

В. М. Евтухов (Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова),

А. А. Козьма (Одес. гос. эконом. ун-т)

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АСИМПТОТИКА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We establish existence theorems and asymptotic representations for some classes of solutions of second-order differential equations whose right-hand sides contain nonlinearities of a more general form than nonlinearities of the Emden–Fowler type.

Встановлено необхідні і достатні умови існування та асимптотичні зображення деяких класів розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями більш загального вигляду, ніж нелінійності типу Емдена–Фаулера.

1. Постановка задачи. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i(t) [1 + r_i(t)] \varphi_{i0}(y) \varphi_{i1}(y'), \quad (1.1)$$

в котором $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $p_i: [a, \omega) \rightarrow (0, +\infty)$, $i = 1, \dots, m$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty^1$, — непрерывно дифференцируемые функции, $r_i: [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

$\varphi_{ik}: \Delta_k \rightarrow (0, +\infty)$, $k = 0, 1$, $i = 1, \dots, m$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$\Delta_k = \begin{cases} \text{либо } [y_k^0, Y_k), \\ \text{либо } (Y_k, y_k^0], \end{cases} \quad y_k^0 \in \mathbb{R}, \quad Y_k = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm \infty^2, \end{cases} \quad k = 0, 1, \quad (1.3)$$

причем φ_{ik} такие, что при каждом $k \in \{0, 1\}$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \varphi_{ik}(z) = \varphi_{ik}^0, \quad 0 \leq \varphi_{ik}^0 \leq +\infty, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.4)$$

и если $\varphi_{ik}(z)$ не является тождественной константой на промежутке Δ_k , то

$$\begin{aligned} \varphi'_{ik}(z) \neq 0 \quad \text{при } z \in \Delta_k, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \frac{z \varphi'_{ik}(z)}{\varphi_{ik}(z)} = \sigma_{ik} = \text{const}, \\ \limsup_{\substack{z \rightarrow Y_k \\ z \in \Delta_k}} \left| \frac{z \varphi''_{ik}(z)}{\varphi'_{ik}(z)} \right| < +\infty. \end{aligned} \quad (1.5)$$

¹При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

²При $Y_k = +\infty$ ($Y_k = -\infty$) считаем, что $y_k^0 > 0$ ($y_k^0 < 0$).

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Определение 1.1. Решение y уравнения (1.1), определенное на промежутке $[t_0, \omega) \subset [a, \omega)$, будем называть $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решением, где $-\infty \leq \mu_0 \leq +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$y^{(k)} : [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_k, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = Y_k, \quad k = 0, 1, \quad (1.6)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \mu_0 \quad \text{и при} \quad \mu_0 = \pm\infty \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1. \quad (1.7)$$

Разобьем множество $M = \{1, 2, \dots, m\}$ на четыре непересекающихся подмножества:

$$M_1 = \{i \in M : \varphi_{ik}^0 = \text{const} \neq 0, \quad k = 0, 1\},$$

$$M_2 = \{i \in M \setminus M_1 : \varphi_{i1}^0 = \text{const} \neq 0\},$$

$$M_3 = \{i \in M \setminus M_1 : \varphi_{i0}^0 = \text{const} \neq 0\},$$

$$M_4 = M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3).$$

В [1, 2] и настоящей работе для каждого $i \in M \setminus M_4$ приведены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна i -му слагаемому. При выполнении этих условий в [1] для $i \in M_1$ ($M_1 \neq \emptyset$) и всех возможных значений μ_0 , а в [2] для $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0, 1\}$, $M_{2+k} \neq \emptyset$) и $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ были установлены необходимые и достаточные условия существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений. Кроме того, получены асимптотические представления этих решений и их производных первого порядка при $t \uparrow \omega$. Целью настоящей работы является установление условий существования и асимптотического поведения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \mu_0)$ -решений для $i \in M_{2+k}$ ($k \in \{0, 1\}$, $M_{2+k} \neq \emptyset$) и $\mu_0 = \pm\infty$.

2. Некоторые априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решений.

Лемма 2.1. Пусть $y : [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_0 - \Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решение уравнения (1.1). Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty.$$

Доказательство леммы 2.1 при различных значениях Y_0 см. в работах [3, 4].

