

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Антиплоська задача теорії пружності для сегменту
кільця з тріщиною»

«The anti-plane problem of elasticity theory for a sector of
a ring with a crack»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Даніленко Дарія Олексіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З.Ю. _____
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2023 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2023 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

Вступ		3
1	Постановка антиплоської задачі для сектора круга	5
2	Неперевна задача	6
2.1	Зведення до одномірної задачі	6
2.2	Розв'язання одновимірної задачі	7
2.2.1	Заміна Ейлера	7
2.2.2	Побудова розв'язку одновимірної крайової задачі	8
3	Розривна задача	9
3.1	Побудова функції Грина	9
3.1.1	Перевірка умов на неособливість	10
3.1.2	Побудова ФБСР крайової задачі	10
3.1.3	Фундаментальна функція і функція Грина	12
3.2	Побудова розв'язку розривної крайової задачі	12
3.3	Обернене перетворення	13
4	Відокремлення особливості у сингулярній частині ядра	15
4.1	Тригонометрична заміна	15
4.2	Сингулярне рівняння	17
4.3	Виділення особливості	18
5	Розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння	19
5.1	Сингулярне інтегро-диференційне рівняння (СІДР)	19
5.2	Безкінечна система лінійних алгебраїчних рівнянь (БСЛАР)	20
6	Обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень	23
7	Графічні результати	25
	Висновки	28
	Список літератури	29

ВСТУП

У даній дипломній роботі досліджено проблему антиплоскої задачі теорії пружності для сегмента кільця, що має поздовжню тріщину. Зазначений сегмент кільця підданий впливу механічного навантаження. Ця задача є важливим модельним завданням, яке може мати практичні застосування в різних інженерних розробках.

У першому розділі ми формулюємо постановку антиплоскої задачі для сектора круга з дефектом, до зовнішньої поверхні якої прикладене деяке навантаження. Пояснюємо ілюстрацію та переформулюємо умови на тріщині у термінах переміщень.

У другому розділі ми досліджуємо неперервну частину задачі, яка не містить дефекту. Використовуючи скінчене \sin -перетворення Фур'є ми зводимо вихідну задачу до одновимірної крайової задачі. Ми розв'язуємо цю задачу у просторі трансформант і будуємо розв'язок для неперервної частини завдання. Для інтегрального перетворення ми користуємося табличними значеннями.

У третьому розділі ми розглядаємо розривну частину задачі, яка містить дефект (у нашому випадку стрибок переміщення). Для побудови розв'язку на цьому етапі ми будемо використовувати апарат функції Грина, а також її розривні властивості. Використовуючи обернене інтегральне перетворення повертаємось до простору оригіналів і отримуємо вираз для функції переміщення, який містить невідому функцію $\chi(\varphi)$.

У четвертому розділі, за допомогою табличних значень рядів, ми спрощуємо функцію переміщення і виділяємо особливість у сингулярній частині ядра. Отримуємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння.

У п'ятому розділі, за допомогою методу ортогональних многочленів ми зводимо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР) до безкінечної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього ми розвиваємо невідому функцію стрибка переміщення в ряд за поліномами Чебишева 2-го роду. Після цього розв'язуємо отриману систему методом редукції та отримуємо розв'язок розривної задачі.

У шостому розділі, ми обчислили значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

У розділі з графічними результатами представлені графіки, побудовані під час аналізу поведінки функцій переміщення та напруження при відсутності та присутності тріщини.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА АНТИПЛОСЬКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ
СЕКТОРА КРУГА

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0 \\ W|_{\varphi=0} = 0, \quad W|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad a < r < b \\ \tau_{rz}|_{r=a} = 0, \quad \tau_{rz}|_{r=b} = p(\varphi), \quad 0 < \varphi < \alpha \\ \langle W(c, \varphi) \rangle = W(c-0, \varphi) - W(c+0, \varphi) = \chi(\varphi) \quad w_0 < \varphi < w_1, \\ \langle \tau_{rz}(c, \varphi) \rangle = \tau_{rz}(c-0, \varphi) - \tau_{rz}(c+0, \varphi) = 0 \quad r = c, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Розглянемо антип्लоську задачу для сегменту кільця ($a < r < b$, $0 < \varphi < \alpha$). Внутрішня поверхня сегменту вільна від навантажень ($r = a$), а бокові сторони жорстко закріплені ($\varphi = 0, \varphi = \alpha$). На зовнішню сторону сегменту ($r = b$) діє навантаження $p(\varphi)$.

В середині сегменту знаходиться тонка тріщина ($r = c$, $w_0 < \varphi < w_1$), береги якої вільні від напружень. На тріщині переміщення зазнає стрибка, який задається невідомою функцією $\chi(\varphi)$.

Додатково, перепишемо наше крайові умови та умови на тріщині, що містять напруження τ_{rz} у термінах переміщень:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} = \frac{p(\varphi)}{G}$$

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial r}(c, \varphi) \right\rangle = \frac{\partial W}{\partial r}(c-0, \varphi) - \frac{\partial W}{\partial r}(c+0, \varphi) = 0$$

