Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i мех. – 2010. – Т. 15, вип. 19. – С. 126–134

УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Щоголев С. А. Про один особливий випадок в теорiї коливань квазiлiнiйних диференцiальних систем з повiльно змiнними параметрами. Для квазiлiнiйної диференцiальної системи другого порядку з нульовими власними значеннями матрицi лiнiйної частини отримано умови iснування частинного розв'язку, зображуваного у виглядi абсолютно та рiвномiрно збiжних рядiв Фур'є з повiльно змiнними коефiцiєнтами та частотами, в одному особливому випадку.
Ключовi слова: диференцiальнi системи, повiльно змiнний, ряди Фур'є.

Щёголев С. А. Об одном особом случае в теории колебаний квазилинейных дифференциальных систем с медленно меняющимися параметрами. Для квазилинейной дифференциальной системы второго порядка с нулевыми собственными значениями матрицы линейной части получены условия существования частного решения, представимого в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотами, в одном особом случае.
Ключевые слова: дифференциальные системы, медленно меняющийся, дифференциальный, ряды Фурье.

Shchogolev S. A. On one special case in the theory of oscillations of quasilinear differential sysytems with slowly varying parameters. For the quasilinear second order differential system with zero eigenvalues of the matrix of the linear part the conditions of the existence of the particular solution, which represented by a Fourier-series with slowly varying coefficients and frequences, are obtained in the some special case.
Key words: differential systems, slowly varying, Fourier series.

Введение. Статья посвящена квазилинейным дифференциальным системам с медленно меняющимися параметрами [1,2] и продолжает исследования [3-5], связанные с установлением существования для таких систем признаков существования частных решений, представимых абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотами.

1. Основные обозначения и определения.

Пусть

$$G = \left\{t, \varepsilon : \ t \in \mathbf{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\right\}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(t,\varepsilon)$ принадлежит классу $S_m \quad (m \in N \cup \{0\})$, если выполнены следующие условия:*

1) $f : G \to \mathbf{C}$,

2) $f(t,\varepsilon) \in \mathrm{C}^m(G)$ по t,

3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |f_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty \quad (0 \le k \le m)$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ *принадлежит классу* $B_m \quad (m \in \mathbf{N} \cup \{0\})$*,, если эта функция представима в виде:*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

причём выполнены условия:

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S_m, \quad d^k f_n(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon) \quad (n \in \mathbf{Z}, \quad 0 \le k \le m)$

2) $\|f\|_{B_m} \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{G} |f_{nk}(t,\varepsilon)| < +\infty,$

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau, \ \varphi(t,\varepsilon) \in \mathbf{R}^+, \ \varphi(t,\varepsilon) \in S_m, \ \inf\limits_G \varphi(t,\varepsilon) > 0.$

Функции класса B_m образуют линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство введением нормы $\|\cdot\|_{B_m}$. Справедлива цепочка включений:

$$B_0 \supset B_1 \supset \cdots \supset B_m$$

В работе [5] рассмотрены некоторые свойства фунций класса B_m.

Для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta) \in B_m$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta) \exp(-in\theta)d\theta, \ n \in \mathbf{Z}.$$

Пусть задан вектор $x(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{colon}(x_1(t,\varepsilon,\theta),\ldots,x_n(t,\varepsilon,\theta))$ и матрица $P(t,\varepsilon,\theta) = (p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=\overline{1,n}}$, элементы которых принадлежат классу B_m. Под векторной нормой $\|x\|^*_{B_m}$ и матричной нормой $\|P\|^*_{B_m}$ будем понимать:

$$\|x\|^*_{B_m} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{B_m}, \ \|P\|^*_{B_m} = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} \|p_{jk}\|_{B_m}.$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую квазилинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)x_k + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,x_2), j = 1,2, \qquad (1)$$

$a_{jk} \in S_m$, $f_j \in B_m$, $x_1, x_2 \in \overline{D}$, где $\overline{D}$ — замыкание некоторой ограниченной области D комплексной плоскости, функции X_1, X_2 принадлежат классу B_m относительно t,ε,θ и имеют в $\overline{D}$ непрерывные частные производные по x_1, x_2 до некоторого порядка $2q+3$ включительно. $\mu \in \mathbf{R}^+$.