Лемма 2.2. Пусть $\mu_0 = \pm\infty$, $M_{2+k} \neq \emptyset$, $k \in \{0, 1\}$ и для некоторого $i \in M_{2+k}$ выполняются условия

$$\limsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < +\infty \quad \text{при} \quad j \in M \setminus \{i\} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{aligned}
 &\gamma \sigma_{ik} \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \text{если } j \in M_1, \\
 &\gamma(\sigma_{ik} - \sigma_{jk}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \text{если } j \in M_{2+k}, \quad j \neq i, \\
 &\gamma(\sigma_{ik} - \sigma_{j1-k}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \text{если } j \in M_{3-k}, \\
 &\gamma(\sigma_{ik} - \sigma_{j0} - \sigma_{j1}) \operatorname{sign} \pi_\omega(t) > 0, \quad \text{если } j \in M_4,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_0 = +\infty, \\ -1 & \text{при } \mu_0 = -\infty. \end{cases}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решения уравнения (1.1) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t) \varphi_{j0}(y(t)) \varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t) \varphi_{i0}(y(t)) \varphi_{i1}(y'(t))} = 0 \quad \text{при } j \in M \setminus \{i\}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $y: [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решение уравнения (1.1). Положим при $k \in \{0; 1\}$

$$\begin{aligned}
 z_{j1}(t) &= \frac{p_j(t)}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если } j \in M_1, \\
 z_{j2+k}(t) &= \frac{p_j(t) \varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если } j \in M_{2+k}, \quad i \neq j, \\
 z_{j3-k}(t) &= \frac{p_j(t) \varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если } j \in M_{3-k}, \\
 z_{j4}(t) &= \frac{p_j(t) \varphi_{j0}(y(t)) \varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))}, \quad \text{если } j \in M_4.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 z'_{j1}(t) &= \frac{p_j(t)}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} - \frac{y^{(k+1)}(t) \varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right], \\
 z'_{j2+k}(t) &= \frac{p_j(t) \varphi_{jk}(y^{(k)}(t))}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \times \\
 &\times \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y^{(k+1)}(t) \varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))} - \frac{y^{(k+1)}(t) \varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right], \\
 z'_{j3-k}(t) &= \frac{p_j(t) \varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \times \\
 &\times \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y^{(2-k)}(t) \varphi'_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{\varphi_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))} - \frac{y^{(k+1)}(t) \varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right], \\
 z'_{j4}(t) &= \frac{p_j(t) \varphi_{j0}(y(t)) \varphi_{j1}(y'(t))}{p_i(t) \varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{y''(t) \varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{y'(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} - \frac{y^{(k+1)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \Big].$$

Запишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned} z'_{j1}(t) &= \frac{z_{j1}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} \frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right], \\ z'_{j2+k}(t) &= \frac{z_{j2+k}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} + \right. \\ &+ \left. \frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} \left(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{jk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{jk}(y^{(k)}(t))} - \frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} \right) \right], \\ z'_{j3-k}(t) &= \frac{z_{j3-k}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} - \right. \\ &- \frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} \left(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} - \right. \\ &- \left. \left. \left(\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} \right)^{1-2k} \frac{y^{(1-k)}(t)\varphi'_{j1-k}(y^{(1-k)}(t))}{\varphi_{j1-k}(y^{(k)}(t))} \right) \right], \\ z'_{j4}(t) &= \frac{z_{j4}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p'_i(t)}{p_i(t)} - \right. \\ &- \frac{|\pi_\omega(t)|y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} \left(\frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{ik}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{ik}(y^{(k)}(t))} - \right. \\ &- \left. \left. \left(\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} \right)^{1-k} \frac{y'(t)\varphi'_{j1}(y'(t))}{\varphi_{j1}(y'(t))} - \left(\frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} \right)^{-k} \frac{y(t)\varphi'_{j0}(y(t))}{\varphi_{j0}(y(t))} \right) \right]. \end{aligned}$$

В силу условия (1.6) и второго из условий (1.5)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y^{(k)}(t)\varphi'_{lk}(y^{(k)}(t))}{\varphi_{lk}(y^{(k)}(t))} = \sigma_{lk}, \quad \text{где } k = 0, 1; \quad l = i, j. \tag{2.4}$$

Кроме того, согласно условиям (1.6), (1.7) и лемме 2.1

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(k+1)}(t)}{y^{(k)}(t)} = \pm\infty, \quad k = 0, 1, \quad \text{и} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t)y(t)}{(y'(t))^2} = 1. \tag{2.5}$$

Тогда с учетом (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) существуют постоянные $z_{jl}^0 < 0, l = \overline{1, 4}$, и $t_1 \in [t_0, \omega)$ такие, что выполняются неравенства

$$z'_{jl}(t) \leq \frac{z_{jl}^0 z_{jl}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при } t \in [t_1, \omega), \quad l = \overline{1, 4},$$

откуда следует, что

$$\ln \left| \frac{z_{jl}(t)}{z_{jl}(t_1)} \right| \leq z_{jl}^0 \int_{t_1}^t \frac{d\tau}{|\pi_\omega(\tau)|} \quad \text{при } t \in [t_1, \omega).$$

Поскольку выражения, стоящие справа, стремятся к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_{jl}(t) = 0, \quad l = \overline{1, 4}, \quad j \in M \setminus \{i\}.$$

Из этих предельных соотношений с учетом определения множеств M_l , $l = \overline{1, 4}$, следует справедливость (2.3).