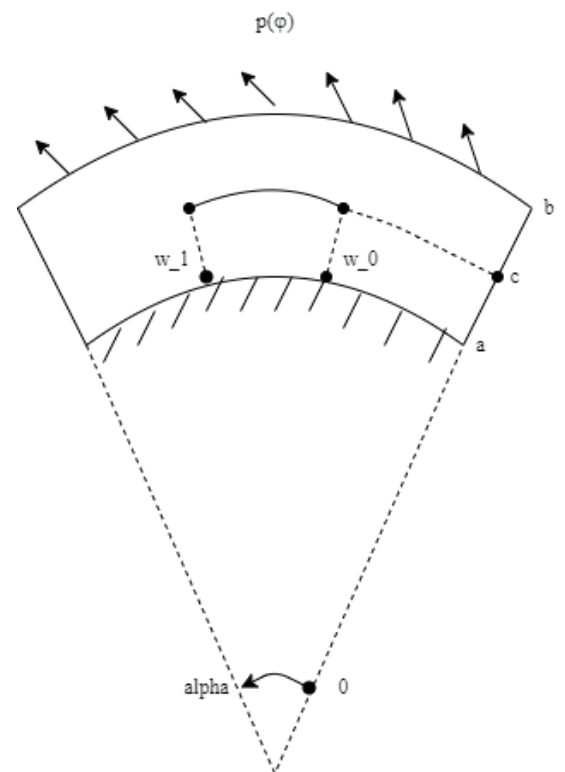


Рис. 1.1. Постановка задачі

РОЗДІЛ 2

НЕПЕРЕВНА ЗАДАЧА

2.1 Зведення до одномірної задачі

Для зведення задачі до одномірної крайової, скористаємося методом інтегральних перетворень. У даному випадку ми скористаємося перетворенням Фур'є за змінною φ . Для цього представимо рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + r^2 \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + r \frac{\partial W}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

Так як крайові умови задовольняють вимогам табличного^[1] перетворення, скористаємося скінченим \sin -перетворенням Фур'є:

$$W_\beta(r) = \int_0^\alpha W(r, \varphi) \sin \beta \varphi d\varphi \quad (2.2)$$

$$W(r, \varphi) = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} W_\beta \sin \beta \varphi, \quad \beta = \frac{\pi k}{\alpha} \quad (2.3)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\sin \beta \varphi$, та проінтегруємо від 0 до α :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \sin \beta \varphi d\varphi &= -\beta^2 W_\beta \\ r^2 \int_0^\alpha \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \sin \beta \varphi d\varphi &= r^2 W_\beta'' \\ r \int_0^\alpha \frac{\partial W}{\partial r} \sin \beta \varphi d\varphi &= r W_\beta' \\ \int_0^\alpha \frac{p(\varphi)}{G} \sin \beta \varphi d\varphi &= \frac{p_\beta}{G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle W_\beta(c) \rangle &= \int_{w_0}^{w_1} \chi(\varphi) \sin \beta \varphi d\varphi = \chi_\beta \\ \langle W_\beta'(c) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

2.2 Розв'язання одновимірної задачі

Отримуємо одновимірну крайову задачу, рівняння якої має вигляд Ейлера.

$$\begin{cases} r^2 W''_{\beta} + r W'_{\beta} - \beta^2 W_{\beta} = 0 \\ W'_{\beta}|_{r=a} = 0, & W'_{\beta}|_{r=b} = \frac{p_{\beta}}{G} \\ \langle W_{\beta}(c) \rangle = \chi_{\beta} \\ \langle W'_{\beta}(c) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2.1 Заміна Ейлера

Для подальшої роботи проведемо заміну Ейлера.

$$r = e^t \rightarrow t = \ln r \quad (2.5)$$

$$U_{\beta}(t) = W_{\beta}(e^t) \quad (2.6)$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \quad W'_{\beta} = U'_{\beta} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \cdot U'_{\beta}$$

$$\begin{aligned} W'_{\beta} &= e^{-t} U'_{\beta} \\ W''_{\beta} &= e^{-2t} (U''_{\beta} - U'_{\beta}) \end{aligned}$$

Крайова задача приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} U''_{\beta} - \beta^2 U_{\beta} = 0, & \ln a < t < \ln b \\ U'_{\beta}|_{t=\ln a} = 0, & U'_{\beta}|_{t=\ln b} = \frac{p_{\beta} e^t}{G} \\ \langle U_{\beta}(c) \rangle = \chi_{\beta} \\ \langle U'_{\beta}(c) \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2.2 Побудова розв'язку одновимірної крайової задачі

Загальний розв'язок неперервної задачі може бути представлений у вигляді:

$$U_\beta = C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t} \quad (2.8)$$

$$U'_\beta = \beta C_0 e^{\beta t} - \beta C_1 e^{-\beta t} \quad (2.9)$$

Обчислимо коефіцієнти C_0 і C_1 , підставивши загальний розв'язок у крайові умови:

$$U'_\beta \Big|_{t=\ln a} = \beta C_0 e^{\beta \ln a} - \beta C_1 e^{-\beta \ln a} = 0$$

$$\beta C_0 a^\beta - \beta C_1 a^{-\beta} = 0$$

$$C_1 a^{-\beta} = C_0 a^\beta$$

$$C_1 = C_0 a^{2\beta}$$

$$U'_\beta \Big|_{t=\ln b} = \beta C_0 e^{\beta \ln b} - \beta C_0 a^{2\beta} e^{-\beta \ln b} = \frac{p_\beta e^{\ln b}}{G}$$

$$\beta C_0 b^\beta - \beta C_0 a^{2\beta} b^{-\beta} = \frac{p_\beta b}{G}$$

$$\beta C_0 b^{-\beta} (b^{2\beta} - a^{2\beta}) = \frac{p_\beta b}{G}$$

$$C_0 = \frac{p_\beta b^{\beta+1}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}, \quad C_1 = \frac{p_\beta b^{\beta+1} a^{2\beta}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}$$

Отримуємо розв'язок неперервної задачі у просторі трансформант:

$$U_n = \frac{p_\beta b^{\beta+1} e^{\beta t}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} + \frac{p_\beta b^{\beta+1} a^{2\beta} e^{-\beta t}}{G\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}$$

$$U_n = \frac{p_\beta}{G} \left(\frac{b^{\beta+1} (e^{\beta t} + a^{2\beta} e^{-\beta t})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \right) \quad (2.10)$$

РОЗДІЛ 3

РОЗРИВНА ЗАДАЧА

Загальний вид розв'язку розривної задачі має вигляд:

$$W_r(r) = \int_0^\alpha G(r, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{j=0}^1 X_j W_j \quad (3.1)$$

