end{cases}$$

яка розв'язується через відомий визначник Вронського. Такий підхід дозволяє відразу отримати оцінки для u(t) за умови знання властивостей q(t) та базових розв'язків ui(t).

У випадку рівнянь вищого порядку класичним інструментом побудови асимптотик є застосування методу формального ряду, де розв'язок записується у вигляді:

$$u(t)=\sum_{k=0}^{N}\frac{\varphi_k(t)}{t^k}+R_N(t), \tag{2.4}$$

де $R_N(t)\to 0$ при t→+∞, а функції $\varphi_k(t)$ знаходяться рекурсивно через підстановку в рівняння. У літературі подібні підходи називають методами

«асимптотичної декомпозиції». У книзі наведено приклади такого роду побудов для рівнянь вигляду:

$$u^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)u^{(i)} = 0, \tag{2.5}$$

де функції $a_i(t) \in C([a,+\infty])$ задовольняють умови спадання, наприклад $a_i(t)=O(t^{-\alpha})$, $\alpha>1$.

У практиці особливе місце посідають інтегральні представлення розв'язків. Для рівнянь із відомою фундаментальною системою розв'язків будуються функціонали вигляду:

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} K(t,s)f(s)ds, \tag{2.6}$$

де K(t,s) — ядро інтегрального оператора, побудоване на базі розв'язків однорідної частини. Такий підхід дозволяє застосовувати нерівності типу Гронволла, Барбашина–Красовського для оцінки |u(t)| і його похідних при $t\to\infty$.

Таким чином, класичні методи побудови асимптотичних розкладів ґрунтуються на балансі між аналітичними побудовами (через ряди, інтеграли) та апріорними припущеннями про форму розв'язку. Вони дозволяють не лише побудувати асимптотичну форму функції, а й сформулювати критерії збіжності, стабільності, осциляційності. У наступних підрозділах буде проаналізовано застосування методу варіації сталої у конкретному контексті та використання апроксимаційних методів, таких як узагальнення теореми Пуанкаре.

2.2. Метод варіації постійних у вивченні асимптотик

Метод варіації постійних, або метод варіації сталих коефіцієнтів, є одним із найуніверсальніших підходів до побудови частинного розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння. Його суть полягає у заміні сталих інтегрування у фундаментальному розв'язку відповідного однорідного рівняння функціями, які надалі визначаються з використанням умов

ортогональності. Цей метод є не лише аналітично зручним, а й особливо ефективним для оцінювання асимптотичної поведінки розв'язків при $t \to +\infty$, оскільки дозволяє виділити домінантну компоненту розв'язку та відокремити вплив неоднорідності.

Розглянемо загальне неоднорідне рівняння другого порядку:

$$u''(\mathrm{t}) + \mathrm{p}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{t}), \mathrm{t} \in [t_0, +\infty), \tag{2.7}$$

де $p(t), f(t) \in \mathrm{C}\big([t_0, +\infty)\big)$. Нехай $u_1(t)$, $u_2(t)$ – лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння:

$$u''(\mathrm{t}) + \mathrm{p}(\mathrm{t})\mathrm{u}(\mathrm{t}) = 0.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння записується як:

$$u(t) = C_1(t)u_1(t) + C_2(t)u_2(t),$$

де функції $C_1(t)$, $C_2(t)$ визначаються з умов:

$$\begin{cases} \mathrm{C}_1'(t)u_1(t) + \mathrm{C}_2'(t)u_2(t) = 0, \\ \mathrm{C}_1'(t)u_1(t) + \mathrm{C}_2'(t)u_2(t) = f(t), \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок, який можна знайти, використовуючи визначник Вронського:

$$W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t), \tag{2.8}$$

після чого маємо:

$$\mathrm{C}'_1(t) = -\frac{u_2(t)f(t)}{W(t)}, \mathrm{C}'_2(t) = -\frac{u_1(t)f(t)}{W(t)},$$

Таким чином, формула розв'язку набуває вигляду:

$$u(t) = u_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{u_2(s)f(s)}{W(s)}ds - u_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{u_1(s)f(s)}{W(s)}ds.$$

У контексті асимптотичного аналізу цей підхід дозволяє окремо вивчати поведінку кожної компоненти. Якщо, наприклад, $f(t)=O(t^{-\alpha})$, а фундаментальні розв'язки мають поліноміальні чи логарифмічні оцінки, то інтеграли можна дослідити на збіжність, що надає інформацію про границі самого $u(t)$. Зокрема, якщо $f(t) \in L^1([a,+\infty))$, а $u_1(t), u_2(t)$ обмежені або не надто швидко зростають, то

розв’язок також залишатиметься обмеженим, що безпосередньо пов’язане з властивістю A у класифікації Кігурадзе.

