Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 22–26

УДК 517.51

А. Б. Метеличенко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

О ПРИБЛИЖЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

Роботу виконано за фінансової підтримки
Державного фонду фундаментальних досліджень України, грант № Ф7/329-2001.

Рекомендовано до друку науковим семінаром з теорії функцій ОНУ 13.09.2002 р.

Показано, що наближення функцій з простору $L_p[0,2\pi]$, $1 \le p < \infty$, інтерполяційними поліномами у середньому по рівновіддаленим вузлам має порядок найкращого наближення.

Показано, что приближение функций из пространства $L_p[0,2\pi]$, $1 \le p < \infty$, интерполяционными полиномами в среднем по равноотстоящим узлам имеет порядок наилучшего приближения.

It is shown that approximation of functions from the space $L_p[0,2\pi]$, $1 \le p < \infty$, by interpolation polynomials in the mean over equidistant knots has the order of the best approximation.

Введение. Пусть $L_p[0,2\pi]$ – множество всех комплекснозначных измеримых по Лебегу 2π-периодических функций F, для которых конечен функционал

$$\|F\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |F(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty .$$

Известно, что при $1 \le p < \infty$ $L_p[0,2\pi]$ – линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_p$, полное относительно нее, т. е. $L_p[0,2\pi]$ – банахово пространство. При $0 < p < 1$ величина $\|\cdot\|_p$ не обладает всеми свойствами нормы (не выполняется неравенство треугольника), тем не менее мы сохраним обозначение $\|\cdot\|_p$. Однако $L_p[0,2\pi]$, $0 < p < 1$, является полным метрическим пространством с метрикой $\rho(f,g) = \|f-g\|_p^p$, где $f, g \in L_p[0,2\pi]$.

Тригонометрическим полиномом порядка n называют выражение

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

где x – действительное переменное, а коэффициенты $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots, n$ не зависят от x и $|a_n| + |b_n| > 0$. Мы будем предполагать, что коэффициенты комплексны.

Рассмотрим равноотстоящие на $[0,2\pi]$ узлы $x_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0, 1,..., 2n$. Тригонометрические интерполяционные полиномы

$$L_n(f,x) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)D_n(x - x_k)$$

обычно используют для приближения непрерывной 2π-периодической функции f (здесь $D_n(x) = \dfrac{\sin(2n+1)x/2}{2\sin x/2}$ – ядро Дирихле).

Пусть $f \in L_p[0,2\pi]$. Функцию f на множестве лебеговой меры нуль можно задать произвольным образом и говорить о ее приближении интерполяционными полиномами, зависящими лишь от значений f в конечном числе узлов x_k, смысла не имеет. Поэтому для функции f мы рассмотрим целое множество интерполяционных полиномов по узлам $x_k + c$

$$L_{n,c}(f,x) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k + c)D_n(x - x_k - c),$$

где c – параметр из сегмента $[0,2\pi]$. Заметим, что $L_{n,0}(f) = L_n(f)$, $L_{n,c}(f)$ – тригонометрический полином порядка не выше n, а как оператор $L_{n,c}(f)$ – линейный и обладает свойством неподвижности для тригонометрических полиномов T_n порядка не выше n, т. е. $L_{n,c}(T_n) \equiv T_n$.

Пусть $\mathbf{T}(n)$ – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n. Величину

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n \in \mathbf{T}(n)} \|f - T_n\|_p, \quad 0 < p < \infty,$$

называют наилучшим приближением функции f при помощи тригонометрических полиномов.

Приближением функции f интерполяционными полиномами в среднем по узлам интерполяции назовем величины

$$\int_0^{2\pi} \|f - L_{n,c}(f)\|_p dc, \quad 1 \le p < \infty, \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \|f - L_{n,c}(f)\|_p^p dc, \quad 0 < p < 1.$$

П о с т а в и м с л е д у ю щ у ю з а д а ч у: оценить данное приближение через наилучшее, установив тем самым его скорость.

Нам понадобятся следующие неравенства Марцинкевича и Зигмунда.

Теорема Марцинкевича (см. [1], [2, с. 46-48]). *Пусть $S(y)$ – тригонометрический полином порядка не выше n, а $y_k, k = 0, 1,..., 2n$ – произвольные узлы, отстоящие друг от друга на величину $\dfrac{2\pi}{2n+1}$. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} |S(y)|^p dy \le A_p^p \frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} |S(y_k)|^p, \quad 1 < p < \infty. \tag{1}$$

Теорема Зигмунда – Марцинкевича (см. [3]). *Пусть* $S(y)$ *– тригонометрический полином порядка не выше* n, *а* $y_k, k = 0, 1, ..., 2n$ *– произвольные узлы, отстоящие друг от друга на величину* $\frac{2\pi}{2n+1}$. *Тогда*

$$\left\{\int_0^{2\pi} |S(y)|^p dy\right\}^{1/p} \le B_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} |S(y_k)|, \quad 0 < p < 1. \tag{2}$$

В этих теоремах A_p и B_p зависят только от p.

Основные результаты. Сформулируем полученные результаты в виде двух теорем.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p[0,2\pi]$, $1 < p < \infty$. *Имеет место оценка*

$$\int_0^{2\pi} \|f - L_{n,c}(f)\|_p dc \le \widetilde{A}_p E_n(f)_p, \tag{3}$$

где $\widetilde{A}_p$ *зависит только от* p.