Де: $G(r, \xi)$ - це функція Грина

$f(\xi)$ - права частина крайової задачі

$$\begin{aligned} X_0 &= \chi_\beta & W_0 &= -p(c)G^{0,1}(r, c) \\ X_1 &= 0 & W_1 &= p(c)G(r, c) \end{aligned}$$

$$G^{0,1}(r, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \xi) \quad (3.2)$$

3.1 Побудова функції Грина

$$\begin{cases} U_\beta'' - \beta^2 U_\beta = 0, & \ln a < t < \ln b \\ U_\beta'|_{t=\ln a} = 0, & U_\beta'|_{t=\ln b} = \frac{p_\beta e^t}{G} \end{cases} \quad (3.3)$$

Загальний розв'язок:

$$U_r(t) = C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= e^{\beta t} & \varphi_1 &= e^{-\beta t} \\ v_0 &= U_\beta'|_{t=\ln a} & v_1 &= U_\beta'|_{t=\ln b} \end{aligned}$$

3.1.1 Перевірка умов на неособливість

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 \\ \varphi'_0 & \varphi'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\beta t} & e^{-\beta t} \\ \beta e^{\beta t} & -\beta e^{-\beta t} \end{vmatrix} = -\beta - \beta = -2\beta \neq 0$$

3.1.2 Побудова ФБСР крайової задачі

$$\begin{aligned} v_0[\varphi_0] &= \varphi'_0 \Big|_{t=\ln a} = \beta a^\beta & v_1[\varphi_0] &= \varphi'_0 \Big|_{t=\ln b} = \beta b^\beta \\ v_0[\varphi_1] &= \varphi'_1 \Big|_{t=\ln a} = -\beta a^{-\beta} & v_1[\varphi_1] &= \varphi'_1 \Big|_{t=\ln b} = -\beta b^{-\beta} \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_0[\varphi_0] & v_1[\varphi_0] \\ v_0[\varphi_1] & v_1[\varphi_1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta a^\beta & \beta b^\beta \\ -\beta a^{-\beta} & -\beta b^{-\beta} \end{vmatrix} = -\beta^2 a^\beta b^{-\beta} + \beta^2 a^{-\beta} b^\beta \neq 0$$

$$\psi_0 : \begin{cases} \psi_0'' - \beta^2 \psi_0 = 0 \\ \psi'_0 \Big|_{\ln a} = 1, \quad \psi'_0 \Big|_{\ln b} = 0 \end{cases}$$

$$\psi_0 = C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t}$$

$$\psi'_0 = \beta C_0 e^{\beta t} - \beta C_1 e^{-\beta t}$$

$$\psi'_0 \Big|_{\ln b} = \beta C_0 e^{\beta \ln b} - \beta C_1 e^{-\beta \ln b} = 0$$

$$C_1 = C_0 b^{2\beta}$$

$$\begin{aligned}
\psi'_0 \Big|_{\ln a} &= \beta C_0 e^{\beta \ln a} - \beta C_0 b^{2\beta} e^{-\beta \ln a} = 1 \\
&\beta C_0 a^\beta - \beta C_0 b^{2\beta} a^{-\beta} = 1 \\
&\beta C_0 a^{-\beta} (a^{2\beta} - b^{2\beta}) = 1 \\
&C_0 = \frac{a^\beta}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})}, \quad C_1 = \frac{a^\beta b^{2\beta}}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} \\
\psi_0 &= \frac{a^\beta e^{\beta t} + a^\beta b^{2\beta} e^{-\beta t}}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} = \frac{a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

$$\psi_1 : \begin{cases} \psi_1'' - \beta^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_1' \Big|_{\ln a} = 0, \quad \psi_1' \Big|_{\ln b} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= C_0 e^{\beta t} + C_1 e^{-\beta t} \\
\psi_1' &= \beta C_0 e^{\beta t} - \beta C_1 e^{-\beta t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1' \Big|_{\ln a} &= \beta C_0 e^{\beta \ln a} - \beta C_1 e^{-\beta \ln a} = 0 \\
&C_1 = C_0 a^{2\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1' \Big|_{\ln b} &= \beta C_0 e^{\beta \ln b} - \beta C_0 a^{2\beta} e^{-\beta \ln b} = 1 \\
&\beta C_0 b^{-\beta} (b^{2\beta} - a^{2\beta}) = 1 \\
&C_0 = \frac{b^\beta}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}, \quad C_1 = \frac{b^\beta a^{2\beta}}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \\
\psi_1 &= \frac{b^\beta e^{\beta t} + b^\beta a^{2\beta} e^{-\beta t}}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} = \frac{b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

3.1.3 Фундаментальна функція і функція Грина

Запишемо фундаментальну функцію для нашої задачі - вона має табличний вигляд^[1]:

$$\begin{aligned} W'' - \beta W &= f & \Phi(t, \xi) &= -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta|t-\xi|} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \xi) &= \frac{1}{2} e^{-\beta|t-\xi|} \operatorname{sgn}(t - \xi) \end{aligned}$$

Запишем функцію Грина

$$G(t, \xi) = \Phi(t, \xi) - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(t) v_i[\Phi(t, \xi)] \quad (3.6)$$

$$v_0[\Phi] = \Phi' \Big|_{\ln a} = -\frac{1}{2} e^{-\beta|\ln a - \xi|}$$

$$v_1[\Phi] = \Phi' \Big|_{\ln b} = \frac{1}{2} e^{-\beta|\ln b - \xi|}$$

$$G(t, \xi) = -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta|t-\xi|} + \frac{e^{-\beta|\ln a - \xi|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{2\beta (a^{2\beta} - b^{2\beta})} - \frac{e^{-\beta|\ln b - \xi|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{2\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}$$

3.2 Побудова розв'язку розривної крайової задачі

Скористаємося формулою (3.2)

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = -\frac{e^{-\beta|t-\xi|}}{2} \operatorname{sgn}(t-\xi) - \frac{e^{-\beta|\ln a - \xi|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{2 (a^{2\beta} - b^{2\beta})} - \frac{e^{-\beta|\ln b - \xi|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{2 (b^{2\beta} - a^{2\beta})}$$

