

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра математичного та комп'ютерного моделювання

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «Побудова апостеріорного оцінювача на основі
локальної задачі Діріхле»

«Building an a posteriori error estimator based on the Dirichlet problem»

Виконав: студент денної форми навчання
напряму підготовки

113 Прикладна математика

Лозинський Дмитро Костянтинович

Керівник: к. ф.-м. н., доц. Вербіцький В. В.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Таїрова М.С.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «_____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від «_____» ____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

Одеса — 2022 р.

ЗМІСТ

Вступ		3
1	Постановка задачі	5
2	Метод скінченних елементів розв’язання крайових задач для ОДУ	6
2.1	Лінійні безперервні базисні сплайни	6
2.2	Варіаційне формулювання крайової задачі	9
2.3	Метод Бубнова–Гальоркіна	13
2.4	Метод скінченних елементів	15
3	Огляд апостеріорних оцінювачів	20
3.1	Апостеріорні оцінювачі похибок та їхні характеристики	20
3.2	Типи АОП	24
3.3	Явний оцінювач для h -адаптивних апроксимацій	26
3.4	Неявні оцінювачі типу Діріхле	33
4	Апостеріорній оцінювач на основі локальної задачі Діріхле	39
4.1	Похибки скінченно-елементного розв’язку $u_h(x)$	39
5	Обчислювальний експеримент	41
	Висновки	45
	Додаток А. Програма мовою пакету MATLAB	48

ВСТУП

Необхідність методів, що дозволяють явно контролювати похибку наближених розв'язків крайових задач еліптичного типу, була усвідомлена давно, коли стало очевидно, що якість наближеного рішення може сильно залежати від обраного типу дискретизації і отримання "добрих" апроксимацій вимагає адаптації сітки до структури точного рішення. Тому в сучасній обчислювальній практиці для розв'язання крайових задач широко використовуються так звані адаптивні алгоритми, в яких сітка послідовно поліпшується [11–15, 19, 20]. При цьому нова дискретизація будується на основі інформації, отриманої після рішення крайової задачі на попередній (зазвичай більш грубій) сітці. Використання таких алгоритмів стимулювало дослідження, спрямовані на побудову апостеріорних оцінювачів похибки, відмінних від вже відомих апріорних оцінок швидкості збіжності, які, як правило, вказують тільки асимптотический порядок збіжності. Необхідність в таких оцінках виникла і при проведенні так званих "доказових обчислень". Часто застосовуваний підхід заснований на порівнянні градієнта наближеного розв'язку і його осереднення (останнє може будуватися різними способами). Виявляється, якщо точний розв'язок має підвищену гладкість, то така різниця може використовуватися в якості індикатора похибки. Спочатку цей факт був виявлений експериментальним шляхом. Пізніше з'явилися формальні обґрунтування методу усереднення градієнта, засновані на ефекті суперсходимості. Важливою перевагою цього методу є його простота. Однак область застосування підходів такого типу обмежена: це дуже хороші апроксимації досить регулярних точних розв'язків. Крім того, метод усереднення градієнта зазвичай забезпечує тільки індикацію помилки, але не дає гарантованої оцінки її абсолютної величини зверху.

З основами методу скінченних елементів та сучасним станом досліджень щодо побудови адаптивних схем методу можна ознайомитись в роботах [11–15, 19, 20].

Об'єктом дослідження роботи є скінченно-елементні апроксимації крайових задач для рівнянь еліптичного типу.

Предметом дослідження є адаптивні схеми методу скінченних елементів

тів розв'язання крайових задач еліптичного типу.

Мета роботи: отримання нових знань і практичного досвіду для створення ефективних адаптивних схем методу скінченних елементів розв'язання крайових задач еліптичного типу.

Задля досягнення мети роботи треба побудувати скінченно-елементну апроксимацію для конкретної задачі з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці. Побудувати апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі. Написати програмний додаток на мові пакету MATLAB, який знаходить наближений розв'язок поставленої задачі, адаптуючи сітки до структури точного розв'язку.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дана крайова задача:

$$-u(x)'' + q(x)u(x) = f(x), x \in (a, b)$$

$$u(a) = 0, u(b) = 0$$

де $q(x) \in C^0[a, b]$, $q(x) \geq 0$.

Для цієї задачі треба побудувати скінченно-елементну апроксимацію з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці. Побудувати апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі. Написати програмний додаток на мові пакету MATLAB, який знаходить наближений розв'язок поставленої задачі, адаптуючи сітки до структури точного розв'язку.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДУ

2.1. Лінійні безперервні базисні сплайни

На проміжку $[a, b]$ визначимо сітку

$$\omega_h = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\},$$

в загальному випадку нерівномірну. Покладемо

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i.$$

де $h_i = x_i - x_{i-1}$. Для визначення лінійного сплайна, що визначається сіткою ω_h необхідно $2n$ параметрів. Позначимо $S_{\omega_h}^{1,0}[a,b]$ простір лінійних безперервних на $[a, b]$ сплайнів, що визначаються сіткою ω_h . Оскільки лінійний безперервний сплайн $s(x) \in S_{\omega_h}^{1,0}[a,b]$ повинен бути безперервний у внутрішніх вузлах x_i ($i = \overline{1, n-1}$) сітки ω_h , тобто повинен задовольняти $n - 1$ умові, то для його визначення необхідний $n + 1$ параметр. Значить простір лінійних безперервних сплайнів $S_{\omega_h}^{1,0}[a,b]$ має розмірність $n + 1$. Очевидно, що функції

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1})/h_{i+1}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}], \\ & i = \overline{1, n-1} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -(x - x_1)/h_1, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \in [x_1, b], \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (x - x_{n-1})h_n, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \in [a, x_{n-1}], \end{cases} \quad (2.3)$$

лінійно незалежні і є лінійними безперервними сплайнами.

Значить $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ — базис простору $S_{\omega_h}^{1,0}[a,b]$. Очевидно, що

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{0, n}.$$

Тому, якщо відомі значення функції у вузлах сітки $f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$), то лінійний безперервний сплайн

$$s(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\varphi_i(x)$$

є інтерполяційним сплайном, бо

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

і називається лінійним сплайном Лагранжа.

Відомо, що в гільбертовому просторі V має місце наступна нерівність Коші-Буняковського

$$(u, v)_V \leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (2.4)$$

де $(u, v)_V$ — скалярний добуток, $\|u\|_V = \sqrt{(u, u)_V}$ — норма гільбертовому просторі V .

Розглянемо деякі приклади.

Якщо V є скінченномірним простором n х векторів з R^n , то

$$(u, v)_V = u^T v$$

і нерівність Коші-Буняковського набуває вигляду

$$u^T v \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \quad \forall u, v \in R^n, \quad (2.5)$$

де $\|u\|_2$ — Евклідова норма вектора. Простір Лебега $L_2(a, b)$, що складається

з функцій суммовних з квадратом, тобто

$$L_2(a,b) = \left\{ u(x) : \int_a^b u^2(x) dx < \infty \right\},$$

є Гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(u(x), v(x))_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(x)v(x) dx.$$

Для цього простору нерівність Коші-Буняковського приймає наступний вигляд:

$$\int_a^b u(x)v(x) dx \leq \left\{ \int_a^b u^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b v^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u(x), v(x) \in L_2(a,b). \quad (2.6)$$

Простори Соболева $H^k(a,b)$, ($k = 1, 2, \dots$) складаються з функцій сумуємих з квадратом разом з похідними до k -го порядку включно, тобто

$$H^k(a,b) = \left\{ u(x) : \int_a^b \sum_{i=0}^k (u^{(i)}(x))^2 dx < \infty \right\},$$

є гільбертовими просторами зі скалярним добутком

$$(u(x), v(x))_{H^k(a,b)} = \int_a^b \sum_{i=0}^k u^{(i)}(x)v^{(i)}(x) dx.$$

Для цих просторів нерівність Коші-Буняковського набуває вигляду:

$$\int_a^b \sum_{i=0}^k u^{(i)}(x)v^{(i)}(x) dx \leq \left\{ \int_a^b \sum_{i=0}^k (u^{(i)}(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \int_a^b \sum_{i=0}^k (v^{(i)}(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u(x), v(x) \in H^k(a, b). \quad (2.7)$$

Доведемо тепер теорему про апроксимацію функції лінійними безперервними сплайнами.

Теорема 2.1. *Якщо $u(x) \in H^2(a, b)$, то існує такий сплайн $u_h(x) \in S_{\omega_h}^{1,0}[a, b]$, що*

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{L_2(a, b)} \leq Ch^2 |u(x)|_{H^2(a, b)}, \quad (2.8)$$

$$\|u(x) - u_h(x)\|_{H^1(a, b)} \leq Ch |u(x)|_{H^2(a, b)}, \quad (2.9)$$

де

$$|u(x)|_{H^2(a, b)} = \left\{ \int_a^b (u''(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

— напівнорма простору $H^2(a, b)$, $C > 0$ — константа не залежна від h .

2.2. Варіаційне формулювання крайової задачі

Теорема 2.2 (Лемма Лакса–Мільграма). [9, стр. 19] *Нехай V — гільбертовому просторі зі скалярним твором $(\cdot, \cdot)_V$ і нормою $\|\cdot\|_V$. Білінійна форма $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна і V — еліптична, тобто*

$$|a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.10)$$

$$a(u, u) \geq c_2 \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V, \quad (2.11)$$

де $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — константи які не залежать від u і v . Лінійна форма $f(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна, тобто

$$f(v) \leq c_3 \|v\|_V, \quad \forall v \in V, \quad (2.12)$$

де $c_3 > 0$ — константа незалежна від v .

Тоді абстрактна варіаційна задача: знайти такий елемент $u \in V$, що

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.13)$$

має єдиний розв'язок.