3. Основные результаты. Введем вспомогательные обозначения

$$I_i(t) = \int_{I_i^0}^t p_i(s) ds, \quad Q_i(t) = \int_{Q_i^0}^t I_i(s) ds,$$

где

$$I_i^0 = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p_i(s) ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p_i(s) ds < +\infty, \end{cases} \quad Q_i^0 = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega |I_i(s)| ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega |I_i(s)| ds < +\infty. \end{cases}$$

Кроме того, при $i \in M_{2+k}$, $k \in \{0, 1\}$ и $\sigma_{ik} \neq 1$ введем функцию

$$\Phi_{ik}(s) = \int_{B_{ik}}^s \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}, \quad \text{где } B_{ik} = \begin{cases} y_k^0, & \text{если } \left| \int_{y_k^0}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)} \right| = +\infty, \\ Y_k, & \text{если } \left| \int_{y_k^0}^{Y_k} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Для этой функции существует обратная функция Φ_{ik}^{-1} , определенная при $B_{ik} = y_k^0$ на бесконечном промежутке

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} [0; +\infty), & \text{если } (1 - \sigma_{ik})y_k^0 > 0, \\ (-\infty; 0], & \text{если } (1 - \sigma_{ik})y_k^0 < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

и при $B_{ik} = Y_k$ на конечном промежутке

$$\Delta_{ik} = \begin{cases} (0; b_{ik}], & \text{если } (1 - \sigma_{ik})y_k^0 > 0, \\ (b_{ik}; 0), & \text{если } (1 - \sigma_{ik})y_k^0 < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\text{где } b_{ik} = \int_{Y_k}^{y_k^0} \frac{dz}{\varphi_{ik}(z)}.$$

Для функций Φ_{ik} и Φ_{ik}^{-1} имеют место предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow Y_k} \Phi_{ik}(s) = \infty, & \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_{ik}^{-1}(z) = Y_k \quad (\text{при } B_{ik} = y_k^0), \\ \lim_{s \rightarrow Y_k} \Phi_{ik}(s) = 0, & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_{ik}^{-1}(z) = Y_k \quad (\text{при } B_{ik} = Y_k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Кроме того, применяя правило Лопиталья, с учетом первого из предельных соотношений (1.5) получаем

$$\lim_{\substack{s \rightarrow Y_k \\ s \in \Delta_k}} \frac{\Phi_{ik}(s)}{\frac{s}{\varphi_{ik}(s)}} = \frac{1}{1 - \sigma_{ik}}, \quad k = 0, 1. \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. Пусть $\mu_0 = \pm\infty$ и для некоторого $i \in M_2$ выполняются условия (2.1), (2.2), $\sigma_{i0} \neq 1$. Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} |Q_i(t)|^{1-\sigma_{i0}} = +\infty, \\ 0, & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} |Q_i(t)|^{1-\sigma_{i0}} = 0, \end{cases} \quad Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } \gamma\pi_\omega(t) > 0, \\ 0, & \text{если } \gamma\pi_\omega(t) < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

при $t \in (a, \omega)$ выполнялись неравенства

$$\alpha_i Q_i(t) y_0^0 > 0, \quad (1 - \sigma_{i0}) I_i(t) Q_i(t) y_0^0 y_1^0 > 0, \quad \gamma(1 - \sigma_{i0}) \pi_\omega(t) I_i(t) > 0 \quad (3.6)$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(I_i(t))^2}{p_i(t) Q_i(t)} = 1. \quad (3.7)$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_i (1 - \sigma_{i0})^2 \varphi_{i1}^0 Q_i(t) [1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) I_i(t)} [1 + o(1)]. \quad (3.8)$$

Доказательство теоремы 3.1. *Необходимость.* Пусть $y: [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решение уравнения (1.1). Тогда из леммы 2.1 следует справедливость второго из условий (3.5). В силу выполнения условий $i \in M_2$, (2.1), (2.2) из уравнения (1.1) с учетом леммы 2.2 следует, что

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}(y(t)) \varphi_{i1}^0 [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.9)$$

Покажем, учитывая условие $\sigma_{i0} \neq 1$, что имеет место асимптотическое представление

