

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

(повне найменування інституту/факультету)

Кафедра теоретичної механіки

(повна назва кафедри)

## Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

на тему: «Дослідження зсувного руху в'язкої рідини між коаксіальними  
циліндрами»

«Investigation of the shear motion of a viscous fluid between coaxial cylinders»

Виконав: студентка денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика (Механіка)

Хаджиогло Анна Євгенівна

Керівник ст. викл. Царенко О.П.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент док. техн. наук, професор, Волков В.Е.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК №

Протокол засідання кафедри

протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2020 р.

№ \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2020 р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_  
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

Голова ЕК

Волков В.Е.

Волков В.Е.

(підпис)

(підпис)

## Зміст

Вступ.....	3
1. Математична постановка задачі .....	5
1.1. Стаціонарні профілі .....	6
1.2. Рівняння стійкості .....	7
1.3. Зведення до алгебраїчної характеристичної задачі .....	10
2. Результати .....	14
3. Межі течії з постійною в'язкістю і без урахування розігріву .....	17
4.1 Фізична основа нестійкості .....	19
4.2 Форма поверхні нейтральної стійкості .....	22
Висновки .....	26
Перелік посилань .....	27
Додаток А. Теорема Сквайра. Рівняння енергії .....	28
Додаток В. Визначення інтегралів .....	30
Додаток С. Програмна реалізація та результати обчислень .....	33

## Вступ

Плоска течія Куетта, яка є простим зсувним потоком між двома нескінченими паралельними площинами, – це найпростіший вид ламінарного руху і, можливо, найширше досліджуваний науковцями вид гідродинамічної стійкості. Всі існуючі дослідження показують, що течія завжди стійка при малих збуреннях ньютонівської рідини із постійними фізичними властивостями (густина, теплопровідність, в'язкість).

Поведінку нескінченно малих збурень плоскої течії Куетта останнім часом досліджували Галлахер і Мерсер, які застосовували метод аналізу, подібний до використовуваному в цій роботі. Вони спочатку підраховали найменше характеристичне число задачі і потім досліджували великі характеристичні числа.

Їх результати, які майже ідентичні результатам Саутвелла і Читти, показали, що течія завжди стійка для кінцевих чисел Рейнольдса.

Деадорф прийшов до такого ж висновку.

Пономаренко, використовуючи асимптотичні та чисельні методи, показав, що течія стійка, коли число Рейнольдса наближається до нескінченності.

Нарешті, Галлахер досліджував доведення Петрова, який показав, що й плоска течія Куетта, й плоска течія Пуайзеля завжди стійкі. Галлахер виявив, що доведення Петрова некоректно, але зміг отримати результат для плоскої течії Куетта.

Гілл показав, що для зміни профілю швидкості від стійкого до нестійкого, необхідна мала зміна профілю незбуреної швидкості. Зміна повинна бути такою, щоб утворився локальний максимум протяжності турбулентності.

Така умова існує для плоскої течії Куетта ньютонівської рідини з експоненціальною залежністю в'язкості від температури.

Джозеф, Гевіс та Лауренс розв'язали рівняння, що визначають ustalені профілі температури та швидкості у такому випадку.

Вони виявили, що ці профілі не визначаються однозначно дотичною напругою. Вони також визначаються числом Бринкмана.

Ці автори також виявили, що існує граничне значення дотичної напруги, що докладено до системи.

Джозеф досліджував стійкість плоскої течії Куетта при в'язкому розігріві.

У нев'язкому випадку профіль швидкості не змінюється уздовж нижньої гілки кривої дотичної напруги та нестійкий уздовж верхньої гілки.

Проте Джозеф не намагався визначити стійкість характеристик при кінцевих числах Рейнольдса.

Гольдштейн проаналізував випадок малих чисел Рейнольдса і також виявив, що нестійкість може існувати.

Ця праця є продовженням аналізів Гольдштейна та в ній описаний проміжний вид стійкості потоку в чотиривимірному просторі, який складається з хвильового числа, чисел Рейнольдса, Прандтля та Брикмана.

У параграфі 1 приведено рівняння для стаціонарних профілів температури та швидкості, записано їх для нескінченно малих збурень і показано, як ці рівняння можуть бути розв'язані.

В параграфі 2 обговорена точність методу і представлено криві нейтральної стійкості потоку.

В параграфі 3 перевірено граничні випадки потоків з постійною в'язкістю та без в'язкого нагріву.

Нарешті фізичне обґрунтування нестійкості та форми поверхні проміжної стійкості обговорено в параграфі 5.

## Висновки

Представлено дослідження стійкості плоскої течії Куетта при в'язкому нагріванні рідини Нав'є-Стокса-Фур'є з експоненціальною залежністю в'язкості від температури.

Використовуючи класичну теорію малих збурень, стійкість течії може бути описана системою з шести звичайних рівнянь.

Використовуючи метод Гальоркіна, ці рівняння зводяться до алгебраїчної характеристичної задачі. Характеристичне число з від'ємною дійсною частиною означає, що течія, яка досліджується, є нестійкою.

Графіки нейтральної стійкої визначені для чисел Брінкмана 15, 19, 25, 30, 40, 80 та 600 для чисел Прандтля 1, 5 та 50.

Число Брінкмана 19 приблизно відповідає максимуму дотичної напруги, прикладеної до системи.

Результати показують, що мають місце чотири різних режими нестійкості: нев'язкий режим, що виникає в точці перегину основного потоку; в'язкий режим, внаслідок шаруватості в'язкості у полі течії та об'єднаного механізму дифузії; сполучений режим, який є результатом конвекції та в'язкого дисипативного доданку в рівнянні енергії; і, нарешті, суто температурний режим.

Було представлено криві нейтральної нестійкості для плоскої течії Куетта ньютонівської рідини з експоненціальною залежністю в'язкості від температури. Були виявлені чотири різних режими нестійкості, типовим прикладом яких є чотири нейтральних криві на малюнку 3.

Чотири криві *A*, *B*, *C* і *D* асоціюються з парним, нев'язким, чисто термічним і в'язким режимами відповідно.

Не важко буде створити початкові потоки, описані тут, експериментально. Числа Брінкмана, незважаючи на те, що вони на перший погляд великі, можуть бути легко реалізовані.

Відносно легко вибрати рідину з чималим  $\beta$  і досить великим  $\mu_0$  таку, що числа Брінкмана і Рейнольдса приблизно такого ж порядку, як дані тут, можуть бути досягнуті.

Наша остання робота над хлорованим поліфенілом показала значення  $\beta$  від 30 до 90 і в'язкості в інтервалі від 1 до  $10^5$  Пуаз.

Такі рідини також поводяться як ньютонівські при дуже великих швидкостях зсуву.

### Перелік посилань

1. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // *Camb. Philo. Trans.* 1851. V. 9. P. 8–106
2. Deardorff, J. W. 1963 *J. Fluid Mech.* 15, 623.
3. Dunn, D. W. & Lin, C. C. 1953 *J. Aero. Sci.* 19, 491.
4. Gallagher, A. P. 1969 *Siam J. Appl. Math.* 4, 3.
5. Gavis, J. & Laurence, R. L. 1968 *Ind. Engng Chem. Fund.* 7, 232.
6. Gill, A. E. 1965 *J. Fluid Mech.* 21, 503.
7. Lees, L. & Lin, C. C. 1946 *N.A.S.A. Tech. Note*, no. 1115.
8. Nahme, R. 1940 *Ingr. Arch.* 11, 19.
9. Yih, C. S. 1967 *J. Fluid Mech.* 27, 337.