Розглянемо крайову задачу

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (a,b), \quad (2.14)$$

$$u(a) = \alpha, \quad u'(b) = \beta, \quad (2.15)$$

де $q(x) \in C^0[a,b]$ і $q(x) \geq 0$. Якщо функції $f(x) \in C^0[a,b]$, то розв'язок крайової задачі (2.14)–(2.15) $u(x) \in C^2[a,b]$ називається класичним розв'язком крайової задачі. Якщо $f(x) \in L_2(a,b)$, то класичного розв'язку крайової задачі може не існувати.

Визначимо простір

$$H_a^1(a,b) = \{v \in H^1(a,b) : v(a) = 0\}.$$

Домножемо рівняння (2.14) на довільну функцію $v \in H_a^1(a,b)$, а потім інтегруємо від a до b . До першого інтеграла в лівій частині отриманого рівності,

$$-\int_a^b u''v dx + \int_a^b q(x)uv dx = \int_a^b f(x)v dx,$$

застосуємо формулу інтегрування частинами, тоді

$$\int_a^b u'v' dx - u'v|_a^b + \int_a^b q(x)uv dx = \int_a^b f(x)v dx.$$

Оскільки v — довільна функція з $H_a^1(a,b)$ и $u'(b) = \beta$, то

$$\int_a^b \{u'v' + q(x)uv\} dx = \int_a^b f(x)v dx + \beta v(b). \quad (2.16)$$

Позначимо

$$a(u,v) = \int_a^b \{u'v' + q(x)uv\} dx, \quad (2.17)$$

$$f(v) = \int_a^b f(x)v dx + \beta v(b). \quad (2.18)$$

Очевидно, що ця інтегральна рівність (2.16) має сенс, якщо функція u належить тільки простору $H^1(a,b)$. Розглянемо тепер таку варіаційну задачу. Нехай $w \in H^1(a,b)$ и $w(a) = \alpha$. Необхідно знайти таку функцію $u \in H^1(a,b)$, що $u - w \in H_a^1(a,b)$ і

$$a(u - w, v) = f(v) - a(w, v), \forall v \in H_a^1(a, b). \quad (2.19)$$

Покажемо, що для варіаційної задачі (2.19) виконуються умови леми Лакса–Мільграма, а значить варіаційна задача (2.19) має єдиний розв'язок.

Покладемо $V = H_a^1(a, b)$ и

$$\|v\|_V \equiv \|v\|_1 = \left(\int_a^b (v')^2 + v^2 dx \right)^{1/2}.$$

Покажемо, що білінійна форма $a(\cdot, \cdot)$ завдання (2.19) неперервна і V - еліптична. Використовуючи інтегральну нерівність Коші–Буняковського, а потім нерівність Коші–Буняковського для сум, отримуємо

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_a^b |u'| |v'| dx + \max_{x \in [a, b]} q(x) \int_a^b |u| |v| dx \leq \\ &\leq \left(\int_a^b (u')^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b (v')^2 dx \right)^{1/2} + \max_{x \in [a, b]} q(x) \left(\int_a^b u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b v^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq c_4 \left(\int_a^b (u')^2 + u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b (v')^2 + v^2 dx \right)^{1/2} = c_4 \|u\|_1 \|v\|_1, \end{aligned}$$

де $c_4 = \max\{1, \max_{x \in [a,b]} q(x)\}$. З іншого боку

$$a(u,v) = \int_a^b (v')^2 + q(x)v^2 dx \geq \int_a^b (v')^2 dx \geq c_5 \|v\|_1^2.$$

Тут ми скористалися нерівністю

$$\|v\|_1^2 = \int_a^b (v')^2 dx \geq c_5 \|v\|_1^2,$$

яка справедлива для будь-якої функції з $H_a^1(a,b)$, але може не виконуватися для функцій з $H^1(a,b)$ (наприклад, для функції $u = C > 0$).

Доведемо тепер безперервність лінійної форми $f(v) - a(w,v)$. Оскільки $v \in H_a^1(a,b) \subset C^0[a,b]$ (по теорем вкладення [9, стр. 118]), то

$$\begin{aligned} |\beta v(b)| &\leq |\beta| \left| \int_a^b v' dx \right| \leq |\beta| \left(\int_a^b (v')^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b 1^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{b-a} |\beta| \left(\int_a^b (v')^2 dx \right)^{1/2} \leq \sqrt{b-a} |\beta| \|v\|_1. \end{aligned}$$

далі

$$\left| \int_a^b f(x)v dx \right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b v^2 dx \right)^{1/2} \leq \|f(x)\|_0 \|v\|_1.$$

Тому

$$|f(v)| \leq \{\sqrt{b-a} |\beta| + \|f(x)\|_0\} \|v\|_1. \quad (2.20)$$

Тепер безперервність лінійної форми $f(v) - a(w,v)$ випливає з (2.20) і безперервності билинейної форми $a(\cdot, \cdot)$

Значить варіаційна задача (2.19) має єдине рішення $u = z - w \in$

$H_a^1(a,b)$. далі

$$a(u - w, u - w) = f(u - w) - a(w, u - w).$$

Використовуючи позитивну визначеність билинейної форми і безперервність лінійної форми, з цієї рівності отримуємо

$$c_5 \|u - w\|_1^2 \leq \{\sqrt{b-a} |\beta| + \|f(x)\|_0 + c_4 \|w\|_1\} \|u - w\|_1,$$

або

$$\|u - w\|_1 \leq \frac{1}{c_5} \{\sqrt{b-a} |\beta| + \|f(x)\|_0\},$$

нарешті

$$\|u\|_1 \leq \frac{1}{c_5} \{\sqrt{b-a} |\beta| + \|f(x)\|_0\} + \left\{ \frac{c_4 + c_5}{c_5} \right\} \|w\|_1. \quad (2.21)$$

Ця оцінка означає, що рішення u варіаційної задачі (2.19) безперервно залежать від вхідних даних.

2.3. Метод Бубнова–Гальоркіна

Нехай для абстрактної варіаційної задачі, знайти таке $u \in V$, що

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V, \quad (2.22)$$

виконуються умови леми Лакса–Мільграма. Метод Бубнова - Гальоркіна побудови наближеного розв'язку варіаційної задачі (2.22) полягає в наступному. Розглянемо деякий скінченномірний підпростір V_h простору V , де h — деякий параметр від якого залежить розмірність N_h підпростору V_h . Задачі (2.22) поставимо у відповідність скінченно-вимірну задачу, знайти таке $u_h \in V_h$, що

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.23)$$

Очевидно, що в силу леми Лакса - Мільграма завдання (2.23) має єдиний розв'язок. Нехай $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_h}$ — базис підпростору V_h . Тоді шуканий розв'язок

u_h завдання (2.23) можна представити у вигляді

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i \varphi_i, \quad (2.24)$$

де коефіцієнти α_i підлягають визначенню. Підставляючи (2.24) в (2.23) і враховуючи, що варіаційне рівність в (2.23) буде виконуватися $\forall v_h \in V_h$, якщо воно буде виконуватися для всіх базисних функцій підпростору V_h , отримуємо СЛАР

$$\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = f(\varphi_j), \quad j = \overline{1, N_h}, \quad (2.25)$$

або

$$Ay = b, \quad (2.26)$$

де $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, $b_i = f(\varphi_i)$, $i, j = \overline{1, N_h}$, $y = [\alpha_1, \dots, \alpha_{N_h}]^T$.

Теорема 2.3 (Лемма Сеа). [9, стр. 109] Нехай u — розв'язок варіаційної задачі (2.22) для якої виконуються умови лемми Лакса–Мільграмма, u_h — розв'язок задачі (2.23), тоді існує така яка не залежить від підпростору V_h константа $C > 0$, що

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (2.27)$$

Доведення. З (2.22) и (2.23) слід, що

$$a(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V_h.$$

Тому, використовуючи позитивну визначеність і безперервність билинейної форми $a(\cdot, \cdot)$, отримуємо

$$\begin{aligned} c_2 \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - (u_h + w_h)) = \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leq c_1 \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

Значить

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{c_1}{c_2} \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h.$$

Звідси випливає оцінка (2.27). □

Лемма Сеа фактично стверджує наступне. Для того, щоб наближене рішення u_h , отримане методом Бубнова–Гальоркіна, сходилося до розв'язку u варіаційної задачі (2.22), достатньо існування такого сімейства скінченно-вимірних підпросторів $\{V_h\}$ простору V , що для будь-якого $u \in V$

$$\lim_{N_h \rightarrow \infty} \inf_{v \in V_h} \|u - v_h\|_V = 0. \quad (2.28)$$

2.4. Метод скінченних елементів

Розглянемо тепер метод скінченних елементів рішення крайової задачі (2.14)–(2.15). Розділимо проміжок $[a, b]$ на n рівних частин. Покладемо $h = (b - a)/n$. використовуючи сітку

$$\omega_h = \{x_i = a + ih, i = \overline{0, n}\},$$

визначимо простір лінійних безперервних сплайнів $S_h^{1,0}[a, b]$ с базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$, де

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^-(x) = \frac{1}{h}(x - x_{i-1}), & \text{если } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \varphi_i^+(x) = \frac{1}{h}(x_{i+1} - x), & \text{если } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{если } x \in [a, b] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = \overline{0, n}$).

Як вже зазначалося, слабке рішення крайової задачі (2.14)–(2.15) є рішенням наступної варіаційної задачі. Знайти таке $u \in H^1(a, b)$, що $u - w_h \in H_a^1(a, b)$ і

$$a(u - w_h, v) = f(v) - a(w_h, v) \quad \forall v \in H_a^1(a, b), \quad (2.29)$$

де

$$a(u, v) = \int_a^b u'v' + q(x)uv dx,$$

$$f(v) = \int_a^b f(x)v dx + \beta v(b),$$

и $w_h \in S_h^{1,0}(a,b) \in H^1(a,b)$ вибрано таким чином $w_h = \alpha\varphi_0(x)$.