Тоді розривний розв'язок має наступний вигляд:

$$U_r = -\frac{\chi_\beta}{2} \left(e^{-\beta|t-\ln c|} \operatorname{sgn}(t - \ln c) + \frac{e^{-\beta|\ln a - \ln c|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \right.$$

$$+ \frac{e^{-\beta|\ln b - \ln c|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \Big)$$

3.3 Обернене перетворення

Повернемося до змінної r (2.5)

$$U_\beta = U_n + U_r = \frac{p_\beta}{G} \left(\frac{b^{\beta+1} (e^{\beta t} + a^{2\beta} e^{-\beta t})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \right) - \frac{\chi_\beta}{2} \left(e^{-\beta|t - \ln c|} \operatorname{sgn}(t - c) + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\beta|\ln a - \ln c|} a^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta|\ln b - \ln c|} b^\beta e^{-\beta t} (e^{2\beta t} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right)$$

Повертаємося до змінної $t = \ln r$, $U_\beta = W_\beta$ та отримуємо розв'язок крайової задачі у просторі трансформант:

$$W_\beta = \frac{p_\beta}{G} \left(\frac{b^{\beta+1} (r^\beta + a^{2\beta} r^{-\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})} \right) - \frac{\chi_\beta}{2} \left(e^{-\beta|\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right)$$

$$p_\beta = \int_0^\alpha p(\xi) \sin \beta \xi \, d\xi, \quad \beta = \frac{\pi k}{\alpha}$$

$$\chi_\beta = \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi \, d\xi$$

Повернемося до простору оригіналів, використовуючи обернене перетворення (2.3). Остаточна функція переміщення вихідної крайової задачі має наступний вигляд:

$$W = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{G} \int_0^\alpha p(\xi) \sin \beta \xi \, d\xi \cdot \Psi_0 - \frac{1}{2} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi \, d\xi \cdot \Psi_1 \right) \sin \beta \varphi \quad (3.7)$$

$$\text{де } \Psi_0 = \frac{b^{\beta+1} (r^\beta + a^{2\beta} r^{-\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})},$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & e^{-\beta |\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) + \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \\ & + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \end{aligned}$$

РОЗДІЛ 4

ВІДОКРЕМЛЕННЯ ОСОБЛИВОСТІ У СИНГУЛЯРНІЙ ЧАСТИНІ ЯДРА

Після отримання функції переміщення, що містить невідому функцію $\chi(\xi)$ нам необхідно знайти значення самої невідомої функції. Для цього нам необхідно буде відокремити особливість. Тому, потрібно буде здійснити декілька перетворень. Перепишемо рівнянням (3.7):

$$W = \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{G} \int_0^{\alpha} p(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi_0 - \frac{1}{2} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sin \beta \xi d\xi \cdot \Psi_1 \right) \sin \beta \varphi$$

$$\text{де } \Psi_0 = \frac{b^{\beta+1} (r^{\beta} + a^{2\beta} r^{-\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})},$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & e^{-\beta |\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) + \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^{\beta} r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \\ & + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^{\beta} r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \end{aligned}$$

4.1 Тригонометрична заміна

Для подальшого опрацювання зробимо тригонометричну заміну:

$$\sin \beta \xi \cdot \sin \beta \varphi = \frac{\cos \beta(\xi - \varphi)}{2} - \frac{\cos \beta(\xi + \varphi)}{2}$$

Також скористаємося вже обчисленими рядами з посібнику^[4]:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} \cos kx = \frac{\sinh t}{\cosh t - \cos x} \quad [t > 0] \quad (4.1)$$

$$e^{-kt} = e^{-\frac{\pi k}{\alpha} |\ln r - \ln c|}$$

$$\cos kx = \cos k \frac{\pi}{\alpha} (\xi \mp \varphi)$$

$$t = \frac{\pi}{\alpha} |\ln r - \ln c| \quad x = \frac{\pi}{\alpha} (\xi \mp \varphi)$$

Винесемо інтегрування з суми та підставимо тригонометричну заміну:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{G\alpha} \int_0^\alpha p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) \cdot \Psi_0 d\xi - \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) \cdot \Psi_1 d\xi \end{aligned}$$

Де друга частина може бути записана таким чином:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) \cdot \Psi_1 d\xi = \\ & = - \frac{1}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos \beta(\xi - \varphi) \Psi_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \cos \beta(\xi + \varphi) \Psi_1 \right) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta(\xi \mp \varphi) \Psi_1 &= e^{-\beta |\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) \cos \beta(\xi \mp \varphi) + \\ &+ \left(\frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \right) \cos \beta(\xi \mp \varphi) \end{aligned}$$

Підставимо ряд з (4.1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta |\ln r - \ln c|} \operatorname{sgn}(\ln r - \ln c) \cos \beta(\xi - \varphi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh t}{\cosh t - \cos x} - 1 \right) \\ - \frac{1}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{\alpha} |\ln r - \ln c|}{\cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln r - \ln c| - \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi - \varphi)} - 1 \right) &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{11} \cdot \cos \beta(\xi - \varphi) - \\ - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{\alpha} |\ln r - \ln c|}{\cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln r - \ln c| - \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi + \varphi)} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{11} \cdot \cos \beta(\xi + \varphi) \right) &d\xi \end{aligned}$$

Підставимо це назад, у нашу функцію переміщення:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{G\alpha} \int_0^\alpha p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_0 (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) d\xi - \frac{1}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \Psi_1 d\xi \\
 \Psi_0 &= \frac{b^{\beta+1} (r^\beta + a^{2\beta} r^{-\beta})}{\beta (b^{2\beta} - a^{2\beta})}, \\
 \Psi_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}|}{\cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}| - \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi - \varphi)} - 1 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{11} \cdot \cos \beta(\xi - \varphi) - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}|}{\cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}| - \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi + \varphi)} - 1 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{11} \cdot (\cos \beta(\xi + \varphi)) \\
 \Psi_{11} &= \frac{e^{-\beta(\ln c - \ln a)} a^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln b - \ln c)} b^\beta r^{-\beta} (r^{2\beta} + a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}}
 \end{aligned}$$

4.2 Сингулярне рівняння

Далі ми скористаємося тим, що берега тріщини вільні від навантажень.