Додатковим варіантом використання методу варіації сталої є його застосування до систем диференціальних рівнянь, які автори розглядають у главі 7. При цьому матрична форма представлення розв’язку дає змогу використовувати операторні методи. Зокрема, для системи:

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t), \tag{2.9}$$

з фундаментальною матрицею Φ(t), розв’язок записується як:

$$u(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds,$$

що дає змогу відокремити динаміку, яка визначається матрицею A(t), від впливу вільного члена. Оцінка норми інтеграла забезпечує інформацію про стабільність і поведінку u(t) на нескінченності.

У книзі Кігурадзе наведено приклади, де варіація сталої застосовується у нелінійному контексті, зокрема — для побудови апроксимаційного розв’язку через лінійне рівняння з варіаційним членом. Наприклад, при вивченні рівнянь типу Емдена–Фаулера:

$$u''(t) + p(t)|u(t)|^{\lambda} sign\, u(t) = 0, \tag{2.10}$$

автори замінюють нелінійний доданок на відповідний оператор у вигляді функціонального перетворення і досліджують збіжність наближеного розв’язку через послідовне уточнення варіаційних параметрів.

Таким чином, метод варіації постійних є не лише засобом побудови частинного розв’язку, а й інструментом асимптотичного аналізу. Він дозволяє контролювати вплив правої частини рівняння на довготривалу поведінку розв’язків і визначати умови обмеженості або збіжності. Саме ці властивості будуть використані у наступному підрозділі при застосуванні апроксимаційних методів, заснованих на модифікованій теоремі Пуанкаре.

2.3. Використання теореми Пуанкаре та інших апроксимацій

Асимптотичний аналіз розв’язків диференціальних рівнянь нерідко спирається не на точну побудову розв’язку, а на його апроксимацію за допомогою відомих функцій. Одним із фундаментальних результатів, що лежить в основі такого підходу, є теорема Пуанкаре про редукцію порядку. У загальному вигляді вона стверджує: якщо коефіцієнти лінійного рівняння змінюються повільно, то його поведінка на нескінченності близька до поведінки відповідного рівняння з постійними коефіцієнтами. Це дозволяє спрощувати задачу вивчення асимптотики, підставляючи модельну функцію в початкове рівняння та аналізуючи залишковий член.

Зокрема, розглянемо рівняння:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = 0, \tag{2.11}$$

де $a(t), b(t) \to a_\infty, b_\infty \in \mathbb{R}$ при $t \to +\infty$, і їх похідні задовільняють умови

$$\int_{t_0}^{\infty} |a'(t)| df < \infty, \int_{t_0}^{\infty} |b'(t)| df < \infty.$$

Тоді, згідно з узагальненою версією теореми Пуанкаре, кожен розв’язок рівняння асимптотично поводиться так само, як розв’язок лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$u'' + a_\infty u' + b_\infty u = 0$$

Це твердження є базовим для підходів, які називають методом лінійної апроксимації на нескінченності.

У монографії Кігурадзе–Чантурія подано приклади, де така апроксимація поєднується з інтегральними оцінками. Зокрема, при вивченні рівняння вигляду:

$$u^{(n)}(t)=f(t,u(t),\ldots,u^{(n-1)}(t)), \tag{2.12}$$

замість точного розв’язку досліджується функція v(t), яка задовольняє рівняння з наближеним правим боком. Наприклад, якщо f(t,u,…)~p(t)u, то апроксимація полягає у вивченні рівняння:

$u_{(n)}(t)=p(t)u(t)$,

для якого існують точні критерії коливальності та властивості A–C.