Визначимо скінченномірний підпростір

$$V_h = \{v_h \in S_h^{1,0}[a,b] : v_h(a) = 0\}$$

простору $H_a^1(a,b)$. Задачі (2.29) поставимо у відповідність наступну скінченномірну задачу. Знайти таке $u_h \in S_h^{1,0}[a,b]$, що $u_h - w_h \in V_h$ і

$$a(u_h - w_h, v_h) = f(v_h) - a(w_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.30)$$

Ця задача має єдиний розв'язок в силу леми Лакса–Мільграма. Доведемо тепер теорему про збіжність скінченно - елементного розв'язку u_h .

Теорема 2.4. *Нехай $u \in H^2(a,b)$ – слабкий розв'язок крайової задачі (2.14)–(2.15), u_h – розв'язок задачі (2.30), тоді існує така яка незалежна від h константа $C > 0$, що*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch|u|_2. \quad (2.31)$$

Доведення. Використовуючи лему Сеа, отримуємо

$$\|u - u_h\|_1 = \|(u - w_h) - (u_h - w_h)\|_1 \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1.$$

Для функції u побудуємо інтерполяційний сплайн Лагранжа

$$\Pi_h u = \sum_{i=0}^n u(x_i)\varphi_i(x).$$

По теоремі про апроксимацію функцій лінійними сплайнами має місце оцінка

$$\|u - \Pi_h u\|_1 \leq h|u|_2.$$

Значить

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \leq C \|u - \Pi_h u\|_1 \leq Ch|u|_2.$$

□

Покажемо, що задача (2.30) являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Рішення u_h задачі (2.30) будемо шукати у наступному вигляді

$$u_h = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (2.32)$$

де коефіцієнти α_i необхідно визначити. Оскільки $w_h = \alpha \varphi_0(x)$, то з умови $u_h - w_h \in V_h$ отримуємо рівняння $u_h(x_0) = \alpha \varphi_0(x_0)$ або

$$\alpha_0 = \alpha. \quad (2.33)$$

Підставляючи (2.32) в (2.30) і враховуючи, що варіаційна рівність в (2.30) буде виконуватися $\forall v_h \in V_h$, якщо вона буде виконуватися для всіх базисних функцій підпростору V_h , отримуємо

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = f(\varphi_j(x)), \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.34)$$

Оскільки функція $\varphi_i(x)$ відмінна від нуля тільки на проміжку $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, то $a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = 0$ якщо $|i - j| > 1$. Зауважимо також, що

$$a(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)).$$

Далее

$$\begin{aligned} a(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} ((\varphi_i^-(x))')^2 + \\ &+ q(x)(\varphi_i^-(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((\varphi_i^+(x))')^2 + \\ &+ q(x)(\varphi_i^+(x))^2 dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{h} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)(\varphi_i^-(x))^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)(\varphi_i^+(x))^2 dx.$$

Використовуючи квадратурну формулу трапецій для наближеного обчислення двох останніх інтегралів, отримуємо

$$a(\varphi_i(x), \varphi_i(x)) \approx \frac{2}{h} + q(x_i)h, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.35)$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} a(\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x)) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_i^+(x))'(\varphi_{i+1}^-(x))' + q(x)\varphi_i^+(x)\varphi_{i+1}^-(x) dx = \\ &\approx -\frac{1}{h}, \quad i = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

і

$$\begin{aligned} a(\varphi_n(x), \varphi_n(x)) &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} ((\varphi_n^-(x))')^2 + q(x)(\varphi_n^-(x))^2 dx = \\ &= \frac{1}{h} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} q(x)(\varphi_n^-(x))^2 dx \approx \frac{1}{h} + \frac{q(x_n)h}{2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для $i = \overline{1, n-1}$ обчислимо

$$\begin{aligned} f(\varphi_i(x)) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x) dx = \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i^-(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i^+(x) dx. \end{aligned}$$

Приблизно обчислюючи для останніх інтеграла за формулою трапецій, отримуємо

$$f(\varphi_i(x)) \approx hf(x_i). \quad (2.38)$$

РОЗДІЛ 3

ОГЛЯД АПОСТЕРІОРНИХ ОЦІНЮВАЧІВ

3.1. Апостеріорні оцінювачі похибок та їхні характеристики

Теорема 3.1 (Про апроксимативність просторів кусково- поліноміальних функцій високих порядків). *Нехай простір апроксимацій MSE V_{hp} побудовано на рівномірній сітці з кроком h і однаковим степенем поліномів p на кожному зі скінченних елементів, тоді для кожного $v \in V$ існує $v_{hp} \in V_{hp}$ такий, що:*

$$\|v - v_{hp}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{h^\chi}{p^{m-1}} \|v\|_{H^{m+1}(\Omega)}, \quad m \geq 1 \quad (3.1)$$

де $C = C(m) > 0$, $\chi = \min\{p, m-1\}$. *Наведена оцінка є оптимальною. Якщо ж сітка вузлів нерівномірна і степені поліномів на елементах змінні, то, при деяких додаткових припущеннях (щодо розташування примежового шару), для кожного $v \in V$ можна побудувати таку сітку і вибрати степені поліномів у такий спосіб, що знайдеться елемент $v_{hp} \in V_{hp}$, для якого виконується оцінка:*

$$\|v - v_{hp}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \exp \left[-C_2 \sqrt[3]{N_{dof}} \right] \quad (3.2)$$

де $C_1, C_2 = const$, $N_{dof} = \dim v_{hp}$.

Суттєвий недолік апріорних оцінок похибок, прикладами яких є оцінки (3.1) та (3.2) — наявність констант, значення яких практично завжди невідомі. Незважаючи на цей факт, апріорні оцінки дуже важливі з точки зору і теорії, і практики, оскільки дають змогу провести якісний аналіз характеристик збіжності методу, встановити швидкість та порядок збіжності, проаналізувати можливості щодо точності наближення невідомої функції елементами того чи іншого простору апроксимацій. Для реалізації ж конкретних алгоритмів методу скінченних елементів нам потрібно мати певний рецепт точної оцінки похибки. Ключем до віднайдення такого рецепту є використання при оцінці похибок вже знайденого наближення. Така ідея

закономірна, оскільки, оцінюючи якість апроксимації, певна річ, можна припускати, що сама апроксимація містить в собі практично всю інформацію, яка потрібна для оцінки похибки. Вперше серйозне дослідження апостеріорних оцінювачів похибок (АОП) було висвітлено у працях таких вчених, як [11].

Для найбільш загального співставлення й аналізу АОП, у них було введено такі важливі характеристики, як ефективність та надійність. Розглянемо їх детальніше.

Нехай знайдено наближення МСЕ u_h . Позначаючи точний розв'язок як u , похибка знайденого наближення становить $e = u - u_h$. Нехай задано деяку норму $\|\cdot\|$, в якій ми хочемо оцінити похибку e . Розглянемо апостеріорний оцінювач похибки $\eta = \eta(u_h) \geq 0$.

Оцінювач η називають надійним, якщо існує (відома) константа $k_R > 0$ така, що:

$$\|e\| \leq k_R \eta \quad (3.3)$$

Оцінювач η називають ефективним, якщо існує константа $k_E > 0$ така, що:

$$\|e\| \geq k_E \eta \quad (3.4)$$

Зміст умови (3.3) очевидний: якщо задано допустимий рівень похибки TOL , то величину $k_R \eta$ можна використовувати для контролю точності апроксимації МСЕ, оскільки виконання умови $k_R \eta < TOL$ гарантуватиме, що точна похибка апроксимації не більша, ніж TOL : $\|e\| < TOL$.

Бачимо, що з (3.3) та (3.4) отримуємо

$$k_E \leq \frac{\|e\|}{\eta} \leq k_R. \quad (3.5)$$

Щодо умови (3.4), то важливим є близькість константи k_e до k_R , оскільки останній факт визначає «оперативність» зупинки алгоритму МСЕ при досягненні відповідної точності в процесі, наприклад, рівномірного

згущення сітки. Отож, що коли сталі k_e та k_R «сильно» відрізняються за величиною, то це може призводити до великого значення різниці $k_R\eta - \|e\|$, і навіть після фактичного досягнення заданої точності $\|e\| < TOL$ алгоритм буде робити ще додаткові кроки згущення сітки доти, доки не буде виконана умова $k_R\eta \leq TOL$. Саме тому згадану властивість і називають ефективністю оцінювача.

Побудова схем МСЕ на рівномірних сітках із використання АОП як індикатора повної похибки апроксимації для багатьох реальних задач не має практичної цінності, оскільки у тому випадку, коли розв'язок задачі матиме складну структуру (наприклад, у разі сингулярно збурених задач ДКР), густина вузлів рівномірної сітки, на якій апроксимація могла б з гарантованою точністю відтворити цю складну структуру, має бути надто велика. Величина обчислювальних затрат, внаслідок великої розмірності СЛАР, отримуваних в процесі роботи алгоритму, робить такі схеми практично повністю незастосовними.

Природним вирішенням проблеми відтворення складної структури розв'язку є використання нерівномірних сіток, густіших у зонах області задачі, де локальна похибка апроксимації є більшою. Як наслідок, виникла проблема побудови АОП, що міг би давати оцінку похибки не на всій області Ω а, наприклад, на окремих скінченних елементах або ж взагалі на певних підобластях області Ω .