Доказательство. Пусть g – произвольная функция из пространства $L_p[0,2\pi]$, $1 < p < \infty$. Применяя неравенство (1) для полинома $L_{n,c}(g)$ и равноотстоящих узлов $y_k = x_k + c$, получим

$$\int_0^{2\pi} |L_{n,c}(g,x)|^p dx \le A_p^p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} |L_{n,c}(g, x_k + c)|^p.$$

Затем проинтегрируем обе части этого соотношения по параметру c на сегменте $[0,2\pi]$ и воспользуемся периодичностью функции g. В результате имеем

$$\int_0^{2\pi} \|L_{n,c}(g)\|_p^p dc \le 2\pi A_p^p \|g\|_p^p. \tag{4}$$

Согласно неравенству Гельдера с показателями p и q, связанными равенством $1/p + 1/q = 1$,

$$\int_0^{2\pi} \|L_{n,c}(g)\|_p dc \le (2\pi)^{1/q} \left\{\int_0^{2\pi} \|L_{n,c}(g)\|_p^p dc\right\}^{1/p}.$$

Из последнего соотношения и оценки (4) следует

$$\int_0^{2\pi} \|L_{n,c}(g)\|_p dc \le 2\pi A_p \|g\|_p. \tag{5}$$

Поскольку при $p \ge 1$ $L_p[0,2\pi]$ является линейным нормированным пространством, то для каждой функции f из этого пространства существует тригонометрический полином наилучшего приближения T_n $(n = 0, 1, 2, ...)$. Теперь воспользуемся неравенством треугольника для $L_p[0,2\pi]$, свойствами неподвижности и линейности оператора $L_{n,c}$, а также соотношением (5)

$$\int_0^{2\pi}\left\|f-L_{n,c}(f)\right\|_p dc \le 2\pi\left\|f-T_n\right\|_p+\int_0^{2\pi}\left\|L_{n,c}(f-T_n)\right\|_p dc \le 2\pi\left(1+A_p\right)E_n(f)_p,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_1[0,2\pi]$, $0<p<1$. *Имеет место оценка*

$$\int_0^{2\pi}\left\|f-L_{n,c}(f)\right\|_p^p dc \le \widetilde{B}_p^p E_n(f)_1^p, \tag{6}$$

где $\widetilde{B}_p$ *зависит только от* p.

Доказательство. Пусть $g \in L_1[0,2\pi]$. Рассуждая также как и при доказательстве теоремы 1, только в данном случае, используя оценку (2), при $0<p<1$ получим

$$\int_0^{2\pi}\left\|L_{n,c}(g)\right\|_p dc \le 2\pi B_p\|g\|_1. \tag{7}$$

В силу неравенства Гельдера (с показателем $1/p$) для всякой функции $F \in L_1[0,2\pi]$ выполнено

$$\|F\|_p^p \le (2\pi)^{1-p}\|F\|_1^p, \quad 0<p<1. \tag{8}$$

Применим последнее соотношение для функции $\left\|L_{n,c}(g)\right\|_p$, зависящей от c, а затем воспользуемся оценкой (7)

$$\int_0^{2\pi}\left\|L_{n,c}(g)\right\|_p^p dc \le (2\pi)^{1-p}\left\{\int_0^{2\pi}\left\|L_{n,c}(g)\right\|_p dc\right\}^p \le 2\pi B_p^p\|g\|_1^p. \tag{9}$$

Теперь мы можем перейти непосредственно к функции f и ее полиному наилучшего приближения T_n, для которых имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi}\left\|f-L_{n,c}(f)\right\|_p^p dc \le 2\pi\left\|f-T_n\right\|_p^p+\int_0^{2\pi}\left\|L_{n,c}(f-T_n)\right\|_p^p dc.$$

Применим к первому слагаемому правой части соотношение (8), а ко второму – (9)

$$\int_0^{2\pi}\left\|f-L_{n,c}(f)\right\|_p^p dc \le 2\pi\left((2\pi)^{1-p}+B_p^p\right)\left\|f-T_n\right\|_1^p=\widetilde{B}_p^p E_n(f)_1^p.$$

Теорема доказана.

Обратим внимание, что для функций из пространства $L_1[0,2\pi]$ в оценке (6) под знаком интеграла было взято $\|\cdot\|_p^p$ при $0<p<1$.

Введение параметра, от которого зависит приближающая функция, рассматривалось в разных работах (см., например, [4]). Дальнейшее развитие этого приема связано с работами К. В. Руновского (см., например, [5]).

В заключение отметим, что приближение по норме $L_p[0,2\pi]$ непрерывной функции f интерполяционными полиномами (с фиксированными узлами) оценивалось ранее разными авторами через наилучшее равномерное приближение f. В данной работе оценки (3) и (6) получены для функций из пространства $L_p[0,2\pi]$, $1 \le p < \infty$, и через наилучшее приближение в этом же пространстве.

1. **Marcinkiewicz J.** Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Litt. Sci. Szeged.– 1937.– V. 8.– P. 127–130.
2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: В 2 т.– М.: Мир, 1965.– Т. 2.– 540 с.
3. **Marcinkiewicz J., Zygmund A.** Mean values of trigonometric polynomials // Fund. Math.– 1937.– V. 28.– P. 131–166.
4. **Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.** Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб.– 1975.– Т. 98, № 3.– С. 395–415.
5. **Руновский К. В.** О семействах линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб.– 1993.– Т. 184, № 2.– С. 33–42.

Получено 20.09.2002 г.