Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки

(повне найменування інституту/факультету)

Кафедра методів математичної фізики

(повна назва кафедри)

Дипломна робота

бакалавра

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: **«**Антиплоска задача для чверті простору з дефектом**»**

«The anti-plane problem for a quarter of a plane with a defect»

Виконав: студент денної форми навчання
напряму підготовки 6.040301 Прикладна математика
Колаєв Дем’ян Борисович
Керівник к.фіз.-мат. н. Мойсеєнок О.П.________________
Рецензент к.фіз.-мат. н. Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№_____ від _________________ р.

Захищено на засіданні ЕК №________
протокол №____ від _____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри

_________ ____________________
(підпис)

Голова ЕК

__________ ______________________
(підпис)

Одеса – 2017

ЗМІСТ

ВСТУП

Процеси теплопередачі грають важливу роль як в природі, так і в сучасній техніці. Дослідження показують, що теплопередача є складним процесом. При вивченні цей процес розділяють на прості явища. Окремим випадком є теплопровідність - перенесення тепла при безпосередньому зіткненні тіл (або частин одного тіла) з різною температурою.

У роботі розглядаються задачі стаціонарної таплопровідності для чверті площини. Метою роботи є дослідження розподілу температури у площині у випадку без дефектів та за наявності прямолінійного дефекту у прямокутній системі координат та криволінійного у полярній. Дослідження проводитимуться за допомогою методу інтегральних перетворень [2], який дозволяє звести рівняння в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння, або в загальному випадку зменшити в рівнянні число змінних, за якими беруться частинні похідні.

Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до них, списку використаних джерел.

У першому розділі розглядається задача теплопровідності для чверті площини з прямолінійним дефектом. Використовується інтегральне перетворення Фур’є та викладається розв’язання неперервної задачі і розривної.

У другому розділі розглядається задача теплопровідності для чверті площини з криволінійним дефектом. Використовується інтегральне перетворення Мелліна та викладається розв’язання неперервної задачі і розривної.

У третьому розділі викладаються результати чисельних досліджень та графіки залежності розподілу температури у площині від розташування дефектів та температури що подається.

Для розв’язання задач поданих у цій роботі використовувався метод інтегральних перетворень, який є одним з ефективних засобів розв’язання крайових задач та початково-крайових задач математичної фізики, що описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних.

Метод інтегральних перетворень базується на взаємно обернених формулах:

$$f_\lambda = \int_{a_0}^{a_1} f(x)K(x,\lambda)\,dx,$$

$$f(x) = \int_{l} f_\lambda R(x,\lambda)\,d\sigma(x),$$

Перша з яких визначає трансформанту f_λ функції $f(x)$, що задана на інтервалі $a_0 < x < a_1$, а друга відновлює оригінал функції $f(x)$ за його трансформантою. Функції $K(x,\lambda)$ та $R(x,\lambda)$ ядра прямого та оберненого перетворення. Інтегрування в другій формулі проводиться по контуру в комплексній площині у відповідності з тим, що λ може приймати комплексні значення. Ядро інтегрального перетворення $K(x,\lambda)$ повинно бути таким, щоб вихідна двовимірна задача трансформувалась до одновимірної крайової задачі.

Звичайно, роз’язання задачі методом інтегральних перетворень розділяється на три етапи.

Перший етап це підбір інтегрального перетворення та зведення вихідної крайової задачі до одномірної.

Другий етап. Розв’язання задачі у трансформантах.

Третій етап. Обернення інтегрального перетворення.

Для випадку задачі з одним дефектом у точці $\mathrm{x} = \mathrm{a}$ застосувавши відповідне інтегральне перетворення інтегрування по частинам проводиться не на всьому інтервалі, а після попереднього розбиття інтервала інтегрування на два: (a_0, a) та (a, a_1). Розв'язавши задачу у трансформантах і використавши формулу обернення, отримаємо уявлення шуканої функції через невідому функцію стрибка. Далі необхідно виділити нерівномірно збіжні інтеграли та ряди, що містяться в цьому уявленні, та отримати для них замкнуті відношення, після чого отримати вираз для похідної. Послідуюча підстановка здобутої похідної в ще нереалізовану умову на дефекті приведе до інтегрального(як правило, сингулярного) рівняння для визначення невідомої функції стрибка.