Підставимо наші значення у граничну умову $\tau_{rz}|_{r=c-0} = 0$:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_0 (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) d\xi - \frac{G}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \Psi'_1 d\xi = 0$$

Отримуємо наступне сингулярне рівняння:

$$\frac{G}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \Psi'_1 d\xi = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_0 (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) d\xi$$

$$\Psi'_0 = \frac{b^{\beta+1} r^{-\beta-1} (r^{2\beta} - a^{2\beta})}{(b^{2\beta} - a^{2\beta})},$$

$$\begin{aligned}
 \Psi'_1 &= \frac{\pi \operatorname{sgn}(\ln \frac{r}{c}) (1 - \cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}| \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi - \varphi))}{2r\alpha (\cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}| - \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi - \varphi))^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi - \varphi) - \\
 &\quad - \frac{\pi \operatorname{sgn}(\ln \frac{r}{c}) (1 - \cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}| \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi + \varphi))}{2r\alpha (\cosh \frac{\pi}{\alpha} |\ln \frac{r}{c}| - \cos \frac{\pi}{\alpha} (\xi + \varphi))^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi + \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\Psi'_{11} = \frac{e^{-\beta(\ln \frac{c}{a})} \beta a^\beta r^{-\beta-1} (r^{2\beta} - b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln \frac{b}{c})} \beta b^\beta r^{-\beta-1} (r^{2\beta} - a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}}$$

4.3 Виділення особливості

Тепер підставляємо $r = c - 0$ і виділяємо особливість:

$$\begin{aligned} & \frac{G}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \Psi'_1 \left(\frac{\alpha}{2c} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|} + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi - \varphi) - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{2c(\xi + \varphi)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi + \varphi) \right) d\xi = \\ & = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_0 (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) d\xi \\ \Psi'_0 & = \frac{b^{\beta+1} c^{-\beta-1} (c^{2\beta} - a^{2\beta})}{(b^{2\beta} - a^{2\beta})}, \\ \Psi'_{11} & = \frac{e^{-\beta(\ln \frac{c}{a})} \beta a^\beta c^{-\beta-1} (c^{2\beta} - b^{2\beta})}{a^{2\beta} - b^{2\beta}} + \frac{e^{-\beta(\ln \frac{b}{c})} \beta b^\beta c^{-\beta-1} (c^{2\beta} - a^{2\beta})}{b^{2\beta} - a^{2\beta}} \end{aligned}$$

Таким чином наша особливість у сингулярній частині ядра дорівнює

$$\frac{\alpha}{2c} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|}$$

РОЗДІЛ 5

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо отримане у попередньому розділі сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР) відносно невідомого стрибка переміщення на берегах тріщини $\chi(\xi)$:

$$\begin{aligned} & \frac{G}{2\alpha} \int_{w_0}^{w_1} \chi_n U_n(\xi) \Psi'_1 \left(\frac{\alpha}{2c} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|} + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi - \varphi) - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha}{2c(\xi + \varphi)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi + \varphi) \right) d\xi = \\ & = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_0 (\cos \beta(\xi - \varphi) - \cos \beta(\xi + \varphi)) d\xi \end{aligned}$$

5.1 Сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР)

СІДР будемо розв'язувати методом ортогональних многочленів^[5], згідно з яким невідома функція $\chi(\xi)$ розвивається у ряд за поліномами Чебишева II роду:

$$\chi(\xi) = \sqrt{1 - \xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n U_n(\xi) \quad (5.1)$$

Виконаємо заміну границь інтегрування щоб перейти до проміжку $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \text{Границі інтегрування: } w_0' &= \frac{2 \cdot w_0 - (w_0 + w_1)}{w_1 - w_0} \rightarrow -1 \\ w_1' &= \frac{2 \cdot w_1 - (w_0 + w_1)}{w_1 - w_0} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Тоді, змінні приймають вигляд:

$$\xi' = \frac{2\xi - (w_0 + w_1)}{w_1 - w_0}$$

$$\varphi' = \frac{2\varphi - (w_0 + w_1)}{w_1 - w_0}$$

Отримуємо наше сингулярне інтегро-диференціальне рівняння:

$$\frac{G}{4c} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{-1}^1 \chi(\xi') \ln \frac{1}{|\xi' - \varphi'|} d\xi' + \frac{G}{2\alpha} \int_{-1}^1 \chi(\xi') \cdot g(\xi', \varphi') d\xi' = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(\xi', \varphi') d\xi' \quad (5.2)$$

$$g(\xi', \varphi') = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi' - \varphi') - \frac{\alpha}{2c(\xi' + \varphi')^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_{11} \cos \beta(\xi' + \varphi')$$

$$f(\xi', \varphi') = p(\xi) \sum_{k=1}^{\infty} \Psi'_0 (\cos \beta(\xi' - \varphi') - \cos \beta(\xi' + \varphi'))$$

Застосуємо стандартну схему методу ортогональних многочленів, і зведемо розв'язання СІДР до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

5.2 Безкінечна система лінійних алгебраїчних рівнянь (БСЛАР)

Підставимо (5.1) до рівняння з виділеною особливістю і змінимо порядок сумування і інтегрування:

$$\frac{G}{4c} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \frac{\partial^2}{\partial \varphi'^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi' - \varphi'|} \sqrt{1 - \xi'^2} U_n(\xi') d\xi' +$$

$$+ \frac{G}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi'^2} U_n(\xi') \cdot g(\xi', \varphi') d\xi' = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(\xi', \varphi') d\xi'$$