Часто розглядають поелементні оцінювачі (індикатори) η_K та відповідний глобальний оцінювач η , які пов'язані співвідношенням:

$$\eta^2 = \sum_K \eta_K^2 \quad (3.6)$$

Для локальних оцінювачів розглядають аналогічні характеристики: надійність та ефективність. В одновимірному випадку найпростіший алгоритм адаптування сітки полягає у тому, щоб на кожній ітерації алгоритму ділити навпіл скінченні елементи \tilde{K} , індикатор похибки для яких є максимальним серед усіх елементів сітки:

$$\eta_{\tilde{K}} = \max_K \eta_k \quad (3.7)$$

Для зупинки використовується індикатор η у спосіб, який описано вище. До цього часу було описано певні абстрактні характеристики і поняття, що застосовні до АОП. На завершення цього пункту розглянемо задачу про похибку наближення до розв'язку варіаційної задачі:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію } u \in v := H^1(\Omega) \text{ таку, що} \\ c_\Omega(u, v) = \langle l_\Omega, v \rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.8)$$

де

$$\begin{aligned} c_\Omega(u, v) &:= \left(\mu u', v' \right)_\Omega + Pe \cdot \left[\left(\beta u', v \right)_\Omega + St \cdot (\sigma u, v)_\Omega \right] \\ &\quad + \alpha uv|_{t=0} + \gamma uv|_{t=1} \quad \forall u, v \in V, \\ \langle l_\Omega, v \rangle &:= (f, v)_\Omega + \alpha g_0 v(0) + \gamma g_1 v(1) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Тут $(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv dx$ - скалярний добуток в просторі $L^2(\Omega)$.

та покажемо, що цю задачу про похибку можна використовувати як основу для побудови АОП.

Нехай задано деяку апроксимацію $u_h \in v_h$ до розв'язку u задачі (3.8). Якщо розглянути похибку $e = u - u_h$, то, враховуючи лінійність форми c_Ω по кожному з аргументів та (3.8), можна записати

$$c_\Omega(e, v) = c_\Omega(u - u_h, v) = c_\Omega(u, v) - c_\Omega(u_h, v) = \langle l_\Omega, v \rangle - c_\Omega(u_h, v) \quad (3.9)$$

Враховуючи останнє співвідношення та ортогональність Гальоркіна, позначимо $v_h^\perp := \{v \in v | c_\Omega(v, w) = 0 \forall w \in V_h\}$. Сформулюємо варіаційну задачу про похибку:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію похибки } e \in V_h^\perp \text{ таку, що} \\ c_\Omega(e, v) = \langle \rho_\Omega(u_h), v \rangle \quad \forall v \in V_h^\perp \end{cases} \quad (3.10)$$

де

$$\langle \rho_{\Omega}(u_h), v \rangle := \langle l_{\Omega}, v \rangle - c_{\Omega}(u_h, v) \quad (3.11)$$

Функціонал $\rho_{\Omega}(u_h)$ називають функціоналом джерел похибки і він, по суті, є репрезентацією нев'язки вихідного диференціального рівняння.

Очевидно, якщо дані задачі (3.8) задовольняють умови теореми Лакса-Мільграма-Вишика, то задача (3.10) також буде коректно поставленою, причому виконуватиметься оцінка:

$$\|e\|_v \leq \frac{1}{c_0} \|\rho_{\Omega}(u_h)\| \quad (3.12)$$

З (3.12) випливає, що величину $\|\rho_{\Omega}(u_h)\|$ можна трактувати як АОП з константою надійності $k_R = \frac{1}{c_0}$.

Варто зауважити, що для побудови локальних індикаторів задачу про похибку (3.10) розглядають також на окремому скінченному елементі, але із врахуванням певних додаткових крайових умов.

3.2. Типи АОП

Приклад глобального АОП було подано формулою (3.12). Оцінювачі такого типу називають *явними*. Причина використання такого терміну полягає у тому, що правою частиною нерівності (3.12) задається конкретний вираз для обчислення оцінки похибки у певній нормі. Такого виду оцінювачі системно розглянуто у Babuska. Основна перевага їх у відносній простоті програмної імплементації. Недоліком може бути те, що немає загального підходу до гнучкої зміни точності оцінювача. Щодо оцінювача (3.12) варто також зауважити, що безпосереднє наближене обчислення норми функціонала зводиться до розв'язування певної СЛАР, і ця операція, залежно від розмірності СЛАР, може бути також доволі затратною. Враховуючи це, можна спробувати провести додаткову оцінку зверху у (3.12) до норми функціонала джерел похибки $\|\rho_{\Omega}(u_h)\|$. Це типовий підхід і під час такої оцінки додатково виконують також певну декомпозицію глобального оцінювача на поелементні.

Ідея побудови *неявних* оцінювачів дає змогу уникнути описаних вище недоліків. Центральним елементом виступає тут варіаційна задача про похибку (3.10). Зауважимо, що ця задача є за структурою та складністю аналогічна до вихідної і відповідно для її наближеного розв'язування також можна застосувати МСЕ. Маючи наближення до точної функції похибки, можна легко знайти числове значення потрібних норм чи інших величин на його основі. Враховуючи відносну обчислювальну складність обчислення похибки описаним способом доцільно задекларувати наступні критерії, дотримуватись яких потрібно для того, щоб побудувати простий в обчисленні неявний оцінювач:

- 1) АОП має бути *локальним*, тобто обчислюватись на окремому скінченному елементі. Для досягнення цієї мети задачу (3.10) подають у вигляді аналогічного типу локальних підзадач. Варто зазначити, що існують також АОП, які будуються специфічно для обчислення оцінювача на певній області, що складається з декількох суміжних елементів.
- 2) Якщо похибку відшукуємо у вигляді функції у певному просторі кусково-поліноміальних функцій, то простір для знаходження похибки має містити в собі простір апроксимацій основної задачі.
- 3) Також зазвичай вимагають, щоб обчислювальна складність знаходження всіх локальних оцінок похибки не перевищувала складність побудови глобальної СЛАР МСЕ для вихідної задачі.

Наведені вимоги природні і стосуються загалом всіх типів оцінювачів.

Ієрархічні оцінювачі отримують оцінку похибки, використовуючи апроксимації, знайдені на вкладених просторах. Для зменшення обчислювальних затрат, простір, в якому шукають наступну апроксимацію, подають у вигляді суми двох підпросторів: початкового, на якому знайдена вихідна апроксимація, та відповідного ортогонального доповнення. Враховуючи таку декомпозицію, потрібно знайти лише компоненту шуканої покращеної апроксимації з цього ортогонального доповнення. Також у цьому випадку використовують, як і в вищеописаних неявних оцінювачах, декомпозицію оцінювача на локальні складові.

Оцінювачі на основі усереднення градієнту дають змогу знайти оцін-

ку до похибки, використовуючи градієнт від знайденої апроксимації. До прикладу, формула для обчислення глобального оцінювача може мати такий вигляд:

$$\eta^2 = \int_{\Omega} |G[u_h] - \nabla u_h|^2 dx \quad (3.13)$$

де $G[u_h]$ – неперервна інтерполяційна функція, що побудована по вузлах сітки скінченних елементів, значеннями в яких виступають середні значення градієнту на сусідніх елементах (∇u_h є розривною функцією).

На завершення цього пункту зазначимо, що часто виникає потреба знаходження не розв'язку задачі, а лише певних величин, що обчислюються на його основі. Для задачі про міграцію домішок це може бути, наприклад, потік домішки через границю певної заданої області. Відповідно, немає потреби шукати похибку всієї апроксимації МСЕ, а доцільно будувати оцінки лише для похибки величини, яку шукають.

3.3. Явний оцінювач для h_r -адаптивних апроксимацій

У цьому пункті для початку розглянуто побудову типового явного АОП для задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Задано коефіцієнт дифузії } \bar{\mu} = \bar{\mu}(x), \\
\text{вектор конвективного перенесення } \bar{\beta} = \bar{\beta}(x), \\
\text{коефіцієнт біохімічного розпаду } \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x), \\
\text{інтенсивність джерел домішки } \bar{f} = \bar{f}(x) \text{ та} \\
\text{сталі } \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \bar{g}_0, \bar{g}_L \in \mathbb{R}. \\
\text{Знайти функцію } u = u(x) \text{ таку що} \\
-\frac{d}{dx} \left(\bar{\mu} \frac{du}{dx} \right) + \bar{\sigma} u = \bar{f} \text{ на } G = (0, L), \\
\bar{\mu} \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = \bar{\alpha} [u(0) - \bar{g}_0], \\
-\bar{\mu} \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = \bar{\gamma} [u(L) - \bar{g}_L].
\end{array} \right. \quad (3.14)$$

Далі побудовано новий АОП, що безпосередньо враховує інформацію про порядок використовуваного скінченного елемента. Останній в наступному розділі буде використано для побудови адаптивної схеми МСЕ.

Для зручності розглянемо задачу (3.14), проте з перепозначеними коефіцієнтами:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Знайти функцію } u = u(x) \text{ таку, що} \\
-(\mu u')' + \sigma u = f \text{ в } \Omega = (0, L) \\
(\mu u') \Big|_{x=0} = \alpha [u(0) - \bar{u}_0] \\
-(\mu u') \Big|_{x=L} = \gamma [u(L) - \bar{u}_L]
\end{array} \right. \quad (3.15)$$

Стандартним способом отримуємо варіаційне формулювання задачі (3.15):

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{знайти функцію } u \in V := H^1(\Omega) \text{ таку, що} \\
a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V
\end{array} \right. \quad (3.16)$$

де

$$a(u, v) := \int_0^L [\mu u' v' + \sigma uv] dx + \alpha u(0) v(0) + \gamma u(L) v(L) \quad u, v \in V \quad (3.17)$$

$$\langle l, v \rangle := \int_0^L f v dx + \alpha \bar{u}_0 v(0) + \gamma \bar{u}_L v(L) \quad \forall v \in V \quad (3.18)$$

Відповідна дискретизована задача МСЕ має вигляд:

$$\begin{cases} \text{знайти елемент } u_h \in V_h \subset V, \dim V_h < +\infty \text{ такий, що} \\ a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.19)$$

де V_h є простором кусково-поліноміальних функцій, що побудований на сітці скінченних елементів $\Upsilon_h = \{K_i\}_{i=1}^N$, $\bar{K}_i := [x_{i-1}, x_i]$, $h_i = h_k := \text{diam} K_i$, $h := \max_{1 \leq i \leq N} h_i$, з вузлами $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$.