ВИСНОВОК

В дипломній роботі була розглянута математична постановка задач стаціонарної теплопровідності для чверті площини з дефектами різної геометрії.

За допомогою методу інтегральних перетворень було знайдено їх розв’язок як суперпозицію неперервних задач та розривних та виконано чисельні дослідження залежності росподілення температури в області з різними видами дефектів, їх розташувань та різним навантаженням.

На отриманих графіках наочно видно як змінюється температура в області як для випадку з прямолінійним дефектом так і з криволінійним дефектом та без дефектів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональних многочленів : навчальний посібник / Г. Я. Попов, В. В. Реут, М. Г. Моісеєв, Н. Д. Вайсфельд. —Одеса:Астропринт,2010. —120с.

2. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. : А. П. учбовий посібник / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд. — Одеса:Астропринт, 1999.

3. Снеддон В. И. Перетворення Фур'є. —М.:Изд-во Иностранной литературы, 1955. —668 с.

4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б. Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. —М.:Высшая школа, 1970. —710 с.

5. Двайт Г. Б.Таблицы интегралов и другие математические формулы / Герберт Двайт. —Москва:Наука,1966. —228с.

6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3 т. Т.1. Элементарные функции. —2-е изд., исправ. —М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. —632 с.

7. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. —М.:Наука, 1974. —542с.