Використаємо спектральне співвідношення зі [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi'^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi' - \varphi'|} \sqrt{1 - \xi'^2} U_n(\xi') d\xi' = -\pi(n+1)U_n(\varphi'), \quad \mu_n = -\pi(n+1)$$

Отримаємо:

$$\frac{G}{4c} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \mu_n U_n(\varphi') + \frac{G}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi'^2} U_n(\xi') \cdot g(\xi', \varphi') d\xi' = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\xi', \varphi') d\xi'$$

Домножимо обидві частини на $\sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi')$ і проінтегруємо по $[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} & \frac{G}{4c} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi') \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \mu_n U_n(\varphi') d\varphi' + \\ & + \frac{G}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi') \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi'^2} U_n(\xi') \cdot g(\xi', \varphi') d\xi' d\varphi' = \\ & = \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi') \int_0^{\alpha} f(\xi', \varphi') d\xi' d\varphi' \end{aligned}$$

Скористаємося ортогональністю многочленів Чебишева 2-го рода:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \mu_n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varphi'^2} U_n(\varphi') U_m(\varphi') d\varphi' = \chi_m \mu_m \|U_m\|^2$$

$$\begin{aligned} & \frac{G}{4c} \chi_m \mu_m \|U_m\|^2 + \\ & + \frac{G}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi') \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi'^2} U_n(\xi') \cdot g(\xi', \varphi') d\xi' d\varphi' = \\ & = \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi') \int_0^{\alpha} f(\xi', \varphi') d\xi' d\varphi' \end{aligned}$$

Запишемо систему в наступному скороченому вигляді:

$$\frac{G}{4c} \chi_m + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n D_{nm} = f_m \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} D_{nm} &= \frac{1}{\mu_m \|U_m\|^2} \frac{G}{2\alpha} \int_{-1}^1 d\varphi' \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi'^2} \sqrt{1 - \varphi'^2} U_n(\xi') U_m(\varphi') \cdot g(\xi', \varphi') d\xi' \\ f_m &= \frac{1}{\mu_m \|U_m\|^2} \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 d\varphi' \int_0^{\alpha} f(\xi', \varphi') \sqrt{1 - \varphi'^2} U_m(\varphi') d\xi' \end{aligned}$$

В даному випадку, (5.3) є безкінечною системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Її можна розв'язати методом редукції, алгоритм якого буде представлений нижче. Його доведення представлено у роботі [3].

Представимо (5.3) у матричній формі:

$$(I + D) \chi = f$$

$$I = \{\delta_{kj}\}_{k,j=0}^{\infty}, \quad D = \{d_{kj}\}_{k,j=0}^{\infty}, \quad \chi = \{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \text{де}$$

δ_{kj} - символ Кронекеру

Таким чином матриці заповнюються коефіцієнтами а потім підставляються у початкове рівняння. Після проведення всіх обчислень і знаходження (5.1) - значення невідомої функції $\chi(\xi)$ можна вважати знайденим.

РОЗДІЛ 6

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЕНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ

Великий інтерес для цієї задачі представляють собою коефіцієнти інтенсивності напружень. Для обчислення КІН функції напруження на $(w_0 < \varphi < w_1)$, $r = c$ запишемо зображення:

$$\sigma_z(c, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{w_0}^{w_1} \chi(\xi) \frac{1}{(\xi - \varphi)^2} d\xi + \sigma_z^0(c, \varphi)$$

Після заміни змінних $\left(\xi' = \frac{2\xi - (w_0 + w_1)}{w_1 - w_0}, \varphi' = \frac{2\varphi - (w_0 + w_1)}{w_1 - w_0}\right)$, функція напруження набуває виду:

$$\sigma_z(c, \varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{w_1 - w_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|} \chi \xi d\xi + \sigma_z^0(c, \varphi),$$

де $\sigma_z^0(c, \varphi)$ - відома регулярна функція

$$\sigma_z(c, \varphi') = \frac{1}{\pi} \frac{2}{w_1 - w_0} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi + \sigma_z^0(c, \varphi)$$

КІН обчислюється за формулою:

$$K_{\pm} = \lim_{\varphi \rightarrow \pm 1} \sqrt{\pi(w_1 - w_0)(\pm\varphi - 1)} \sigma_z(c, \varphi)$$

Використаємо спектральне співвідношення:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi = \\ & = \frac{|\varphi| U_m(\varphi)}{\sqrt{\varphi^2 - 1}} + \sqrt{\varphi^2 - 1} U'_m(\varphi) \cdot \operatorname{sgn}(\varphi) - 0.5(m + 1) U_m(\varphi), \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

Тоді, отримуємо:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varphi \rightarrow \pm 1} \sqrt{\pi(w_1 - w_0)(\pm\varphi - 1)} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\xi - \varphi|} \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi) d\xi \right) = \\ & = \frac{\sqrt{\pi(w_1 - w_0)}(\pm 1)^n (n + 1)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо формули знаходження КІН:

$$\begin{aligned} K_- &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k \frac{\sqrt{\pi(w_1 - w_0)}(\pm 1)^n (n + 1)}{\sqrt{2}} \\ K_+ &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k \frac{\sqrt{\pi(w_1 - w_0)}(n + 1)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

В нашому випадку, візьмемо параметри $a = 5, b = 15, w_0 = \frac{\pi}{4}, w_1 = \frac{\pi}{2}, G = 79.3, \alpha = \pi, p(\varphi) = \varphi^2$. Коефіцієнти дорівнюють:

$$|K_-| = 0.10968746020075706$$

$$|K_+| = 0.20221014428643194$$

РОЗДІЛ 7

ГРАФІЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Побудуємо графіки, отримані у результаті дослідження переміщення та напруження при зміні крайових умов.