При побудові явних оцінювачів часто основою виступає також, як і в неявних, задача про похибку (3.10). Нехай $V_h^\perp := \{v \in V | a(v, w) = 0 \quad \forall w \in V_h\}$. У термінах задачі (3.16) отримаємо таку задачу про похибку:

$$\begin{cases} \text{знайти функцію похибки } e \in V_h^\perp \text{ таку що} \\ a(e, v) = \langle \rho(u_h), v \rangle \quad \forall v \in V_h^\perp \end{cases} \quad (3.20)$$

де $e = u - u_h$, а функціонал джерел похибки визначається в такий спосіб:

$$\langle \rho(u_h), v \rangle := \langle l, v \rangle - a(u_h, v) \quad (3.21)$$

Запишемо рівняння для похибки із (3.20) в розгорнутому вигляді:

$$a(e, v) = \langle l, v \rangle - a(u_h, v) = \int_0^L [fv - \mu u_h' v' - \sigma u_h v] dx + \quad (3.22)$$

$$+ v(0) \alpha [\bar{u}_0 - u_h(0)] + v(L) \gamma [\bar{u}_L - u_h(L)]$$

Виконуючи декомпозицію інтегралу у (3.22) на поелементні складові та інтегрування частинами, прийдемо до наступної рівності:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \left[f + (\mu u_h')' - \sigma u_h \right] v dx - \sum_{k=1}^N v \mu u_h' \Big|_{x=x_{k-1}+0}^{x=x_k-0} \quad (3.23)$$

$$+ v \alpha [\bar{u}_0 - u_h] \Big|_{x=x_0} + v \gamma [\bar{u}_L - u_h] \Big|_{x=x_N}$$

Перегрупувавши в останній рівності доданки у другій сумі, отримаємо:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K R[u_h] v dx + \sum_{k=1}^{N-1} \left[u_h'(x+0) - u_h'(x-0) \right] v \mu \Big|_{x=x_k} \quad (3.24)$$

$$+ v \alpha [\bar{u}_0 - u_h] \Big|_{x=x_0} + v \gamma [\bar{u}_L - u_h] \Big|_{x=x_N}$$

де

$$R[u_h] := f + (\mu u_h')' - \sigma u_h \quad (3.25)$$

Використовуючи властивість ортогональності

$$c_\Omega(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.26)$$

маємо

$$a(e, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.27)$$

Нехай $v_h := I_h v \in V_h$ є деяким інтерполянтом для v , побудованим на визначеній раніше системі вузлів $\{x_i\}_{i=0}^N$.

Враховуючи (3.27), отримуємо таке рівняння:

$$a(e, v) = a(e, v - I_h v) \quad \forall v \in V \quad (3.28)$$

Тепер, беручи до уваги те, що $(v - I_h v)(x_i) = 0$, вибираючи v у рівності (3.24) як $v - I_h v$, приходимо до наступного фундаментального співвідношення:

$$a(e, v) = \sum_{K \in \Upsilon} \int_K R[u_h](v - I_h v) dx \quad \forall v \in V \quad (3.29)$$

Зокрема, у випадку $v := e$ з останнього співвідношення отримаємо

$$a(e, e) = \int_0^L R[u_h](e - I_h e) dx = \sum_{K \in \Upsilon} \int_K R[u_h](e - I_h e) dx \quad (3.30)$$

Використовуючи тепер різного роду оцінки зверху до правої частини нерівностей (3.29) та (3.30), можемо отримувати певні АОП. Припустимо, що білінійна форма $a \in V$ -еліптичною з константою $a > 0$:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \quad (3.31)$$

Добре відомо, що оператор інтерполювання I_h можна вибрати в такий спосіб, що на кожному скінченному елементі виконуватиметься така оцінка:

$$\|v - I_h v\|_{L^2(K)} \leq Ch_k \|v\|_{H^1(K)} \quad \forall v \in H^1(K) \quad (3.32)$$

де $C > 0$ – деяка константа, $h_k = \text{diam}(K)$.

Використовуючи нерівність (3.31) та нерівність Коші-Буняковського-Шварца (КБШ) для простору $L^2(K)$ до (3.30), можемо записати:

$$\begin{aligned}
\|e\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(e, e) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{K \in \Upsilon} \left| \int_K R[u_h](e - I_h e) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{K \in \Upsilon} \|R[u_h]\|_{L^2(K)} \|e - I_h e\|_{L^2(K)} \\
&\leq \frac{C}{\alpha} \sum_{K \in \Upsilon} h_K \|R[u_h]\|_{L^2(K)} \|e\|_{H^1(K)} \\
&\leq \left\{ \begin{array}{l} \text{нерівність КБШ} \\ \text{для } \mathbb{R}^{\dim(V_h)} \end{array} \right\} \leq \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{K \in \Upsilon} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|e\|_V
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Звідси отримуємо остаточно нерівність

$$\|e\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{K \in \Upsilon} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.34}$$

Отож, використовуючи стандартну техніку, ми отримали глобальний явний АОП

$$\eta := \frac{C}{\alpha} \left(\sum_{K \in \Upsilon} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{K \in \Upsilon} \frac{C^2}{\alpha^2} h_K^2 \|R[u_h]\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.35}$$

В останньому виразі природно виділити локальні складові η_K , які обчислюються лише на окремому скінченному елементі (див. подання 3.6):

$$\eta_K := \frac{C}{\alpha} h_K \|R[u_h]\|_{L^2(K)} \tag{3.36}$$

Отриману величину η_K , що задається формулою (3.36), можна розглядати як локальний АОП. Константу α у формулі (3.36) можна також оцінити. Оцінку для C також можна провести, але у цій роботі ми її не розглядатимемо, оскільки для потреб адаптування будемо використовувати

ти дещо інший оцінювач. Важливо зауважити, що отриманий локальний оцінювач загалом може не давати коректної оцінки для локальної похибки $\|e\|_{H^1(K)}$. Зокрема, це трапляється, коли задача сингулярно збурена і примежевий шар не врахований достатньо добре завдяки локальному згущенню сітки. Незважаючи на це, типова практика полягає у використанні η_K у алгоритмах адаптування як індикатора локальної похибки наближення. Оцінювач (3.36) є типовим і загальна схема, на основі якої він був отриманий, часто використовується також і для інших типів рівнянь та для задач більшої розмірності. Також така схема буде використана далі для побудови іншого АОП.

Варто зауважити, що у формулу (3.36) явно входить величина кроку сітки – розмір скінченного елемента. Апріорні оцінки вигляду (3.1) наводять на думку про те, що при використанні апроксимацій високих порядків, для досягнення кращих оцінок, варто будувати АОП, які явно враховують порядок апроксимації. Далі буде розглянуто побудову такого оцінювача. Позначимо $\omega_K(x) := (x_k - x)(x - x_{k-1})$.

Теорема 3.2 (про локальний інтерполянт). *Існує оператор інтерполявання $I_h : V \rightarrow V_h$ (побудований на сітці вузлів $\{x_i\}_{i=0}^N$) такий, що на кожному скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$ виконуються такі нерівності $\forall v \in H^1(K)$:*

$$\left\| \frac{v - I_h v}{\sqrt{\omega_K}} \right\|_{L^2(K)} \leq \frac{1}{\sqrt{p(p+1)}} \| (v - I_h v)' \|_{L^2(K)} \quad (3.37)$$

$$\| (I_h v)' \|_{L^2(K)} \leq \| v' \|_{L^2(K)} \quad (3.38)$$

де $p = \deg(I_h v)$.

Теорема 3.3. [3] *На кожному скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$ $\forall v \in H^1(K)$ виконується така нерівність:*

$$\left| \int_K R[u_h] (v - I_h v) dx \right| \leq \frac{2}{\sqrt{p(p+1)}} \|\sqrt{\omega_K} R[u_h]\|_{L^2(K)} \|v'\|_{L^2(K)} \quad (3.39)$$

де I_h – оператор інтерполявання з попередньої теореми, $p = \deg(I_h v)$

Доведення. [3]

Зауважимо, що явні оцінювачі дають фіксоване значення оцінки для похибки. В наступному пункті розглянуто інший тип оцінювачів – неявні АОП.

Вони дають змогу, через збільшення кількості обчислень, отримувати наближення до похибки довільної точності. Навіть більше, вони дають змогу знайти похибку у вигляді деякої функції, а не лише її числову оцінку.

3.4. Неявні оцінювачі типу Діріхле

Розглянемо задачу про похибку (3.20). Цю задачу, як і основну (3.16) можна розв'язувати за допомогою МСЕ. Відповідна дискретизована за Гальоркіним задача має такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки } e_h \in E_h \subset V_h^\perp, \dim E_h < +\infty \text{ таке, що} \\ a(e_h, w_h) = \langle \rho(u_h), w_h \rangle \quad \forall w_h \in E_h \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Як глобальний оцінювач похибки можемо тепер використати величину $\eta = \|e_h\|_V$ (або, наприклад, $\eta = \|e_h\|_{E,\Omega}$, де $\|v\|_{E,\Omega} = \sqrt{a(v,v)}$ – енергетична норма задачі). Очевидно, що локальний індикатор похибки можна отримати через знаходження поелементно-визначених норм: $\eta_K = \|e_h\|_H^1(K)$.