ДОДАТОК А

Обчислення для задачі з криволінійним дефектом

```
function kriv
Inf = 5; % количество ур. в редуцированной системе
a  = 2;% разрыв

[f,massPhi]=count(Inf);%massPhi-коэф.Хи из разложения в ряд неизвестной функции
скачка
yy=pi/3;
y=-0.99:0.01:0.99
nu=0:0.05:10;
%[nu,yy]=meshgrid(Nu,Y);
fn = @(r)1./r.^2; %функция температуры f(nu)
In1=zeros(size(nu,2),size(yy));% результирующие значения



    for n=1:size(nu,2)
        % Непрерывная часть
        if(nu(1,n)==a)
            integ2 = NaN;
        end
        if(nu(1,n)~=a)
        a1=1;
        a2=3;
        n2 = 300; % шаг интегрирования
        h2=(a2-a1)/n2;
        if(nu(1,n)>a1)
            fu5 = fn(a1).*fun((a1)./nu(1,n),yy);
        end
        if(nu(1,n)<a1)
            fu5 = (1./(a1).^2).*fn(a1).*fun(nu(1,n)./(a1),yy);
        end
        integ2 = fu5;
           for p=1:1:((n2/2)-1)
            x3=a1+2*h2*p;
            if(nu(1,n)>x3)
                fu6=(2./(pi.*nu(1,n))).*fn(x3).*(fun(x3./nu(1,n),yy));
                fu7=(2./(pi.*nu(1,n))).*fn(x3+h2).*(fun((x3+h2)./nu(1,n),yy));
            end
            if(nu(1,n)<x3)

                  fu6=((2.*nu(1,n))./(pi)).*(1./(x3).^2).*fn(x3).*(fun(nu(1,n)./
                  x3,yy));

                  fu7=((2.*nu(1,n))./(pi)).*(1./(x3+h2).^2).*fn(x3+h2).*(fun(nu(
                  1,n)./(x3+h2),yy));
            end
            integ2 = integ2 + 2*fu6+4*fu7;
           end

        if(nu(1,n)>a)  % r > R
            % Разрывная часть
        b1=-0.7;
        b2=1;
        nn = 300; % шаг интегрирования
        h=(b2-b1)/nn;
        sum=0;
```

```
 for z=1:Inf
 sum = sum+massPhi(z).*chebyshev2(z-1,b1).*sqrt(1-b1.*b1);

 end
phi=sum;


fu2=fu(a./nu(1,n),pi./2-yy+b1)+fu(a./nu(1,n),-
pi./2+yy+b1)+fu(a./nu(1,n),pi./2+yy-b1)+fu(a./nu(1,n),-pi./2+yy+b1);
integ1 = fu2*phi;
sum1 = 0;
sum2 = 0;
for j=1:1:((nn/2)-1)
    x=b1+2*h*j;
    if(yy>x)
        fu3=fu(a./nu(1,n),pi./2-yy+x)+fu(a./nu(1,n),-pi./2+yy+x);
        fu4=fu(a./nu(1,n),pi./2-yy+x+h)+fu(a./nu(1,n),-pi./2+yy+x+h);
    end
    if(yy<x)
        fu3=fu(a./nu(1,n),pi./2+yy-x)+fu(a./nu(1,n),-pi./2+yy+x);
        fu4=fu(a./nu(1,n),pi./2+yy-(x+h))+fu(a./nu(1,n),-pi./2+yy+x+h);
    end
    for zz=1:Inf
    sum1 = sum1+massPhi(zz).*chebyshev2(zz-1,x).*sqrt(1-x.*x);
    sum2 = sum2+massPhi(zz).*chebyshev2(zz-1,x+h).*sqrt(1-(x+h).*(x+h));
    end
    phi1=sum1;
    phi2=sum2;
    integ1 = integ1 + 2*fu3*phi1+4*fu4*phi2;
end
integ1 = h*integ1/3;
end


if(nu(1,n)<a) % r < R
b1=-1;
b2=1;
nn = 300; % шаг интегрирования
h=(b2-b1)/nn;
sum=0;
 for z=1:Inf
 sum = sum+massPhi(z).*chebyshev2(z-1,b1).*sqrt(1-b1.*b1);

 end
phi=sum;


fu2=fu(nu(1,n)./a,pi./2-yy+b1)+fu(nu(1,n)./a,-
pi./2+yy+b1)+fu(nu(1,n)./a,pi./2+yy-b1)+fu(nu(1,n)./a,-pi./2+yy+b1);
integ1 = fu2*phi;
sum1 = 0;
sum2 = 0;
for j=1:1:((nn/2)-1)
    x=b1+2*h*j;
    if(yy>x)
        fu3=fu(nu(1,n)./a,pi./2-yy+x)+fu(nu(1,n)./a,-pi./2+yy+x);
        fu4=fu(nu(1,n)./a,pi./2-yy+x+h)+fu(nu(1,n)./a,-pi./2+yy+x+h);
    end
    if(yy<x)
        fu3=fu(nu(1,n)./a,pi./2+yy-x)+fu(nu(1,n)./a,-pi./2+yy+x);
```

```
                    fu4=fu(nu(1,n)./a,pi./2+yy-(x+h))+fu(nu(1,n)./a,-pi./2+yy+x+h);
                end
                  for zz=1:Inf
                sum1 = sum1+massPhi(zz).*chebyshev2(zz-1,x).*sqrt(1-x.*x);
                sum2 = sum2+massPhi(zz).*chebyshev2(zz-1,x+h).*sqrt(1-(x+h).*(x+h));
                  end
                phi1=sum1;
                phi2=sum2;
                integ1 = integ1 + 2*fu3*phi1+4*fu4*phi2;
            end
            integ1 = h*integ1/3;
            end %end of second if
            end
             In1(n)=(1/pi)*integ1+h2*(integ2)/3;
        end


Inf=10;
[f1,MassPhi1]=count(Inf);
phi1=zeros(1,size(y,2));
for i=1:size(y,2)
    suma=0;