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) I_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.10)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} \right)' &= \frac{y''(t) \varphi_{i0}(y(t)) - y'(t) \varphi'_{i0}(y(t)) y'(t)}{\varphi_{i0}^2(y(t))} = \\ &= \frac{y''(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} \left[1 - \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} \frac{y(t) \varphi'_{i0}(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} \right], \end{aligned}$$

в силу (1.5), (1.7) и (3.9) получаем

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} \right)' = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) p_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.11)$$

Интегрируя это выражение от t_0 до t ($t \in (t_0, \omega)$), имеем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = c_i + \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) I_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.12)$$

Если $I_i^0 = t_0$, то справедливо (3.10). Покажем, что $c_i = 0$ при $I_i^0 = \omega$. Предположим противное, тогда $\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = c_i + o(1)$ при $t \uparrow \omega$ и в силу (3.9)

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 p_i(t) \left[\frac{1}{c_i} + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение от t_0 до t ($t \in (t_0, \omega)$), находим

$$\ln |y'(t)| = c + \alpha_i \varphi_{i1}^0 I_i(t) \left[\frac{1}{c_i} + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Здесь левая часть при $t \uparrow \omega$ стремится к бесконечности, а правая — к константе. Полученное противоречие доказывает справедливость (3.10) в случае, когда $I_i^0 = \omega$. Из (3.9) и (3.10) следует, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) I_i(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

и, в силу определения $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решения, имеет место третье из неравенств (3.6).

Применяя правило Лопиталья в форме Штольца, с учетом (1.5), (3.10) и условия $\sigma_{i0} \neq 1$ находим

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t)) Q_i(t)} &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} \right)'}{Q_i'(t)} = \\ &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\frac{y'(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} \left[1 - \frac{y(t) \varphi_{i0}'(y(t))}{\varphi_{i0}(y(t))} \right]}{I_i(t)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 \end{aligned}$$

или

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i0}(y(t))} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.13)$$

Из этого соотношения следует справедливость первого из неравенств (3.6) и первого из асимптотических представлений (3.8).

В силу (3.10) и (3.13)

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \quad (3.14)$$

что обеспечивает выполнение первого из условий (3.5) и второго из неравенств (3.6).

Кроме того, из (3.12) и (3.14) с учетом условия $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y(t) y''(t)}{(y'(t))^2} = 1$ следует справедливость предельного соотношения (3.7) и второго из асимптотических представлений (3.8).

Достаточность. Пусть выполняются условия (3.5)–(3.7). В силу (3.1)–(3.3), а также (3.5) и (3.6) однозначно определяются значения Y_k и промежутки Δ_k ,

$\Delta_{ik}, k = 0, 1$. Установив Y_k и $\Delta_k, k = 0, 1$, докажем существование хотя бы одного $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решения уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотическое представление (3.8). Для этого применим к уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned} \Phi_{i0}(y(t)) &= \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) [1 + v_1(x)], \\ \frac{y'(t)}{y(t)} &= \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)} [1 + v_2(x)], \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$x = \beta \ln |Q_i(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } Q_i^0 = a, \\ -1, & \text{если } Q_i^0 = \omega. \end{cases}$$

В силу первых из условий (3.5) и (3.6) можно выбрать $t_1 \in [t_0, \omega)$ так, что $\frac{3}{2} \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) \subset \Delta_{i0}$ при $t \in [t_1, \omega)$. Тогда из первого соотношения (3.15) и свойств функции Φ_{i0} следует, что при $t \in [t_1, \omega)$, $|v_1| \leq \frac{1}{2}$ имеет место равенство $y(t) = Y_i(t, v_1)$, в котором

$$Y_i(t, v_1) = \Phi_{i0}^{-1} (\alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) [1 + v_1]), \tag{3.16}$$

где t — функция, обратная к $x = \beta \ln |Q_i(t)|$.

Для функции Y_i в силу (3.1)–(3.4) имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_i(t, v_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по } v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \tag{3.17}$$

$$Y_i(t, v_1) \subset \Delta_0 \quad \text{при } t \in [t_1, \omega), \quad |v_1| \leq \frac{1}{2}. \tag{3.18}$$

Кроме того, при каждом фиксированном значении $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ имеем

$$(Y_i(t, v_1))'_t = \varphi_{i0} (Y_i(t, v_1)) \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) I_i(t) [1 + v_1]. \tag{3.19}$$

Тогда, применяя правило Лопиталья, находим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0} (Y_i(t, v_1)) Q_i(t)} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 [1 + v_1]$$

или

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0} (Y_i(t, v_1))} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t) [1 + v_1] [1 + o(1)] \tag{3.20}$$