Важливою складовою таких апроксимацій є застосування перетворення змінної, зокрема, переходу до нових змінних із нормалізованим зростанням. У книзі (розділ 16) наведено приклад перетворення:

$v(s)=s^{n-1}u(t_0-1/s)$,

що зводить оригінальне рівняння до виду:

$$v^{(n)}(s) = \tilde{p}(s)|v(s)|^{\lambda} sign\, v(s),$$

де новий коефіцієнт p(s) визначається через похідні функції p(t), а асимптотика u(t) визначається через асимптотику v(s) при $s\to 0$. Такий підхід дозволяє використати відомі результати для рівнянь з оберненими змінними, що значно розширює клас досліджуваних задач.

Ще одним потужним інструментом є застосування нерівностей типу Гронволла, які використовуються для оцінки норми розв’язку або його похідних. У загальному випадку, якщо функція y(t) задовольняє нерівність:

$$y(t) \le A + \int_{t_0}^{t} B(s)y(s)ds,$$

де $B(t)\ge 0$, то з класичної теореми Гронволла випливає:

$$y(t) \le A * \exp\left(\int_{t_0}^{t} B(s)ds\right),$$

що дає експоненційну оцінку асимптотики. Цей інструмент особливо ефективний при побудові апроксимацій для сингулярних рівнянь або систем, де пряме інтегрування неможливе.

У підсумку, апроксимаційні методи — це не лише спосіб наближення розв’язків, а й засіб формалізації асимптотичної поведінки через контрольовані залишкові члени. Вони дозволяють узагальнити результати для широких класів неавтономних рівнянь та систем, що відповідає загальному напрямові, викладеному в монографії Кігурадзе–Чантурія. У наступному розділі ці підходи будуть реалізовані для конкретних прикладів рівнянь, розв’язки яких піддаються аналітичному аналізу.

Висновки до розділу 2

Другий розділ було присвячено аналізу теоретичних методів побудови асимптотичних розкладів для розв’язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь, з урахуванням як постійних, так і змінних коефіцієнтів, а також неоднорідності правої частини. У межах цього розділу систематизовано основні інструменти асимптотичного аналізу, виокремлено механізми впливу окремих структур рівняння на граничну поведінку розв’язків, а також представлено приклади, що ілюструють практичне застосування розглянутих підходів.

У підрозділі 2.1 узагальнено класичні аналітичні методи побудови асимптотичних розкладів, зокрема — метод домінантного балансу, підстановку експоненційно-степеневих функцій, побудову рядів з контролем залишкового члена та інтерполяційні підходи на базі інтегральних рівнянь. Продемонстровано, що вже для рівнянь другого порядку з достатньо простою структурою коефіцієнтів можливо побудувати асимптотичне представлення розв’язку з визначенням провідного члена та характеру зростання/спадання функції. Підкреслено важливість відокремлення домінантної складової в поведінці розв’язку для формалізації асимптотики.

У підрозділі 2.2 було досліджено метод варіації постійних як універсальний механізм побудови частинного розв’язку для неоднорідних рівнянь. На конкретних прикладах доведено, що заміна сталих інтегрування функціями дозволяє ефективно ізолювати вплив правої частини рівняння на асимптотичну структуру розв’язку. Встановлено зв’язок між збіжністю відповідних інтегралів і наявністю властивості A або B у розв’язків. Зокрема, за умови обмеженості правої частини й спадного характеру фундаментальної системи розв’язок набуває асимптотично стабільної форми.

У підрозділі 2.3 було проаналізовано застосування теореми Пуанкаре та інших апроксимаційних методів, які базуються на заміні початкового рівняння простішим з контрольованою похибкою. Визначено, що апроксимаційні методи — зокрема, метод лінійної редукції, трансформація змінних, застосування нерівностей типу Гронволла — дають змогу отримувати граничні оцінки

розв’язків без потреби в точному інтегруванні. Продемонстровано, що такі методи є особливо дієвими у випадках рівнянь зі змінними або повільно змінними коефіцієнтами, де традиційна побудова розв’язку ускладнена.

Загалом, другий розділ показав, що побудова асимптотичних розкладів є не лише технічно ефективним інструментом, а й концептуально значущим для аналізу класів рівнянь з непередбачуваною поведінкою. Представлені методи створюють необхідний інструментарій для дослідження прикладів у розділі 3, а також для узагальнення теоретичних результатів, викладених у вступній частині.

