

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

Інститут математики, економіки і механіки

Кафедра обчислюваної математики

**Дипломна робота**

бакалавра

на тему: «Змішана задача теплопровідності для сектора кола»

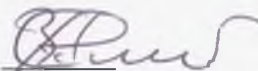
«Mixed heat conduction problem for the sector of circle»

Виконав: студент денної форми навчання

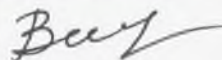
напряму підготовки 6.040301 Прикладна математика

Васильєв Віктор Вікторович

Керівник К.Ф.-М.Н. доц. Реут В. В.



Рецензент проф. Вербицький В.В.

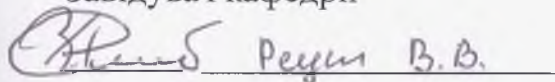


Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ 13 від 08 червня 2017 р.

Завідувач кафедри



(підпис) (прізвище,

ініціали)

Захищено на засіданні ЕК № 6

протокол № 3 від 25.06.2017

р.

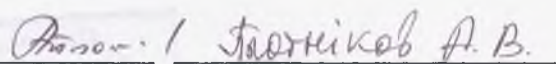
Оцінка добре 1 С

177

(за національною шкалою, шкалою

ECTS, бали)

Голова ЕК



(підпис)

(прізвище, ініціали)

Одеса – 2017

Ш/к 593565

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	.....
Постановка задачи.....	.....
§1. Подбор ядра интегрального преобразования.....	.....
§2. Сведение исходной задачи к одномерной и ее решение.....	.....
§3. Сведение исходной задачи к интегральному уравнению и его исследование.....	.....
§4. Решение интегрального уравнения.....	.....
§5. Расчетные формулы.....	.....
Заключение.....	.....
Литература.....	.....

## Введение

Задача теплопроводности для различных областей имеет важное значение при расчете элементов конструкции в машиностроении. В последнее время, в связи с развитием механики разрушений, **актуальность** приобрели задачи при наличии дефектов в виде разрезов, либо тонких включений.

Рассматривалась смешанная задача теплопроводности для сектора круга прямолинейные края которого поддерживаются при температуре равной нулю, а на криволинейной границе выполнены условия теплообмена с окружающей средой. Внутри сектора имеется трещина, на берегах которой задан тепловой поток. Внутри области заданы источники тепла интенсивностью. **Целью** настоящей работы является нахождение скачка температуры при переходе через трещину.

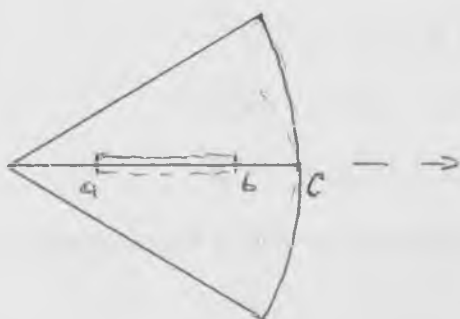
Математически такая задача сводится к отысканию решения гармонического уравнения удовлетворяющего условиям равенства на прямолинейных границах, условиям третьего рода на криволинейной границе и условию задания на берегах трещины теплового потока.

После применения конечного синус-преобразования Фурье по угловой переменной задача сводится к одномерной краевой, в правой части дифференциального уравнения которой фигурирует неизвестный скачок температуры. Решение одномерной краевой задачи строится с помощью функции Грина. После обращения интегрального преобразования и удовлетворения условия на разрезе проблема сводится к решению сингулярного уравнения на конечном интервале относительно искомого скачка температуры. Решение этого уравнения строится методом ортогональных многочленов путем разложения искомой функции в ряд по многочленам Чебышева второго рода. При этом, коэффициенты разложения являются решением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, допускающих метод редукции.

Изложенная методика была реализована на языке C# (Си шарп). При заданных значениях параметров был построен график скачка температуры при переходе через разрез.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривалась смешанная задача теплопроводности для сектора круга, прямолинейные края которого поддерживаются при температуре равной нулю, а на криволинейной части границы выполнены условия теплообмена с окружающей средой. Внутри сектора имеется трещина, на берегах которой задан тепловой поток. Внутри области заданы источники тепла интенсивностью  $g(r, \theta)$ . Требуется найти скачок температуры при переходе через трещину.



Математически такая задача сводится к отысканию решения гармонического уравнения

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = g(r, \theta), 0 < r < c, |\theta| < \alpha$$

удовлетворяющего условиям равенства нулю температур на прямолинейных границах

$$(2) \quad \omega|_{\theta=\pm\alpha} = 0$$

условиям третьего рода на криволинейной границе

$$(3) \quad h\omega + \frac{\partial \omega}{\partial r} \Big|_{r=c} = 0$$

условиям на трещине

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pm 0} = T(r), a < r < b$$

здесь  $\omega$  – искомая температура в точке с координатами  $(r, \theta)$ .

Решение задачи (1)-(4) будем искать в классе функций дважды непрерывно дифференцируемой внутри области  $\Omega = \{0 < r < c, |\theta| < \alpha\} / \{\theta = 0, a < r < b\}$  и непрерывно дифференцируемых вплоть до границы. В особых точках области дадим асимптотику

$$(5) \quad \omega|_{r \rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$$(6) \quad \omega = o(\sqrt{R_a}), R_a \rightarrow 0, R_a = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}$$

$$\omega = o(\sqrt{R_b}), R_b \rightarrow 0, R_b = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}$$

обеспечивающей конечность интеграла энергии.

Из постановки задачи следует существование непрерывной в  $(a; b)$  функции описывающей скачок температуры при переходе через трещину

$$(7) \quad \omega|_{\theta=-0} - \omega|_{\theta=+0} = X(r)$$

Причем

$$(8) \quad X(r) \equiv 0, r \notin (a; b)$$

$$X(r) = o(|r - a|)^{\frac{1}{2}}, r \rightarrow a$$

$$X(r) = o(|b - r|)^{\frac{1}{2}}, r \rightarrow b$$

Целью настоящей работы является отыскание функции  $X(r)$ .

## Заключение

1. Смешанная задача теплопроводности для сектора круга, прямолинейные края которого поддерживаются при температуре равной нулю, а на криволинейной части границы выполнены условия третьего рода, при наличии разреза сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно скачка температуры.
2. С помощью метода ортогональных многочленов решение уравнения сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, допускающих метод редукции.
3. Построен график зависимости скачка температуры вдоль разреза.

#### 4. Литература

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений // Москва, «Наука», 1982-344с.
2. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень // Одесс, «Астропринт», 2005-183с.
3. Снеддон И. Преобразование Фурье // Москва, изд-во «Иностранная литература», 1955-667с.
4. Справочник по специальным функциям (под. ред. М. Абрамовица и И. Стигана) // Москва, «Наука», 1979-832с.