при $t \uparrow \omega$ и фиксированном $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Из (3.19) и (3.20) получим (при любом фиксированном $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$) предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) (Y_i(t, v_1))'_t}{Y_i(t, v_1)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)}. \tag{3.21}$$

Введем также функцию

$$Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) = \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0})Q_i(t)} Y_i(t, v_1)[1 + v_2], \quad (3.22)$$

определенную при $t \in (t_1, \omega)$, $|v_k| \leq \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$. Для нее имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1) \left(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \right)'_t}{(Y_i(t, v_1))'_t Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2)} = \\ & = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1) \frac{1 + v_2}{1 - \sigma_{i0}} \left(\left(\frac{I_i(t)}{Q_i(t)} \right)' Y_i(t, v_1) + \frac{I_i(t)}{Q_i(t)} (Y_i(t, v_1))'_t \right)}{(Y_i(t, v_1))'_t \frac{1 + v_2}{1 - \sigma_{i0}} \frac{I_i(t)}{Q_i(t)} Y_i(t, v_1)} = \\ & = 1 + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(\frac{I_i(t)}{Q_i(t)} \right)' \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t) [1 + v_1] \varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))}{\frac{I_i(t)}{Q_i(t)} \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) [1 + v_1] \varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))} = \\ & = 1 + (1 - \sigma_{i0}) \lim_{t \uparrow \omega} \left(\frac{p_i(t) Q_i(t)}{I_i^2(t)} - 1 \right) = 1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В силу (3.21) и (3.23)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) \left(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \right)'_t}{Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0}) Q_i(t)} \quad (3.24)$$

при фиксированных $|v_k| \leq \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$.

Из (3.24) с учетом второго и третьего из неравенств (3.6), предельного соотношения (3.7), (3.22) и монотонности функции Y_i по переменной v_1 получаем

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) = Y_1 \quad \text{равномерно по } v_k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right], \quad k = 1, 2, \quad (3.25)$$

$$Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \subset \Delta_{i1} \quad \text{при } t \in [t_2, \omega), \quad \text{где } t_2 \in [t_1, \omega). \quad (3.26)$$

В силу условий (1.3)–(1.5), (3.17), (3.18), (3.25), (3.26) следует, что равномерно по $|v_k| \leq \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$, имеют место пределы

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1) \varphi'_{j0}(Y_i(t, v_1))}{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1))} = \sigma_{j0}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.27)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \varphi'_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))}{\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))} = \sigma_{j1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.28)$$

причем если $\lim_{\substack{Y \rightarrow Y_k \\ Y \in \Delta_k}} \varphi_{jk} = \text{const} \neq 0$, то $\sigma_{jk} = 0$, $k \in \{0, 1\}$.

Поскольку выполняются условия (3.17), (3.18), (3.21), (3.23)–(3.28), при фиксированных $|v_k| \leq \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$, функции $Y_i(t, v_1)$ и $Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2)$ обладают всеми теми свойствами $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решений, которые использовались при доказательстве леммы 2.2 и, следовательно,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1))\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))\varphi_{i1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))} = 0, \quad j \in M \setminus \{i\}. \quad (3.29)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1))\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))} \right)'_{v_1} = \\ &= \frac{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1))\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))} \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) \times \\ & \quad \times Q_i(t) \left[\frac{Y_i(t, v_1)\varphi'_{j0}(Y_i(t, v_1))}{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1))} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2)\varphi'_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))}{\varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))} - \frac{Y_i(t, v_1)\varphi'_{i0}(Y_i(t, v_1))}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))} \right] \end{aligned}$$

и выполняются условия (2.2), (3.27), (3.28), существует $t_3 \in [t_2, \omega)$ такое, что при $t \in [t_3, \omega)$ и $|v_k| \leq \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$, правая часть сохраняет знак. Следовательно, отношение $\frac{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1))\varphi_{j0}(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2))}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))}$ изменяется монотонно по v_1 при $t \in [t_3, \omega)$, $|v_2| \leq \frac{1}{2}$. Учитывая этот факт, нетрудно показать, что предельное соотношение (3.29) выполняется равномерно по v_1, v_2 . Рассуждая таким же образом и учитывая (3.20), имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))Q_i(t)[1 + v_1]} = \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 \quad (3.30)$$

равномерно по v_1 .