На практиці, знаходити локальні індикатори, розв'язуючи задачі (3.40), надто затратно, оскільки складність розв'язування цієї задачі не є меншою, ніж складність розв'язування основної варіаційної задачі. Потрібно знайти аналог задачі про похибку, який дасть змогу знайти похибку на окремому скінченному елементі.

Розглянемо елемент $K = [x_{k-1}, x_k]$ та простір $H^1(K)$. Припустимо, що добутки $\mu e'$ та $\mu u'_h$ є неперервними в деякому околі границі скінченного елемента, тобто, очевидно, що:

$$\mu e' \Big|_{[x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]} \in H^1([x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]), \quad \mu e' \Big|_{[x_k - \delta, x_k]} \in H^1([x_k - \delta, x_k]) \quad (3.41)$$

та

$$\mu u'_h \Big|_{[x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]} \in H^1([x_{k-1}, x_{k-1} + \delta]), \quad \mu u'_h \Big|_{[x_k - \delta, x_k]} \in H^1([x_k - \delta, x_k]) \quad (3.42)$$

Для деякого $\delta > 0$. Зафіксуємо довільну функцію $w \in H^1(\Omega)$ (з властивостей інтеграла Лебега очевидно отримуємо, що $w \Big|_K \in H^1(K)$) та визначимо послідовність функцій $\phi_n \in H^1(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, причому $\phi_n|_K \in H_0^1(K) = \{v \in H^1(K) | v|_{\delta K} = 0\}$, у такий спосіб:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} nw(x_{k-1} + \frac{1}{n})(x - x_{k-1}), & x \in [x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{n}], \\ w(x), & x \in (x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{n}), \\ nw(x_k - \frac{1}{n})(x_k - x), & x \in [x_k - \frac{1}{n}, x_k], \\ 0, & x \in \Omega \setminus K \end{cases} \quad (3.43)$$

Запишемо тепер варіаційне рівняння для похибки (3.20) у розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} & \int_0^L [\mu e' v' + \sigma e v] dx + \alpha u(0) v(0) + \gamma u(L) v(L) \\ &= \int_0^L [f v - \mu u'_h v' - \sigma u_h v] dx \\ &+ v(0) \alpha [\bar{u}_0 - u_h(0)] + v(L) \gamma [\bar{u}_L - u_h(L)], \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.44)$$

Прийmemo $v = \phi_n$ (3.44). Отримаємо:

$$\int_K [\mu e' \phi'_n + \sigma e \phi_n] dx = \int_K [f \phi_n - \mu u'_h \phi'_n - \sigma u_h \phi_n] dx \quad (3.45)$$

Врахувавши тепер (3.43), останнє рівняння можна переписати так:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{k-1}+1/n}^{x_k-1/n} [\mu e' w' + \sigma e w] dx + \int_{\substack{[x_{k-1}, x_{k-1}+1/n] \\ \cup [x_k-1/n, x_k]}} [\sigma e] \phi_n dx + \\ & + nw(x_{k-1} + 1/n) \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+1/n} \mu e' dx - n2(x_k - 1/n) \int_{x_k-1/n}^{x_k} \mu e' dx \\ & = \int_{x_{k-1}+1/n}^{x_k-1/n} [fw - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \int_{\substack{[x_{k-1}, x_{k-1}+1/n] \\ \cup [x_k-1/n, x_k]}} [f - \sigma u_h] \phi_n dx + \\ & + nw(x_k - 1/n) \int_{x_k-1/n}^{x_k} \mu u'_h dx - nw(x_{k-1} + 1/n) \int_{x_{k-1}}^{x_{k-1}+1/n} \mu u'_h dx \end{aligned} \quad (3.46)$$

Беручи до уваги абсолютну неперервність інтеграла Лебега (у перших двох інтегралах з кожного боку рівності) та припущення (3.41 - 3.42) і теорему про середнє у всіх інших інтегралах, перейдемо у (3.46) до границі при $n \rightarrow \infty$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int_K [\mu e' w' + \sigma e w] dx - \mu e' w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \\ & = \int_K [fw - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \mu u'_h w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Врахувавши тепер, що $e = u - u_h$, скоротимо однакові доданки та після перегрупування отримаємо остаточне локальне рівняння для похибки

на скінченному елементі K :

$$\int_K [\mu e' w' + \sigma e w] dx = \int_K [f w - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \mu u' w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \quad (3.48)$$

Зауважимо, що в правій частині отриманого рівняння фігурує невідома величина u' . Припускаючи, що функція u має поточково визначену похідну, природно за апроксимацію останньої величини у вузлах сітки взяти усереднене значення похідної від знайденого наближення МСЕ. Отже приймемо

$$u'(x) \approx \langle u'_h \rangle (x) := \frac{1}{2} [u'_h(x-0) + u'_h(x+0)] \quad (3.49)$$

Враховуючи довільність вибору функції $w \in H^1(K)$, отримали таку нескінченновимірну наближену локальну варіаційну задачу про похибку МСЕ на скінченному елементі $K = [x_{k-1}, x_k]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки } e \in H^1(K) \text{ таке, що} \\ \int_K [\mu e' w' + \sigma e w] dx \\ = \int_K [f w - \mu u'_h w' - \sigma u_h w] dx + \mu \langle u'_h \rangle w \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \quad \forall w \in H^1(K) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Дискретизована за Гальоркіним локальна задача про похибку має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки } e_h \in E_h^K \subset H^1(K), \dim E_h^K < +\infty \text{ таке, що} \\ \int_K [\mu e'_h w'_h + \sigma e_h w_h] dx \\ = \int_K [f w_h - \mu u'_h w'_h - \sigma u_h w_h] dx + \mu \langle u'_h \rangle w_h \Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} \quad \forall w_h \in E_h^K \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Очевидно, що задачі про похибку (3.50) відповідає певна крайова задача Неймана. Загалом вона може не мати розв'язку. На практиці часто розглядають задачу (3.50) (по суті відповідно і (3.51)) у якій замість $H^1(K)$ вибирають деякий вужчий підпростір.

Далі всі неявні оцінювачі ми будемо будувати на основі локальної задачі Діріхле, тобто, фактично, будемо припускати, що апроксимація є точною у вузлах сітки. В такому разі дискретизована задача про похибку на окремому скінченному елементі набуде вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{знайти наближення до похибки} \\ e_h \in E_h^K \subset H_0^1(K), \dim E_h^K < +\infty \text{ такеб що} \\ a_K(e_h, w_h) = \langle l_k, w_h \rangle - a_K(u_h, w_h) \quad \forall w_h \in E_h^K \end{array} \right. \quad (3.52)$$

де використано такі позначення:

$$a_K(u, v) := \int_K [\mu u' v' + \sigma uv] dx \quad \forall u, v \in H_0^1(K) \quad (3.53)$$

$$\langle l_k, v \rangle := \int_K f v dx \quad \forall v \in H_0^1(K) \quad (3.54)$$

Припустивши достатню гладкість відповідних функцій, виконаємо інтегрування частинами у правій частині рівності 3.52 в доданку з $\mu u'_h w'_h$. Отримаємо рівняння в іншій формі:

$$a_K(e_h, w_h) = \int_K R[u_h] w_h dx \quad \forall w_h \in E_h^K \quad (3.55)$$

де $R[u_h]$ визначено згідно (3.25). Зауважимо, що задачу Діріхле (3.52) можна було б отримати безпосередньо з (3.40) за допомогою специфічного вибору скінченновимірного підпростору E_h :

$$E_h = \bigoplus_{K \in \Upsilon} \tilde{E}_h^K \quad (3.56)$$

де

$$\tilde{E}_h^K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_K \in E_h^K \subset H_0^1(K), v|_{\Omega \setminus K} = 0, \dim E_h^K < +\infty\} \quad (3.57)$$

Бачимо, що $\dim E_h = \sum_{K \in \Upsilon} \dim E_h^K$. При такому виборі задача (3.40) очевидно розпадається на сукупність задач (3.52) для кожного скінченного елемента. Також бачимо, що у випадку, коли $\dim E_h^K = 1$, безпосередньо можна отримати явні формули для обчислення АОП.

РОЗДІЛ 4

АПОСТЕРІОРНІЙ ОЦІНЮВАЧ НА ОСНОВІ ЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

4.1. Похибки скінченно-елементного розв'язку $u_h(x)$

Розглянемо побудову оцінювача на підставі локальної задачі Діріхле. Оцінювач будемо будувати для модельної задачі. Знайдемо методом скінченних елементів наближений розв'язок наступної локальної задачі Діріхле

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{на} \quad [x_{i-1}, x_i] \quad (4.1)$$

$$u(x_{i-1}) = u_h(x_{i-1}), \quad u(x_i) = u_h(x_i) \quad (4.2)$$

Тут u_{i-1} , и u_i – значення скінченноелементного розв'язку $u_h(x)$ в вузлах x_{i-1} и x_i , соответственно. Наближені розв'язки $u_h^{(i)}$ локальної задачі (4.1)-(4.2) будемо шукати методом Бубнова - Гальоркіна з використанням скінченно-вимірного базису (див 4.1):

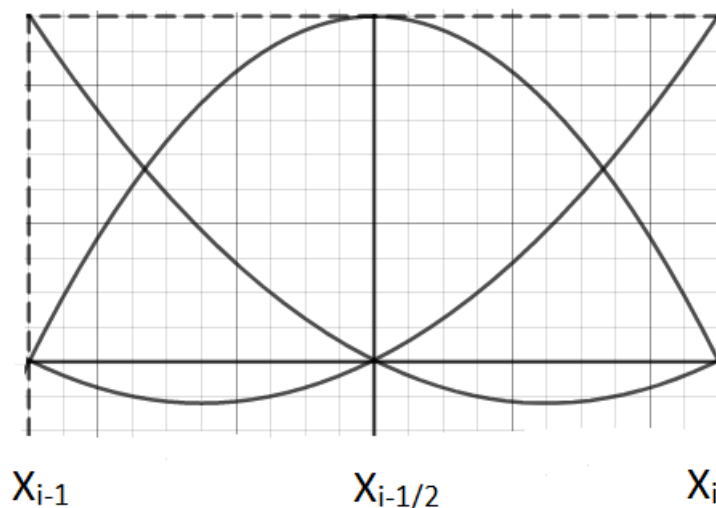


Рис. 4.1. Базисні функції для розв'язування локальної задачі Діріхле

$$\varphi_{i-1}(x) = -\frac{2}{h^2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_i),$$