    for n=1:Inf
        suma=suma+MassPhi1(n)*chebyshev2(n-1,y(i))*sqrt(1-y(i)*y(i));
    end
    phi1(i)=suma;
end
figure(2)
plot(nu,In1,'-');
 xlabel('r');
 ylabel('U(r,pi/6)');


end

function [f,phi]=count(N)%N - число уравнений в редуцированной системе
clc
I=eye(N,N);
f=zeros(N,1);
D=zeros(N,N);
for m=1:N
    f(m)=QuadForm(m-1);
    for n=1:N
        D(m,n)=d(n-1,m-1);
    end
end
IA=(I+D)
phi=IA\f;
for i=1:N
    phi(i)=-phi(i)/pi^2*2/(i);
end
end

function f=QuadForm(m)%Поиск значения интеграла в правой части системы
if m>2
    f=0;
    return;
end
f=0;
N=5;
for i=1:N
```

```
    x=cos(i*pi/(N+1));%корень многочлена Чебышева 2-ого рода
    f=f+funcFm(m,x);
end
f1=f+1;
while abs(f1-f)>0.001
    N=2*N;
    f1=f;
    f=0;
    for i=1:N
        x=cos(i*pi/(N+1));
        f=f+(sin(i*pi/(N+1))^2)*funcFm(m,x);
    end
    f=f*pi/(N+1);% из квадратурной формулы(коэф перед суммой)
end
end

function f = funcFm(m,phi)%правая часть
res= -cos(phi) * atan((0.6e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-
0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) / pi * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.8e1
+ cos(phi) * atan((-0.6e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1
/ 0.2e1) / 0.4e1) / pi * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.8e1 -
0.12e2 * cos(phi) * sin(phi) ^ 2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) /
(0.12e2 * sin(phi) - 0.13e2) + 0.12e2 * cos(phi) / pi / (0.16e2 - 0.16e2 *
sin(phi) ^ 2) / (0.12e2 * sin(phi) - 0.13e2) - 0.2e1 * cos(phi) * atan((-0.6e1 +
0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) *
sin(phi) ^ 2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^
(-0.1e1 / 0.2e1) + 0.2e1 * cos(phi) * atan((-0.6e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1
- sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^
2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) + 0.12e2 * cos(phi) * sin(phi) ^
2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) / (0.12e2 * sin(phi) + 0.13e2) -
0.12e2 * cos(phi) / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) / (0.12e2 * sin(phi) +
0.13e2) + 0.2e1 * cos(phi) * atan((0.6e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi)
^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) * sin(phi) ^ 2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 *
sin(phi) ^ 2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) - 0.2e1 * cos(phi) *
atan((0.6e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) /
0.4e1) / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-
0.1e1 / 0.2e1) + cos(phi) * atan((0.2e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi)
^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) / pi * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 /
0.2e1) / 0.8e1 + cos(phi) * atan((-0.2e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi)
^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) / pi * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 /
0.2e1) / 0.8e1 - 0.4e1 * cos(phi) * sin(phi) ^ 2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 *
sin(phi) ^ 2) / (0.4e1 * sin(phi) - 0.5e1) + 0.4e1 * cos(phi) / pi / (0.16e2 -
0.16e2 * sin(phi) ^ 2) / (0.4e1 * sin(phi) - 0.5e1) - 0.2e1 * cos(phi) * atan((-
0.2e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) *
sin(phi) ^ 2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^
(-0.1e1 / 0.2e1) + 0.2e1 * cos(phi) * atan((-0.2e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1
- sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^
2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) + 0.4e1 * cos(phi) * sin(phi) ^ 2
/ pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) / (0.4e1 * sin(phi) + 0.5e1) - 0.4e1 *