Експеримент 1. Переміщення W , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi, \chi(\varphi) = 0)$

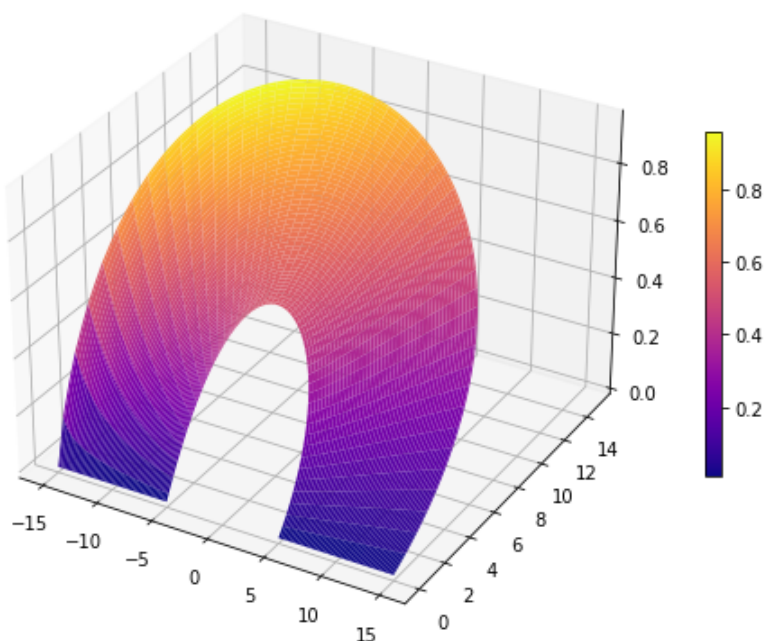


Рис. 7.1. $p(\varphi) = \varphi^2$

Отримуємо тривимірний графік переміщення, який змінюється під впливом прикладеної напруги. Можна побачити, що переміщення збільшується к зовнішньому краю сегменту. Форма сегменту змінюється в залежності від виду напруги, прикладеної до сегменту.

Експеримент 2. Переміщення W , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

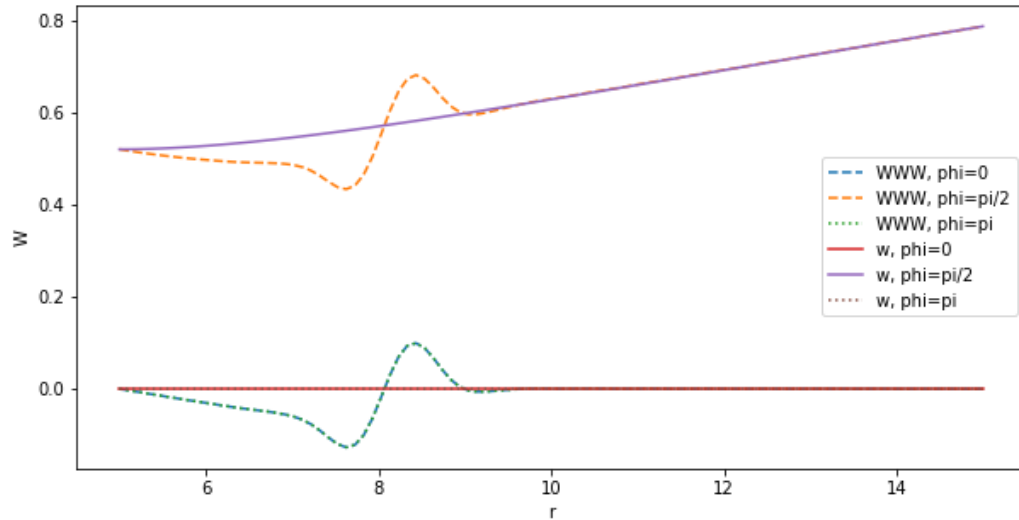


Рис. 7.2. $p(\varphi) = \varphi^2$

Проілюструємо, як переміщення змінюється при різних значеннях кута сегменту. Можна побачити як виконуються крайові умови при $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$ - $W = 0$. Зауважимо, що лінія пунктиром означає функцію зі стрибком переміщення - він якраз проходить при $(r = c = 8)$

Експеримент 3. Переміщення W , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

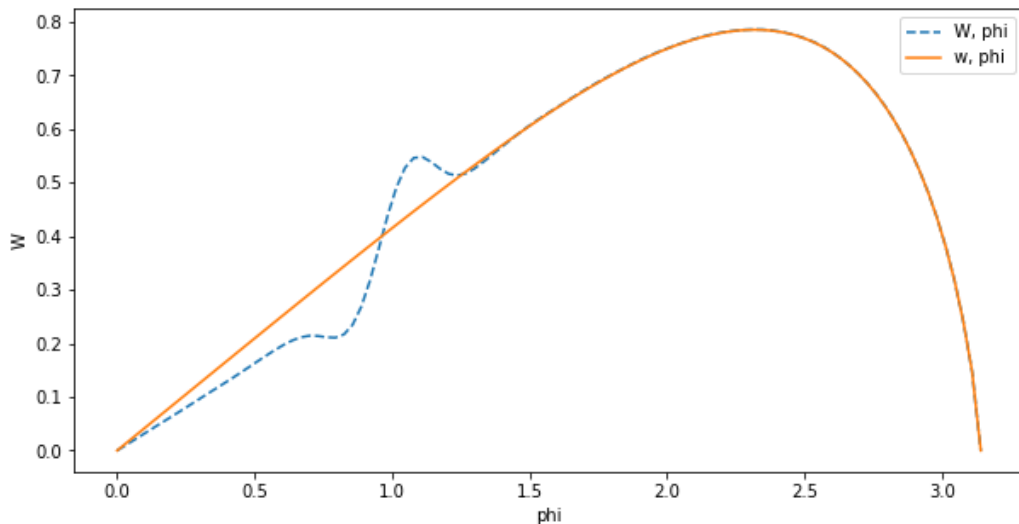


Рис. 7.3. $p(\varphi) = \varphi^2$

Графік задовольняє крайовим умовам ($W = 0, r = a, b$). Форма, яку приймає графік, співпадає з формою отриманою у експерименті 1. Графік позначений пунктиром відповідає переміщенню з функцією стрибка - можна побачити, що стрибок проходить при $(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2})$