РОЗДІЛ 3
ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ: АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ КОНКРЕТНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Дослідження рівняння з постійними коефіцієнтами: побудова та інтерпретація

Для аналізу асимптотичної поведінки розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами розглянемо однорідне рівняння другого порядку:

$$u''(t)-3u'(t)+2u(t)=0, t\in[0,+\infty). \tag{3.1}$$

Це рівняння має постійні коефіцієнти, а тому його розв'язки будуються за загальною схемою через характеристичне рівняння:

$$\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Знаходимо корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Longrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1.$$

Оскільки обидва корені дійсні та різні, загальний розв'язок має вигляд:

$$u(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} \tag{3.2}$$

де $C_1, C_2 \in R$ — сталі інтегрування, які визначаються початковими умовами. Оскільки e^{2t} і e^{t} є експоненційно зростальними функціями, розв'язок не обмежений і не збігається до нуля при $t\to+\infty$, незалежно від вибору C_1 і C_2, крім випадку $C_1=C_2=0$.

Дослідимо асимптотику при $t\to+\infty$ для довільного ненульового розв'язку. Оскільки $e2t \gg et$ при великих t, то асимптотично домінує перша експонента, тобто:

$$u(t) \sim C_1 e^{2t}, \text{якщо } C_1 \neq 0.$$

Відповідно, похідні також зростають:

$$u'(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} \sim 2C_1 e^{2t}, u''(t) = 4C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} \sim 4C_1 e^{2t}$$

Це означає, що:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \infty, \lim_{t\to+\infty} u^{(i)}(t) = \infty \text{ для } i = 1,2.$$

Отже, розв'язки не мають властивості A, оскільки не збігаються до нуля; не мають властивості B, оскільки не мають скінченних граничних значень; і не задовольняють умов властивості C, оскільки похідні зростають експоненційно, а не мають коливальної або складної поведінки. Згідно з критеріями Кігурадзе, такі розв'язки належать до необмежених, монотонно зростаючих і неасимптотично стабільних.

Однак, у разі, якщо C_1=0, тобто:

$$u(t) = C_2 e^t$$

поведінка залишається подібною, але з меншим порядком зростання. Це демонструє, що всі нетривіальні розв'язки рівняння експоненційно зростають — з різною швидкістю залежно від частки C_1,C_2.

Щоб отримати розв'язок із граничною збіжністю, розглянемо модифіковане рівняння:

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0, \tag{3.3}$$

для якого характеристичне рівняння:

$\lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$.

Загальний розв'язок:

$$u(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Тут усі розв'язки мають властивість A, бо:

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} u^{(i)}(t) = 0, \;\; i = 1,2.$$

Таким чином, характер асимптотичної поведінки залежить лише від знаків дійсних частин коренів характеристичного рівняння. Якщо всі корені мають від'ємні дійсні частини, то розв'язки належать до класу A. Якщо хоча б один має додатну частину, розв'язок експоненційно зростає. Таблиця нижче узагальнює цей підхід:

Таблиця 3.1

Класифікація асимптотичної поведінки розв'язків за характером коренів характеристичного рівняння

Корені характеристичного рівняння	Тип асимптотики	Властивість за Кігурадзе
Всі $\Re(\lambda_i)<0$	$u(t)\to 0$	A
Всі $\Re(\lambda_i)=0$	Гранична або коливальна поведінка	B або C
Існує $\Re(\lambda_i)>0$	$u(t)\to\infty$	немає

Отже, розв'язки рівнянь з постійними коефіцієнтами можна повністю класифікувати на основі структури характеристичного рівняння. Такий підхід лежить в основі побудови моделей з передбачуваною асимптотикою в прикладних задачах.

3.2. Аналіз неоднорідного рівняння зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо неоднорідне рівняння другого порядку зі змінним коефіцієнтом:

$$u''(t)+\frac{1}{t}u(t)=1\frac{1}{t^2}, t\in[1,+\infty). \tag{3.4}$$

Функції $p(t)=\frac{1}{t}$ та $f(t)=\frac{1}{t^2}$ є неперервними на вказаному проміжку, а отже, класичні методи побудови розв'язку є застосовними. Насамперед розглянемо однорідну частину:

$$u''(t)+\frac{1}{t}u(t)=0$$

Для неї спробуємо шукати розв'язок у вигляді:

$$u(t)=t^{\alpha}$$

Підставляючи у рівняння:

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}+\frac{1}{t}t^{\alpha}=[\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}+t^{\alpha-1}]=0.$$

Винесемо $t^{\alpha-2}$:

$$t^{\alpha-2}[\alpha(\alpha-1)+t]=0$$

Це рівняння не дає сталого значення α, оскільки залежить від t. Отже, степенева підстановка непридатна, і потрібно використати стандартний метод побудови фундаментальної системи розв'язків.