В результате преобразования (3.15) получим заданную на множестве

$$\Omega = [x_0; +\infty) \times D, \quad x_0 = \beta \ln |Q_i(t_3)|,$$

$$D = \left\{ (v_1, v_2) : |v_k| \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2 \right\}$$

систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 v_1' &= \beta \left[-[1 + v_1] + \frac{\alpha_i Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t) \varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))} [1 + v_2] \right], \\
 v_2' &= \beta \left[- \left(\frac{I_i'(t) Q_i(t)}{I_i^2(t)} - 1 \right) [1 + v_2] - \frac{1}{1 - \sigma_{i0}} [1 + v_2]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1 - \sigma_{i0}) Q_i^2(t)}{I_i^2(t) Y_i(t, v_1)} \sum_{j=1}^m \alpha_j [1 + r_j(t)] p_j(t) \varphi_{j0}(Y_i(t, v_1)) \varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

в которой t — функция, обратная к $x = \beta \ln |Q_i(t)|$.

На множестве Ω функции $\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_{i0}(Y_i(t, v_1))}$ и $\frac{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1)) \varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, v_1, v_2) \right)}{Y_i(t, v_1)}$ являются непрерывными и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным v_1 и v_2 . Разложим эти функции при каждом фиксированном t по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $(0, 0)$ с целью выделения линейных частей. С учетом этих разложений и (3.16)–(3.30) система (3.31) принимает вид

$$\begin{aligned}
 v_1' &= \beta [f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_1(x, v_1, v_2)], \\
 v_2' &= \beta [f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_2(x, v_1, v_2)],
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= -1 + \frac{\alpha_i}{\varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})} \frac{Y_i(t, 0)}{Q_i(t) \varphi_{i0}(Y_i(t, 0))}, \\
 c_{11} &= -1 + \frac{\alpha_i}{\varphi_{i1} (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t)} \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) \left[1 - \frac{Y_i(t, 0) \varphi_{i0}'(Y_i(t, 0))}{\varphi_{i0}(Y_i(t, 0))} \right], \\
 c_{12}(x) &= \frac{\alpha_i}{\varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 Q_i(t)} \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0}) Q_i(t) \left[1 - \frac{Y_i(t, 0) \varphi_{i0}'(Y_i(t, 0))}{\varphi_{i0}(Y_i(t, 0))} \right], \\
 f_2(x) &= - \frac{I_i'(t) Q_i(t)}{I_i^2(t)} + 1 - \frac{1}{1 - \sigma_{i0}} + (1 - \sigma_{i0}) \times \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^m \alpha_j [1 + r_j(t)] \frac{p_j(t) \varphi_{j0}(Y_i(t, 0)) \varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)}{p_i(t) \varphi_{i0}(Y_i(t, 0)) \varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)} \times \\
 &\quad \times \varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right) \frac{p_i(t) Q_i(t)}{I_i^2(t)} \frac{Q_i(t) \varphi_{i0}(Y_i(t, 0))}{Y_i(t, 0)}, \\
 c_{21}(x) &= \alpha_i \varphi_{i1}^0 (1 - \sigma_{i0})^2 \times \\
 &\quad \times \sum_{j=1}^m \alpha_j [1 + r_j(t)] \frac{p_j(t) \varphi_{j0}(Y_i(t, 0)) \varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)}{p_i(t) \varphi_{i0}(Y_i(t, 0)) \varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{Q_i(t) \varphi_{i0}(Y_i(t, 0))}{Y_i(t, 0)} \right)^2 \frac{p_i(t) Q_i(t)}{I_i^2(t)} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\frac{Y_i(t, 0)\varphi'_{j0}(Y_i(t, 0))}{\varphi_{j0}(Y_i(t, 0))} \varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{Y_i^{[1]}(t, 0, 0)\varphi'_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)}{\varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)} - \varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right) \right], \\
 c_{22}(x) = & - \left(\frac{I'_i(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)} - 1 \right) - \frac{2}{1 - \sigma_{i0}} + \frac{p_i(t)Q_i(t)}{I_i^2(t)} (1 - \sigma_{i0}) \sum_{j=1}^m \alpha_j [1 + r_j(t)] \times \\
 & \times \frac{p_j(t)\varphi_{j0}(Y_i(t, 0))\varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)}{p_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t, 0))\varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)} \frac{Q_i(t)\varphi_{i0}(Y_i(t, 0))}{Y_i(t, 0)} \varphi_{i1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right) \times \\
 & \times \frac{Y_i^{[1]}(t, 0, 0)\varphi'_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)}{\varphi_{j1} \left(Y_i^{[1]}(t, 0, 0) \right)},
 \end{aligned}$$

а функции $V_1(x, v_1, v_2)$ и $V_2(x, v_1, v_2)$ таковы, что $\lim_{|v_1|+|v_2| \rightarrow 0} \frac{V_k(x, v_1, v_2)}{|v_1| + |v_2|} = 0$, $k = 1, 2$, равномерно по $x \in [x_0; +\infty)$.