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{4}{h^2}(x - x_{i-1})(x - x_i),$$

$$\varphi_i(x) = \frac{2}{h^2}(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i-1}),$$

тобто

$$u_h^{(i)} = u_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + u_{i-\frac{1}{2}}\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) + u_i\varphi_i(x).$$

Значення $u_{i-\frac{1}{2}}$ знайдемо з рівняння:

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) dx = \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) dx - \\ u_{i-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) \varphi'_{i-1}(x) dx - \\ u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'_i(x) \varphi'_{i-\frac{1}{2}}(x) dx \end{aligned}$$

Тепер апостеріорний оцінювач похибки СЕ рішення $u_h(x)$ на СЕ $[x_{i-1}, x_i]$ визначимо наступним чином

$$\eta_i = \|u_h(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} - u_h^{(i)}(x)\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)}.$$

Зауважимо, що

$$u_h(x)|_{[x_{i-1}, x_i]} = u_{i-1} \frac{x - x_i}{-h} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h}$$

Побудова такого оцінювача має сенс, оскільки для таких задач СЕ рішення в вузлах сітки має властивість суперзбіжності.

РОЗДІЛ 5

ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

В якості тестового прикладу розглядалася наступна задача Діріхле:

$$-u(x)'' = f(x), \quad (5.1)$$

$$u(-2) = 0, u(0) = 1 - \frac{1}{101}, \quad (5.2)$$

де

$$f(x) = -\frac{5000x^2}{(1+25x^2)^3} - \frac{50}{(25x^2+1)^2}.$$

Точний розв'язок цієї задачі

$$u(x) = \frac{1}{(1+25x^2)} - \frac{1}{101}. \quad (5.3)$$

Для задачі (5.1)-(5.2) побудована скінченно-елементна апроксимація з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці. По знайденому скінченно-елементному розв'язку побудований апостеріорний оцінювач на основі локальної задачі Діріхле. Оцінювач дозволяє наближено обчислювати похибку скінченно-елементного рішення на кожному скінченному елементі (відрізку).

- 1) скінченно-елементний розв'язок на нерівномірній сітці;
- 2) знайдемо розв'язки $u_h^{(i)}$ методом Бубнова - Гальоркіна;
- 3) обчислюємо значення апостеріорного оцінювача

Складено програму на мові пакету MATLAB. Проведено обчислювальний експеримент. Результати експерименту представлені на малюнках (5.1), (5.2) і (5.3). На малюнках приведені графіки точного рішення u_t , скінченно-елементного рішення u_h і апостеріорного оцінювача. На мал. (5.1) наведені результати, отримані для рівномірної сітки проміжку $[-2,0]$ з кроком $h = 0.2$. Мал. 5.2 — перше згущення сітки, мал. (5.3) — друге згущення сітки. Мал. (5.3) демонструє, що вже після другого згущення сітки, скінченно-елементний розв'язок практично збігається з точним. Таким чином, апостеріорний оцінювач, отриманий на підставі нев'язки, дозволяє

ефективно адаптувати сітку для обліку поведінки розв'язку крайової задачі.

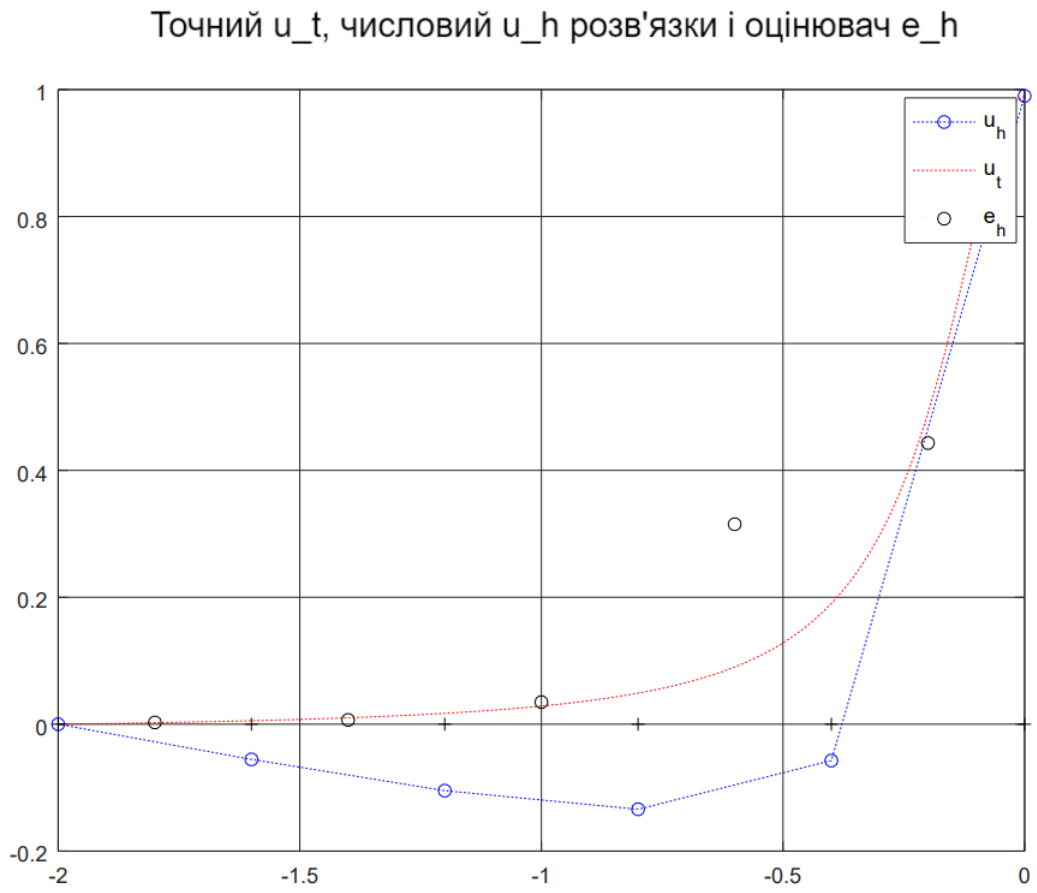


Рис. 5.1. Рівномірна сітка з кроком $h = 0.2$.