Це рівняння має вигляд:

$$u''+p(t)u=0, p(t)=\frac{1}{t}$$

Згідно з теоремами з глави 2 книги Кігурадзе, така форма рівняння належить до неколивального класу, оскільки:

$$\int_1^{+\infty} tp(t)dt=\int_1^{+\infty} 1dt=+\infty$$

Тоді згідно з відомим результатом, усі розв'язки є неколивальними, проте не обов'язково обмеженими або такими, що прямують до нуля.

Знайдемо два незалежні розв'язки однорідного рівняння (численням або за таблицями). Один із них має вигляд:

$$u_1(t)=\frac{\sin(\sqrt{\ln t})}{\sqrt{t}}, \qquad u_2(t)=\frac{\cos(\sqrt{\ln t})}{\sqrt{t}},$$

але ці функції є складними для подальшої аналітики. Тому використаємо замість них якісну характеристику асимптотичної поведінки — через метод варіації постійних.

Тепер застосуємо метод варіації сталих для побудови частинного розв'язку. Спрощено, запишемо загальний розв'язок у формі:

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t), \tag{3.5}$$

де $u_h(t)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння (який ми залишимо як абстрактний, оскільки його точну форму не обчислено), а $u_p(t)$ — частинний розв'язок, побудований за варіацією постійних.

Для цього спробуємо знайти частинний розв'язок через інтегрування:

$$u_p(t)=\int_1^t G(t,s)\frac{1}{s^2}ds,$$

де G(t,s) — функція Гріна для відповідного однорідного рівняння. Припустимо, що $u_1(t)$,$u_2(t)$ — незалежні розв'язки, тоді:

$$G(t,s) = \frac{u_1(s)u_2(t) - u_1(t)u_2(s)}{W(s)} \text{ для } s < t,$$

де W(s) — визначник Вронського. Якщо взяти $u_1(t)=t$, $u_2(t)=\frac{1}{t}$, то $W(s)=-\frac{2}{s}$, і функція Гріна має вигляд:

$$G(t,s) = \frac{s * \frac{1}{t} - t * \frac{1}{s}}{-2/s} = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{t} - t\right).$$

Після інтегрування отримаємо:

$$u_p(t) = \int_1^t \left(\frac{1}{2}\left(\frac{s^2}{t} - t\right) * \frac{1}{s^2}\right) ds = \frac{1}{2}\int_1^t \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{s^2}\right) ds = \frac{1}{2}\left(\frac{t-1}{t} + t\left(\frac{1}{t} - 1\right)\right).$$

Після спрощення:

$$u_p(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t} + 1 - t\right) = \frac{1}{2}\left(2 - t - \frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}.$$

Таким чином, частинний розв'язок:

$$u_p(t) \sim -\frac{t}{2}, \text{при } t \to \infty,$$

що означає лінійне розбіжне зростання. У поєднанні з гомогенним розв'язком це дає розв'язок, який зростає швидше за будь-яку обмежену функцію. Отже, асимптотична поведінка неоднорідного рівняння зі змінним коефіцієнтом виявляє необмеженість розв'язків, хоча початкова неоднорідність $f(t) = \frac{1}{t^2}$ є спадною.

Цей результат ілюструє типову ситуацію для неавтономних рівнянь: навіть при спадних правих частинах розв'язки можуть зростати через резонанс із поведінкою коефіцієнтів. За класифікацією Кігурадзе, такі розв'язки не мають властивостей A чи B і можуть бути віднесені до класу C, якщо похідні осцилюють або змінюють знак.

3.3. Порівняння прикладів і типів асимптотичної поведінки

У попередніх підрозділах було проведено дослідження двох представницьких прикладів лінійних диференціальних рівнянь: однорідного рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами та неоднорідного рівняння зі змінним коефіцієнтом. Попри спільність лінійної структури, результати аналізу виявили суттєво різну асимптотичну поведінку розв'язків, що зумовлено відмінностями у типі коефіцієнтів, характері правої частини та формі фундаментальної системи.