cos(phi) / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) / (0.4e1 * sin(phi) + 0.5e1) +
0.2e1 * cos(phi) * atan((0.2e1 + 0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-
0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) * sin(phi) ^ 2 / pi / (0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) *
(0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) - 0.2e1 * cos(phi) * atan((0.2e1 +
0.4e1 * sin(phi)) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1) / 0.4e1) / pi /
(0.16e2 - 0.16e2 * sin(phi) ^ 2) * (0.1e1 - sin(phi) ^ 2) ^ (-0.1e1 / 0.2e1);
%результат вычисления правой части в интегральном уравнении
f=res*chebyshev2(m,phi);
end

function f=d(m,n)
a = 2;
```

```
N=5;
f=0;
for k=1:N
    xk=cos(k*pi/(N+1));
    for i=1:N
        yi=cos((i-0.001)*pi/(N+1));
        if (xk~=yi)
           func3=@(x,y,m,n)(-1)*(-cos(x - y) / (0.1e1 + cos(x - y)) / 0.2e1 -
sin(x - y) ^ 2 / (0.1e1 + cos(x - y)) ^ 2 / 0.2e1 + (-sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1)
/ (x - y) / 0.4e1 - cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) ^ 2 + 0.2e1 * sin(x /
0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) ^ 3) * (x - y) / sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) -
(cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) / 0.2e1 - sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x
- y) ^ 2) * (x - y) * cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) ^
2 / 0.2e1 + (cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) / 0.2e1 - sin(x / 0.2e1 - y /
0.2e1) / (x - y) ^ 2) / sin(x / 0.2e1 - y /
0.2e1))*chebyshev2(m,y)*chebyshev2(n,x);

        end
        if(xk==yi)
             func3=@(x,y,m,n)(-cos(x - y) / (0.1e1 + cos(x - y)) / 0.2e1 - sin(x
- y) ^ 2 / (0.1e1 + cos(x - y)) ^ 2 / 0.2e1)*chebyshev2(m,y)*chebyshev2(n,x);
        end

           f=f+(sin(k*pi/(N+1))^2)*(sin((i)*pi/(N+1))^2)*func3(xk,yi,m,n);
    end
end

f=f*pi*pi/(N+1)^2; % из квадратурной формулы(коэф перед суммой)
f1=f+1;
while abs(f-f1)>0.001
    f1=f;
    f=0;
    N=N*2;
    for k=1:N
        xk=cos(k*pi/(N+1));
        for i=1:N
          yi=cos((i-0.001)*pi/(N+1));
           if (xk~=yi)
          func3=@(x,y,m,n)(-1)*(-cos(x - y) / (0.1e1 + cos(x - y)) / 0.2e1 -
sin(x - y) ^ 2 / (0.1e1 + cos(x - y)) ^ 2 / 0.2e1 + (-sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1)
/ (x - y) / 0.4e1 - cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) ^ 2 + 0.2e1 * sin(x /
0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) ^ 3) * (x - y) / sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) -
(cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) / 0.2e1 - sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x
- y) ^ 2) * (x - y) * cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / sin(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) ^
2 / 0.2e1 + (cos(x / 0.2e1 - y / 0.2e1) / (x - y) / 0.2e1 - sin(x / 0.2e1 - y /
0.2e1) / (x - y) ^ 2) / sin(x / 0.2e1 - y /
0.2e1))*chebyshev2(m,y)*chebyshev2(n,x);
          end
          if(xk==yi)
        func3=@(x,y,m,n)(-cos(x - y) / (0.1e1 + cos(x - y)) / 0.2e1 - sin(x - y)
^ 2 / (0.1e1 + cos(x - y)) ^ 2 / 0.2e1)*chebyshev2(m,y)*chebyshev2(n,x);
          end

          f=f+(sin(k*pi/(N+1))^2)*(sin((i)*pi/(N+1))^2)*func3(xk,yi,m,n);
        end
    end
    f=f*pi^2/(N+1)^2; % из квадратурной формулы(коэф перед суммой)
end
end

function f=chebyshev2(m,x)%Многочлен Чебышева 2-ого рода
```

```
if m==0
    f=1;
    return
elseif m==1
    f=2.*x;
    return
elseif m>1
    f=2.*x.*chebyshev2(m-1,x)-chebyshev2(m-2,x);
end
end

function f=fu(n,m)
    f=n.*(1-n.*n).*sin(m).*(1./((1+n.*n).^2-4.*n.*n.*(sin(m)).^2));
end


function f=fun(n,m)
    f=(1+n.*n).*cos(m).*(1./((1+n.*n).^2-4.*n.*n.*(sin(m)).^2));
end
```