

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Неперервні моделі взаємодії двох популяцій»

«Continuous models of the interaction of two populations»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Стоянова Анна Петрівна

Керівник: проф. Євтухов В. М. _____

Рецензент: доц. Білозерова М. О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2022 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2022 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ		4
1 Математичні моделі		5
1.1	Передмова	5
1.2	Поняття, класифікація та основні властивості математичних моделей	5
2 Моделі біологічних систем, які описуються за допомогою різницевих рівнянь та диференціальних рівнянь 1-го порядку		9
2.1	Рівняння експоненціального зростання	9
2.2	Логістичне рівняння	13
2.3	Дослідження положення рівноваги за допомогою теорії стійкості	15
3 Моделі біологічних систем, які описуються одним дифе- ренціальним рівнянням		19
3.1	Динамічне моделювання за допомогою диференціальних рівнянь	19
3.2	Стаціонарний стан (точка спокою, особлива точка, стан рів- новаги)	20
3.3	Стійкість стану рівноваги	21
4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДЛЯ ДВОМІРНИХ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ		22
4.1	Основні означення	22
4.2	Побудова фазових портретів	24
4.3	Стійкість положення рівноваги	25
4.3.1	Лінійні системи	26
4.4	Стійкість положення рівноваги нелінійної системи	29
4.4.1	Метод функцій Ляпунова	31
5 Неперервні моделі для двох взаємодіючих популяцій		34
5.1	Конкуренція видів	34

5.2	Модель Лотки - Вольтерра	43
5.3	Матриця спільноти	50
5.4	<i>Приклад: хижак і дві конкуруючі жертви</i>	54
6	Висновки	58
	Література	59

ВСТУП

Магістерська робота присвячена дослідженню деяких математичних моделей в біології. При чому основна увага приділяється моделям, що описуються диференційними рівняннями і різницевиими рівняннями.

Робота складається зі вступу, 5 розділів, висновків і списку літератури, який містить 8 найменувань.

У першому розділі дається визначення математичні моделі реального процесу і правилам їхніх побудов.

У розділі під номером 2 розглядаються конкретні моделі, що описуються диференційним рівнянням 1-го порядку, а саме рівнянню експоненціального росту у вигляді диференційного рівняння та різницевого. При чому тут основна увага приділяється побудові математичних моделей біології, які є необхідними для подальшого дослідженню моделей 2-ох популяцій.

У розділі 3 розглядаються ті ж самі рівняння, але робляться висновки за допомогою особливих точок.

Розділ 4 присвячен деяким теоретичним відомостям щодо основних положень теорії стійкості за Ляпуновим та конкретним моделям, які описуються системами 2-ох диференціальних рівнянь. Тут і лежить основна частина роботи.

РОЗДІЛ 6

ВИСНОВКИ

В ході написання кваліфікаційної роботи я дослідила моделювання еволюції екосистеми на базі рівнянь Лотки - Вольтерра, розглянула прості моделі експонціального зростання та логістичне рівняння.

Було досліджено предметну область, існуючі розв'язки було описано загальними засобами для будовання моделей екосистем.

Визначили систему хижак-жертва, яка є складною екосистемою, для якої реалізовані довготривалі відносини між видами хижака і жертви, типовий приклад коеволуції. Відносини між хижаками та їх жертвами розвиваються циклічно, будучи ілюстрацією нейтрального рівноваги

Після дослідження можна сказати, що закон циклу впливає з припущення, що один з видів, якщо йому бракує їжі, може зникнути тільки протягом нескінченного часу, і це може здаватися ще більш далеким від реальності, ніж самий закон циклу. Ця обставина впливає з того факту, що серед гіпотез, які покладені в основу всього нашого викладу, є гіпотеза, що число індивідумів є позитивним числом, що змінюються безперервно, між тим як в дійсності це число може бути тільки цілим числом і не може бути менше одиниці. Таким чином ми повинні представляти собі, що якщо число індивідумів вигляду зробилося досить малим, його потрібно вважати нулем в прийнятті його значень менших, ніж одиниця, є припущенням чисто теоретичного характеру, позбавленим будь-якого реального сенсу.

БІБЛІОГРАФІЯ

- [1] Rosenzweig, m.L. and R.H. MacArthur (1963) Graphical representation and stability conditions of preadator-prey interactions, 209-223
- [2] Ayala, F.J., M.E. Gilpin, and J.G. Ehrenfeld (1973) Competition between species: Theoretical models and experimental tests, *Theoretical Pop. Biol.*, 4:331-355
- [3] Brauer F. and D.A Sanchez (1975) Constant rate population harvesting: equilibrium and stability, 12-30
- [4] Brauer, F. and A.C. Soudac (1985) Optimal harvesting in predator-prey systems, 111-128
- [5] Brauer, F., A.C. Soudack, and H.S. Jarosch (1976) Stabilization and destabilization of predator-prey system under harvesting and nutrient enrichment, 553-573
- [6] Dean, A.M. (1983) A simple model of mutualism, 409-417
- [7] Gause, G.F. (1934b) Experimental demonstration of Volterra's periodic oscillation in the number of animals, 44-48
- [8] Вольтерра, В. Математична теорія боротьби за існування / В. Вольтерра. - пров. з італ. П.П. Лазарев - М .; Наука, 1976. - 288 с