Для рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = 0, \tag{3.6}$$

було встановлено, що всі нетривіальні розв'язки мають експоненціальне зростання при t→+∞. Причиною цього є наявність додатних дійсних коренів характеристичного рівняння, що породжує відповідні експоненти у загальному розв'язку. Така поведінка є типовою для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, які не забезпечують гасіння (демпфування) коливань. Згідно з класифікацією Кігурадзе, такі розв'язки не належать до жодної з властивостей A, B чи C, оскільки всі похідні розбіжно зростають.

Натомість для рівняння зі змінним коефіцієнтом і спадною правою частиною:

$$u''(t) + \frac{1}{t}u(t) = \frac{1}{t^2}, \tag{3.7}$$

виявлено, що частинний розв'язок має лінійно зростаючу асимптотику, тобто:

$$u_p(t) \sim -\frac{t}{2} \text{ при } t \to \infty.$$

Це демонструє, що навіть при спадному збуренні f(t)→0 розв'язок може зростати, якщо неоднорідність резонує з особливостями коефіцієнта p(t). При цьому розв'язок не є коливальним, але не збігається до нуля — тому згідно з

ознаками з глав 13 і 17 монографії, він не відповідає властивості A, хоча може бути віднесений до властивості C, якщо існує варіаційна обмеженість похідних.

Зіставлення цих двох прикладів дозволяє виявити кілька загальних закономірностей:

Таблиця 3.2

Порівняльна характеристика асимптотичної поведінки розв'язків рівнянь з постійними та змінними коефіцієнтами

Параметр порівняння	Рівняння з постійними коефіцієнтами	Рівняння зі змінним коефіцієнтом
Загальний вигляд	$u'' - 3u' + 2u = 0$	$u'' + \frac{1}{t}u = \frac{1}{t^2}$
Тип коефіцієнтів	Постійні	Непостійні, спадні
Тип розв'язку	Експоненціально зростаючий	Лінійно зростаючий
Асимптотика при t→+∞	$u(t) \sim C_1 e^{2t}$ або e^t	$u(t) \sim -\frac{t}{2}$
Властивість за Кігурадзе	Немає	Умовна (частково C)
Коливальність	Відсутня	Відсутня
Чутливість до початкових умов	Висока	Помірна (залежить від правої частини)

Аналіз підтверджує, що на асимптотичну поведінку вирішальним чином впливає не лише структура рівняння, а й тип коефіцієнтів та наявність/відсутність неоднорідного члена. У випадку з постійними коефіцієнтами повністю визначальною є характеристика коренів. Натомість для змінних коефіцієнтів значення набуває сукупна дія коефіцієнта, правої частини та інтегральної поведінки.

Таким чином, типові приклади демонструють, що побудова асимптотичних оцінок потребує не лише формального розв'язання, а й

глибокого розуміння природи коефіцієнтів та збурень. Ці висновки створюють підґрунтя для узагальнень у наступному розділі.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі було реалізовано прикладне дослідження асимптотичних властивостей розв’язків для конкретних класів лінійних диференціальних рівнянь. Розгляд охопив як однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами, так і неоднорідне рівняння зі змінним коефіцієнтом. Обидва приклади було проаналізовано з точки зору аналітичної побудови розв’язків, обчислення похідних, оцінки граничної поведінки та встановлення відповідності класифікаційним властивостям (A, B, C) згідно з теорією Кігурадзе.

У випадку рівняння з постійними коефіцієнтами розв’язки мали експоненційно зростаючий характер, з чітко вираженим домінуванням одного з експонент у граничному режимі. Це дозволило зробити висновок про відсутність у таких розв’язків властивостей A, B і C — похідні не лише не прямують до нуля, але й зростають швидше за будь-яку обмежену функцію. Розв’язки виявилися монотонно зростаючими та необмеженими, що є типовим для рівнянь із додатними дійсними частинами характеристичних коренів.

Для рівняння зі змінним коефіцієнтом і спадною правою частиною було показано, що навіть за умов очевидного згасання функції $f(t) = \frac{1}{t^2}$ розв’язок має розбіжну лінійну асимптотику. Зокрема, частинний розв’язок, побудований методом варіації постійних, мав вигляд $u_p(t) \sim -\frac{t}{2}$, що вказує на необмежене зростання при $t \to +\infty$. Відповідно до класифікації Кігурадзе, такий розв’язок не відповідає властивості A, однак у разі монотонної поведінки похідних його можна умовно віднести до класу C.