Точний u_t , числовий u_h розв'язки і оцінювач e_h

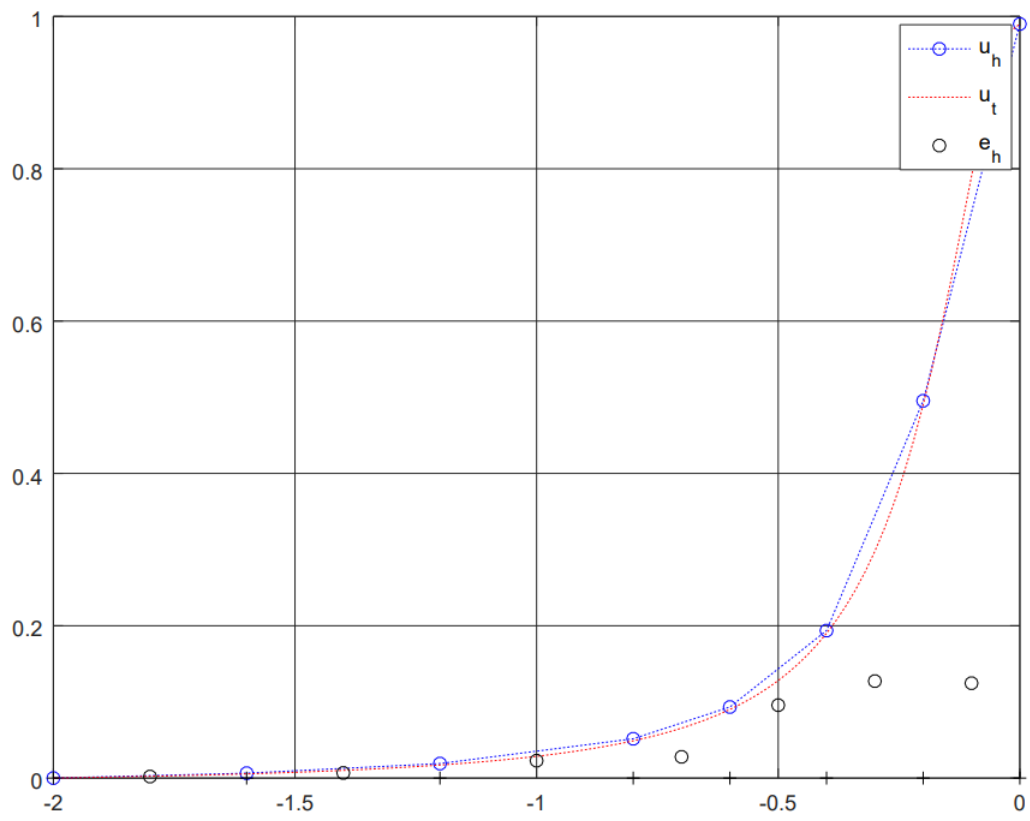


Рис. 5.2. Перше згущення сітки

Точний u_t , числовий u_h розв'язки і оцінювач e_h

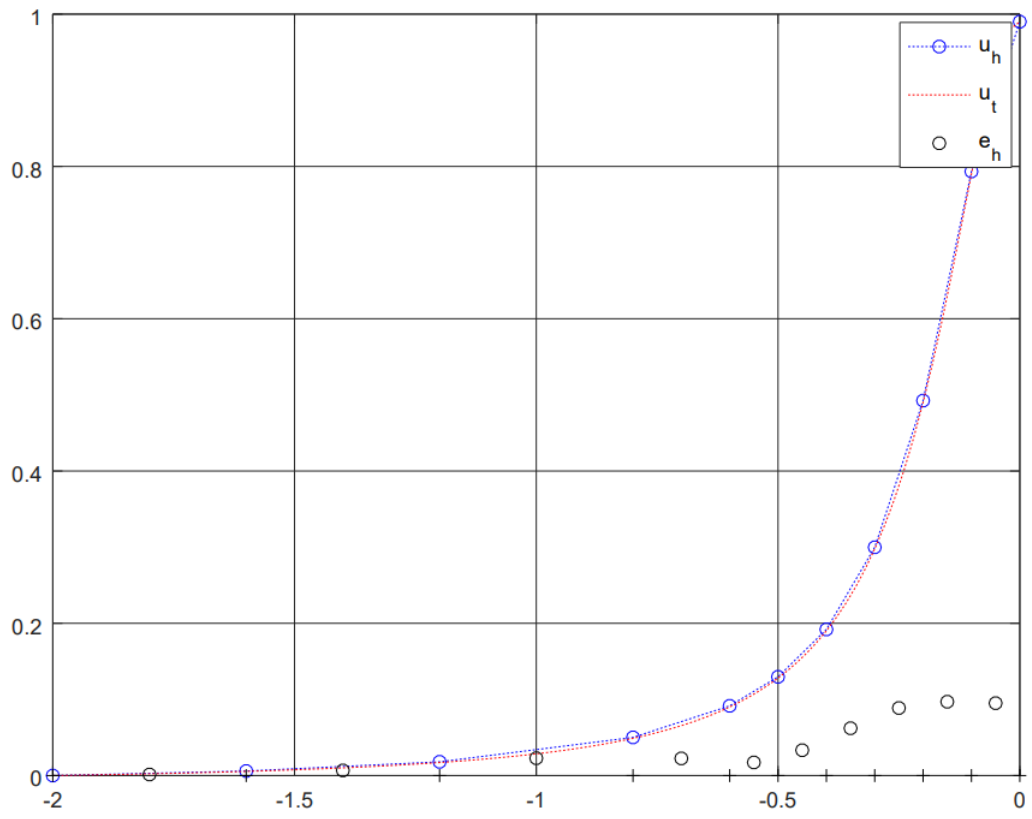


Рис. 5.3. Друге згущення сітки

ВИСНОВКИ

В роботі описано побудову скінченно-елементної апроксимації крайової задачі для ЗДР. Для крайової задачі Діріхле для рівняння другого порядку побудовано скінченно-елементну апроксимацію з використанням лінійних безперервних сплайнів на нерівномірній сітці. Побудований апостеріорний оцінювач похибки скінченно-елементного розв'язку крайової задачі на основі локальної задачі Діріхле. Написано програмний додаток на мові пакету MATLAB, який знаходить наближений розв'язок поставленої задачі, адаптуючи сітки методу скінченних елементів до структури точного розв'язку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бабенко К.И. Основы численного анализа. / Бабенко К.И. — М.: Наука, 1975.
2. Вербіцький В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь: навчальний посібник / Вербіцький В.В., Реут В.В — Одеський національний університет імені І.І. Мечникова — — Одеса 2017.
3. Дреботій Р. Побудова та аналіз hp - адаптивних схем методу скінчених елементів для задач дифузії-конвекції-реакції / Дреботій Р. — Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук — Львів 2019
4. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / Зенкевич О., Морган. К. — М.: Мир, 1986.
5. Марчук Г. Введение в проекционно сеточные методы / Марчук Г., В. Агошков — М.: Наука, 1981.
6. Репин С.И. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа / Репин С.И. — 191011 С.-Петербург, Фонтанка, 27, Матем, ин-т РАН, 2002.
7. Самарский А.А. Численные методы / Самарский А.А., Гулин А.В. — М.: Наука, 1989.
8. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс — Москва: Мир, 1977
9. Сьярле. Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Сьярле. Ф. — М.: Мир, 1980.
10. Шахно С. Чисельні методи лінійної алгебри / С. Шахно — Видавничий центр ЛНУ ім. І.Франка, Львів 2007
11. Ainsworth M. A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis / Ainsworth M., Tinsley OdenJ — Wiley, New York, 2000.
12. Asadzadeh M. An Introduction to the Finite Element Method for Differential Equations / Asadzadeh M. — John Wiley & Sons, Inc., 2021.
13. Brenner S. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. Brenner, L. Scott — Springer, 2008, 3ed

14. Sung W. Lee Chung Finite Element Method for Solids and Structures: A Concise Approach / Sung W. Lee; Peter W. Chung — Cambridge University Press, 2021.
15. Demkowicz L. Computing with hp-ADAPTIVE FINITE ELEMENTS I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / Demkowicz L. — Institute for Computational Engineering and Sciences The University of Texas at Austin, 2005
16. Tinsley J. Oden — Applied Functional Analysis / Tinsley J. Oden, Leszek F. Demkovich — Textbooks in mathematics — CRC Press 2017
17. Drebotiy R. Elementwise decomposition of a posteriori error estimator based on reference solution for hp-adaptive finite element method / Drebotiy R., Shynkarenko H. — Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. — Lviv, 2018
18. Nečas J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Problems / Nečas J. — Springer-Verlag — Berlin, 2012.
19. Thomée V. Galerkin finite element methods for parabolic problems, volume 25 of Springer Series in Computational Mathematics / Thomée V. — Springer-Verlag — Berlin, second edition, 2006.
20. Verfürth R. Adaptive Finite Element Methods / Verfürth R. Lecture Notes Winter Term — Ruhr-Universität Bochum 2007/08.

Додаток А. Програма мовою пакету MATLAB

```

function apostn_av
param_frag=0.5;
a=-2; b=0;
n=5;
h=(b-a)/n;
h0=h/20;
wh=a:h:b;
wh0=a:h0:b;

u_t=yy(wh0);
ifig=0;
for i=1:3
    ifig=1+ifig;
    [u_h]=mke(wh);
    % u_t=yy(wh);

    [dwh,ee]=error_estimate(wh,u_h);
    figure(ifig)
    plot(wh,u_h,'bo:',wh0,u_t,'r:',dwh,ee,'ko');
    legend('u_h','u_t','e_h');
    grid on
    hold on
    y(1:length(wh))=0;
    plot(wh,y,'k+');
    [wh]=mesh_Fragmentation(ee,wh,param_frag);
end

end

function [wh]=mesh_Fragmentation(ee, wh,param_frag)
eemax=max(ee);
id=find(ee>eemax*param_frag);

```

```

m=length(id);
for i=m:-1:1
    ii=id(i);
    x=(wh(ii)+wh(ii+1))*0.5;
    n=length(wh);
    wh=[wh(1:ii),x,wh(ii+1:n)];
end
end

function [dwh,du_h]=Gradient_of_u_h(wh,u_h)
for i=2:length(wh)
    du_h(i-1)=(u_h(i)-u_h(i-1))/(wh(i)-wh(i-1));
    dwh(i-1)=(wh(i)+wh(i-1))/2;
end
end

function [adu_h]=AvGradient(wh,du_h,dwh)
adu_h(1)=0;
n=length(wh);
for i=2:n-1
    x0=dwh(i-1);x1=dwh(i);
    y0=du_h(i-1);y1=du_h(i);
    x=wh(i);
    adu_h(i)=y0+(y1-y0)/(x1-x0)*(x-x0);
end
adu_h(n)=0;
end

function [dw_h,ee]=error_estimate(wh,u_h)

[dw_h,du_h]=Gradient_of_u_h(wh,u_h);
[adu_h]=AvGradient(wh,du_h,dw_h)
n=length(wh);
for i=2:n-2;

```

```

    h=wh(i+1)-wh(i);
    ee(i)=sqrt(h/6*((adu_h(i)-du_h(i))^2+(adu_h(i+1)-du_h(i))^2));
end
    ee(1)=sqrt(h/6*(2*(adu_h(2)-du_h(1))^2));
    ee(n-1)=sqrt(h/6*(2*(adu_h(n-1)-du_h(n-1))^2));
end

```

```

function [u_h]=mke(wh)
n=length(wh)-2;
for i=2:n-1
    i0=i+1;
    hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
    hi=wh(i0+1)-wh(i0);
    A(i,i)=1/hi0+1/hi;
    A(i,i-1)=-1/hi0;
    A(i,i+1)=-1/hi;
    % b(i)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
    b(i)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(i)=b(i)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
end
i0=2;
hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
hi=wh(i0+1)-wh(i0);
A(1,1)=1/hi0+1/hi;
A(1,2)=-1/hi;
%b(1)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
b(1)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(1)=b(1)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
i0=n+1;
hi0=wh(i0)-wh(i0-1);
hi=wh(i0+1)-wh(i0);
A(n,n)=1/hi0+1/hi;
A(n,n-1)=-1/hi0;

```

```

% b(n)=(hi0+hi)/2*f(wh(i0));
b(n)=(hi0)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0-1))/2));
    b(n)=b(n)+(hi)/6*(f(wh(i0))+2*f((wh(i0)+wh(i0+1))/2));
    b(n)= b(n)+yy(0)/hi0;
u_h=A\b';
u_h=[0;u_h;yy(0)];
end

```

```

function y=f(x)
y=-((5000*x^2)/(25*x^2 + 1)^3 - 50/(25*x^2 + 1)^2);
%y=2;
end

```

```

function y=yy(x)
%
%
y=1./(1+25.*x.*x)-1./101;
end

```