Кроме того, принимая во внимание условия (3.1)–(3.4), (3.16)–(3.30), а также замену независимой переменной, получаем

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{11}(x) = 0, \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{12}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{21}(x) = \frac{-1}{1 - \sigma_{i0}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_{22}(x) = \frac{-2}{1 - \sigma_{i0}}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, система (3.32) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами. Записав характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части этой системы

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \beta \\ -\frac{\beta}{1 - \sigma_{i0}} & \frac{-2\beta}{1 - \sigma_{i0}} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим

$$\lambda^2 + \frac{2\beta}{1 - \sigma_{i0}} \lambda + \frac{1}{1 - \sigma_{i0}} = 0.$$

У этого уравнения нет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (3.32) выполняются все условия теоремы 2.1 работы [5]. На основании этой теоремы система (3.32) имеет хотя бы одно решение $(v_k)_{k=1}^2: [x_1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $x_1 \geq x_0$, которое стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Этому решению, с учетом преобразования (3.15), соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.1), которое вместе со своей производной допускают асимптотические представления

$$\Phi_{i0}(y(t)) = \alpha_i(1 - \sigma_{i0})\varphi_{i1}^0 Q_i(t)[1 + o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i0})Q_i(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Из этих соотношений, с учетом (3.4) и (3.7), следует справедливость асимптотических представлений (3.8). Используя эти представления, а также условия (2.1), (2.2), $\sigma_{i0} \neq 1$, (3.7), (3.6), нетрудно показать, что $y(t)$ имеет все свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решения.

Теорема 3.2. Пусть $\mu_0 = \pm\infty$ и для некоторого $i \in M_3$ выполняются условия (2.1), (2.2), $\sigma_{i1} \neq 1$. Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$Y_1 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} |I_i(t)|^{1-\sigma_{i1}} = +\infty, \\ 0, & \text{если } \lim_{t \uparrow \omega} |I_i(t)|^{1-\sigma_{i1}} = 0, \end{cases} \quad Y_0 = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } \gamma\pi_\omega(t) > 0, \\ 0, & \text{если } \gamma\pi_\omega(t) < 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

при $t \in (a, \omega)$ выполнялись неравенства

$$\alpha_i(1 - \sigma_{i1})I_i(t)y_1^0 > 0, \quad (1 - \sigma_{i1})I_i(t)Q_i(t)y_0^0 y_1^0 > 0, \quad \gamma(1 - \sigma_{i1})\pi_\omega(t)I_i(t) > 0 \quad (3.34)$$

и имело место предельное соотношение

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{(I_i(t))^2}{p_i(t)Q_i(t)} = 1. \quad (3.35)$$

Кроме того, каждое из таких решений допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\frac{y'(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i(1 - \sigma_{i1})\varphi_{i0}^0 I_i(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{p_i(t)}{(1 - \sigma_{i1})I_i(t)}[1 + o(1)]. \quad (3.36)$$

Доказательство теоремы 3.2. Необходимость. Пусть $y: [t_0, \omega) \rightarrow \Delta_0$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решение уравнения (1.1). Тогда из леммы 2.1 следует справедливость второго из условий (3.33). В силу выполнения условий $i \in M_3$, (2.1), (2.2) из леммы 2.2 следует, что

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i0}^0 \varphi_{i1}(y'(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.37)$$

Применив правило Лопиталья, с учетом (1.5) и $\sigma_{i1} \neq 1$ получим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y'(t)}{I_i(t) \varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i (1 - \sigma_{i1}) \varphi_{i0}^0, \quad (3.38)$$

или

$$y'(t) = \alpha_i (1 - \sigma_{i1}) \varphi_{i0}^0 I_i(t) \varphi_{i1}(y'(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (3.39)$$

Из (3.39) следует справедливость первого из неравенств (3.34) и первого из асимптотических представлений (3.36). Дифференцируя выражение $\frac{y(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}$, с учетом (1.5), (1.7) и (3.39) получаем соотношение

$$\left(\frac{y(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))}\right)' = \alpha_i(1 - \sigma_{i1})^2 \varphi_{i0}^0 I_i(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega.$$

Исследуя его таким же образом, как и соотношение (3.10), имеем

$$\frac{y(t)}{\varphi_{i1}(y'(t))} = \alpha_i[1 - \sigma_{i1}]^2 \varphi_{i0}^0 Q_i(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{3.40}$$

Отсюда с учетом (3.38) получаем

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i1})Q_i(t)}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega, \tag{3.41}$$

что подтверждает справедливость второго из неравенств (3.34). Кроме того, из (3.37) и (3.39) получим асимптотическое представление

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{p_i(t)}{(1 - \sigma_{i1})I_i(t)}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{3.42}$$

Тогда, во-первых, справедливо первое из условий (3.33), во-вторых, с учетом (1.7) выполняется третье из неравенств (3.34), а в-третьих, принимая во внимание (3.41) и (1.7), получаем предельное соотношение (3.35) и, следовательно, второе из асимптотических представлений (3.36).