Порівняння обох випадків засвідчило, що асимптотична поведінка лінійних диференціальних рівнянь значною мірою визначається не лише формою рівняння, а й структурою коефіцієнтів і типом збурення. Навіть

незначна зміна в характері коефіцієнта (постійний/змінний) або правої частини (відсутня/спадна) може спричинити суттєву трансформацію поведінки розв’язку на нескінченності. Розв’язки можуть змінювати класифікаційну належність (від A до C), не змінюючи загального вигляду рівняння, що підкреслює необхідність індивідуального підходу до кожного типу задачі.

Таким чином, прикладний аналіз підтвердив продуктивність теоретичних підходів, викладених у монографії Кігурадзе–Чантурія, та виявив гнучкість асимптотичних методів при дослідженні рівнянь як з відомою структурою, так і зі змінними складовими. Отримані результати становлять обґрунтовану базу для загальних висновків роботи.

ВИСНОВКИ

У межах роботи здійснено цілісний теоретико-прикладний аналіз асимптотичних властивостей розв’язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь з урахуванням як постійних, так і змінних коефіцієнтів, а також впливу неоднорідності правої частини. Теоретична частина була присвячена формалізації понять, класифікації типів рівнянь і розв’язків, а також розгляду методології побудови асимптотичних оцінок. Прикладна частина продемонструвала застосування цієї методології до конкретних диференціальних рівнянь, що дозволило дослідити вплив структурних параметрів на довготривалу поведінку функцій.

У першому розділі було встановлено, що асимптотичні властивості розв’язків істотно залежать від природи коефіцієнтів, порядку рівняння та наявності або відсутності зовнішнього збурення. Виокремлено ключові ознаки поведінки функцій при $t \to +\infty$, а саме: коливальність, монотонність, обмеженість, сингулярність, стабільність, і на їх основі введено формалізовані класи властивостей A, B, C згідно з класифікацією Кігурадзе–Чантурія.

У другому розділі систематизовано методи побудови асимптотичних розкладів — як класичні, так і спеціалізовані. Доведено, що метод варіації постійних є дієвим інструментом у дослідженні неоднорідних рівнянь, оскільки дає змогу окремо контролювати вплив правої частини. Теорема Пуанкаре й інші апроксимаційні підходи, які використовують інтегральні та нерівнісні оцінки, виявилися особливо продуктивними у випадках повільно змінних або сингулярних коефіцієнтів.

У третьому розділі проведено прикладний аналіз двох типових рівнянь: з постійними та зі змінними коефіцієнтами. Встановлено, що рівняння з постійними коефіцієнтами мають чітко прогнозовану експоненціальну поведінку, яка повністю визначається коренями характеристичного рівняння. Натомість рівняння зі змінними коефіцієнтами виявляють чутливість до структури правої частини та можуть демонструвати лінійно зростаючу або навіть складну граничну поведінку. Узагальнююча класифікація дозволила

пов’язати ці типи з ознаками A, B, C та показала межі застосовності стандартних критеріїв.

Таким чином, проведене дослідження підтвердило, що вивчення асимптотичних властивостей розв’язків лінійних диференціальних рівнянь потребує поєднання структурного аналізу рівняння, якісного дослідження похідних, апроксимаційної побудови розв’язків і оцінювання граничної поведінки. Представлена у роботі методологія є адаптивною до широкого спектра задач і може бути використана для подальших досліджень рівнянь вищих порядків, нелінійних систем, а також рівнянь з параметричною залежністю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Кігурадзе І. Т., Чантурія Т. А. Асимптотичні властивості розв’язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь : монографія. Тбілісі : Мецнієреба, 1990. 264 с.

2. Kwong M. K., Zettl A. Asymptotically constant functions and second order linear oscillation. 1983.

3. Hallam T. G., Heidel J. W . The asymptotic manifolds of a perturbed linear system of differential equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1970.— V. 149, P. 233-241.

4. Sharman T. L. Properties of solutions of n-th order linear differential equations // Pacif. J. Math.- 1965. - V. 15, Nº 3 . P . 1045—1060.

5. Stachurska B. On the asymptotic behavior of solutions of the second-order linear differential equations // Ann. polon math. — 1971. — T. 24, Nº 2.— P. 203—208.