Експеримент 4. Напруження τ_{rz} , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi)$

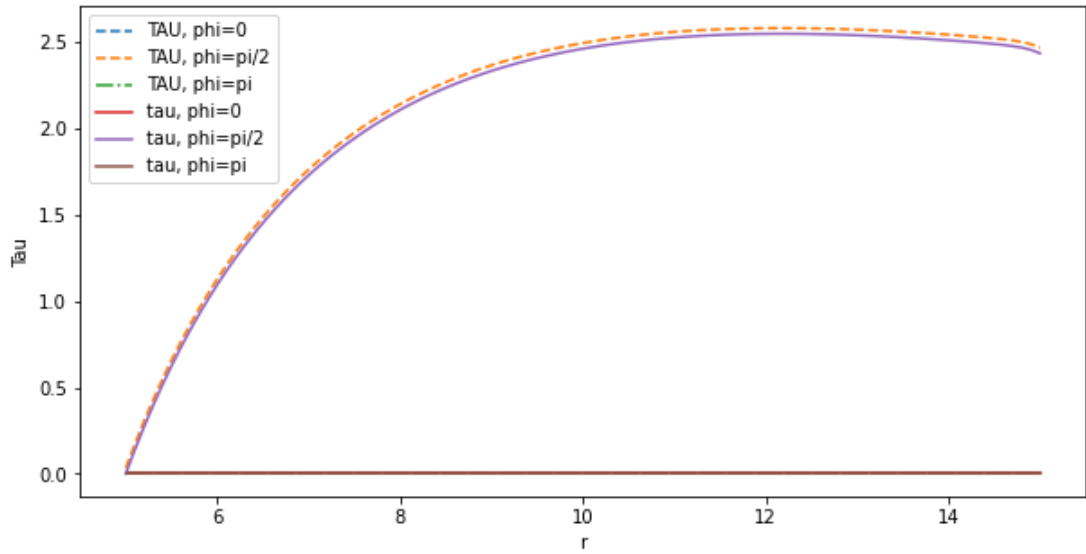


Рис. 7.4. $p(\varphi) = \varphi^2$

Розглянемо як змінюється навантаження при різних значення кута φ . Виконуються крайові умови якщо $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$

Експеримент 5. Стрибок переміщення χ_ξ , якщо $(a = 5, b = 15, G = 79.3, \alpha = \pi, 5 < r < 15)$

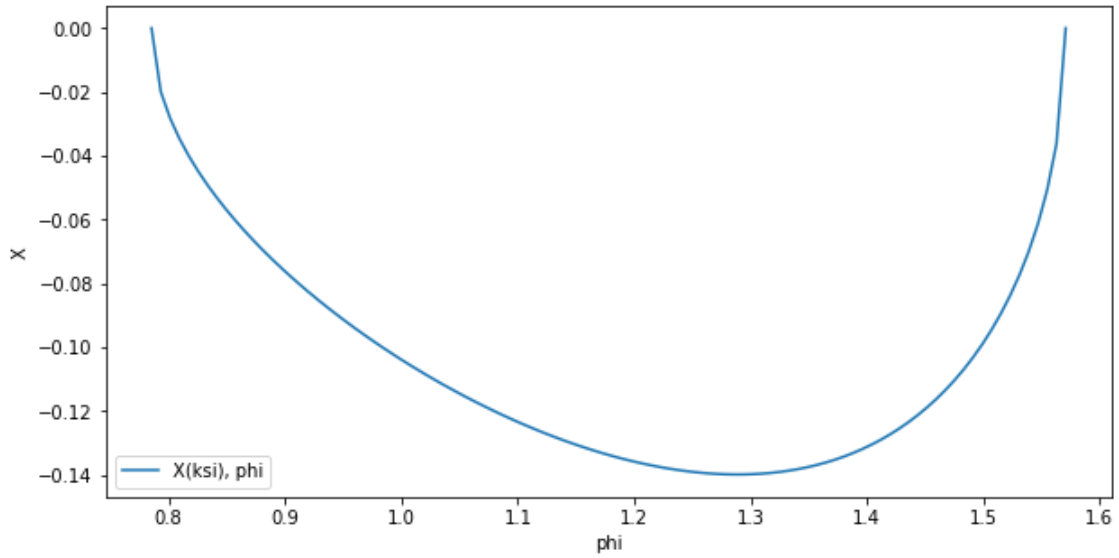


Рис. 7.5. $p(\varphi) = \varphi^2$

Таким чином ми дослідили залежність основних функцій від змінних, та побудували графіки, ілюструючи наші експерименти.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі було розглянуто антиплоську задачу теорії пружності для сегменту кільця з поздовжньою тріщиною. Отримано формули для переміщення та напружень, що містять невідому функцію стрибка переміщень на тріщині. Сформульовано сингулярне інтегро-диференційне рівняння для знаходження цієї невідомої функції. Виділена особливість у сингулярній частині рівняння. Розв'язок СІДР був знайдений за допомогою метода ортогональних поліномів, а розв'язок БСЛАР за допомогою методу редукції. Досліджено зміну переміщень та напружень у середині сегменту кільця та отримані графічні результати. Отримані значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень: учбовий посібник / Одеса: Астропринт, 2009. - 183 с.
2. Вайсфельд Н.Д., Журавльова З.Ю., Реут В.В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги / Монографія. Одеса, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, 2019. – 160 с
3. Popov, G., Vaysfel'd, N. (2009). The Stress Concentration in the Neighborhood of the Spherical Crack Inside the Infinite Elastic Cone. In: Adamyan, V.M., et al. Modern Analysis and Applications. Operator Theory: Advances and Applications, vol 191. Birkhäuser Basel. p. 173-186
4. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products, 6th edition. Academic Press, 2000. 1163 p.
5. Попов Г.Я., Реут В.В., Моїсеєв М.Г., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів: навчальний посібник / Одеса: Астропринт, 2010. - 120 с.