Достаточность. Применяя к уравнению (1.1) преобразование

$$\Phi_{i1}(y'(t)) = \alpha_i \varphi_{i0}^0 I_i(t)[1 + v_2(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{I_i(t)}{(1 - \sigma_{i1})Q_i(t)}[1 + v_1(x)],$$

где

$$x = \beta \ln |I_i(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } I_i^0 = a, \\ -1, & \text{если } I_i^0 = \omega, \end{cases}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$v_1' = \beta \left[- \left(1 - \frac{I_i^2(t)}{Q_i(t)I_i'(t)} \right) [1 + v_1] - \frac{1}{1 - \sigma_{i1}} \frac{I_i^2(t)}{Q_i(t)I_i'(t)} [1 + v_1]^2 + \right. \\ \left. + \frac{I_i(t)[1 + v_1]}{I_i'(t)Y_i^{[1]}(t, v_2)} \sum_{j=1}^m \alpha_j p_j(t)[1 + r_j(t)] \varphi_{j0}(Y_i(t, v_1, v_2)) \varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_2)) \right], \tag{3.43}$$

$$v_2' = \beta \left[- [1 + v_2] + \frac{1}{\alpha_i \varphi_{i0}^0 I_i'(t) \varphi_{i1}(Y_i^{[1]}(t, v_2))} \times \right. \\ \left. \times \sum_{j=1}^m \alpha_j p_j(t)[1 + r_j(t)] \varphi_{j0}(Y_i(t, v_1, v_2)) \varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_2)) \right],$$

где

$$Y_i^{[1]}(t, v_2) = \Phi_{i1}^{-1}(\alpha_i \varphi_{i0}^0 I_i(t)[1 + v_2(x)]),$$

$$Y_i(t, v_1, v_2) = \frac{(1 - \sigma_{i1})Q_i(t)}{I_i(t)[1 + v_1(x)]} Y_i^{[1]}(t, v_2(x)),$$

t – функция, обратная к $x = \beta \ln |I_i(t)|$.

По аналогии с доказательством теоремы 3.1, раскладывая функции $\frac{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1, v_2)) \varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_2))}{Y_i^{[1]}(t, v_2)}$ и $\frac{\varphi_{j0}(Y_i(t, v_1, v_2)) \varphi_{j1}(Y_i^{[1]}(t, v_2))}{\varphi_{i1}(Y_i^{[1]}(t, v_2))}$ при каждом

фиксированном t по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $(0, 0) \in D$ с целью выделения линейных частей, приводим систему (3.43) к системе вида (3.32), которая в силу условий теоремы и свойств функций $Y_i, Y_i^{[1]}$ является квазилинейной системой с почти постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части этой системы имеет вид

$$\lambda^2 + \beta \frac{2 - \sigma_{i1}}{1 - \sigma_{i1}} \lambda + \frac{1}{1 - \sigma_{i1}} = 0.$$

Поскольку оно не имеет корней с нулевой действительной частью, а также выполняются другие условия теоремы 2.1 работы [5], система (3.43) имеет решение $(v_k)_{k=1}^2: [x_1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $x_1 \geq x_0$, которое стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Этому решению соответствует решение $y(t)$ уравнения (1.1), которое допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.36). Используя эти представления и условия (3.34), (3.35), нетрудно показать, что $y(t)$ имеет все свойства $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решения.

4. Выводы. В настоящей работе для каждого $i \in M \setminus M_4$ получены условия, при выполнении которых на любом $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решении уравнения (1.1) правая его часть асимптотически эквивалентна i -му слагаемому. При этих условиях в случае $i \in M_{2+k}, k \in \{0, 1\}, M_{2+k} \neq \emptyset$, приведены необходимые и достаточные признаки существования $\Pi_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -решений уравнения (1.1), а также асимптотические представления таких решений при $t \uparrow \omega$.

1. Козьма А. А. Асимптотические представления одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2006, – 9, № 4. – С. 490–501.
2. Козьма О. О. Асимптотичне поведіння розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 55–65.
3. Евтухов В. М., Касьянова В. А. Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 3. – С. 338–355.
4. Касьянова В. А. Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 5–19.
5. Евтухов В. М. Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – 39, № 4. – С. 433–444.

Получено 28.01.09