Как и в работе [5], предполагаем, что уравнение $\det(A(t,\varepsilon) - \lambda E) = 0$, где $A(t,\varepsilon) = (a_{jk}(t,\varepsilon))$, имеет тождественно равный нулю корень кратности 2, которому соответствует элементарный делитель также кратности 2. В этом случае матрица $A(t,\varepsilon)$ имеет вид:

$$A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} a(t,\varepsilon) & a_{12}(t,\varepsilon) \\ a_{21}(t,\varepsilon) & -a(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

причём $a_{12}a_{21} = -a^2$. В частности, $a(t,\varepsilon), a_{12}(t,\varepsilon)$ могут быть тождественными нулями. Если это не так, то предположим, что

$$\inf_G |a(t,\varepsilon)| > 0,\ \inf_G |a_{12}(t,\varepsilon)| > 0$$

Тогда, как показано в [5], с помощью невырожденного линейного преобразования неизвестных систему (1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \tfrac{dz_1}{dt} &= \varepsilon\alpha(t,\varepsilon)z_2 + h_1(t,\varepsilon,\theta) + \mu Z_1(t,\varepsilon,\theta,z_1,z_2),\\ \tfrac{dz_2}{dt} &= b(t,\varepsilon)z_1 + h_2(t,\varepsilon,\theta) + \mu Z_2(t,\varepsilon,\theta,z_1,z_2), \end{aligned} \tag{2}$$

$\alpha \in S_{m-1}$, $b \in S_m$, $h_1, h_2 \in B_m$, $\inf\limits_G |b| > 0$.

Поэтому сразу будем предполагать, что система (1) имеет вид (2).

Введём функции:

$$\xi_{10}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(h_1(t,\varepsilon,\theta))}{in\varphi(t,\varepsilon)} \exp(in\theta) - \frac{\Gamma_0(h_2(t,\varepsilon,\theta))}{b(t,\varepsilon)}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \xi_{20}(t,\varepsilon,\theta) = -b(t,\varepsilon) \sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(h_1(t,\varepsilon,\theta))}{n^2\varphi^2(t,\varepsilon)} \exp(in\theta) + \\ + \sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(h_2(t,\varepsilon,\theta))}{in\varphi(t,\varepsilon)} \exp(in\theta) + N_0(t,\varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь функция $N_0(t,\varepsilon)$ определяется из уравнения:

$$Q(t,\varepsilon,N_0) = 0, \tag{5}$$

где

$$Q(t,\varepsilon,N_0) = \Gamma_0(Z_1(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20}))$$

В работе [5] были получены признаки существования у системы (2) частных решений классов B_k $(0 \leq k \leq m)$ в предположении, что уравнение (5) имеет корень $N_0(t,\varepsilon)$ такой, что:

$$\inf_G \left| \frac{dQ(t,\varepsilon,N_0)}{dN_0} \right| > 0. \tag{6}$$

Целью данной работы является установление признаков существования указанных решений в особом случае, а именно при условии, что равенство (5) выполняется тождественно $\forall\ t,\varepsilon \in G$ и $\forall\ N_0$, т. е. когда условие (6) заведомо не выполнено. Отметим, что такая ситуация встречается во многих задачах теории колебаний [6, 7].

3. Некоторые вспомогательные утверждения.

Введём следующие обозначения:

$$(Z)_0 = Z(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10}(t,\varepsilon,\theta),\xi_{20}(t,\varepsilon,\theta)),$$

$$\eta_{11}(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((Z_1)_0)}{in\varphi(t,\varepsilon)}\exp(in\theta)-\frac{\Gamma_0((Z_2)_0)}{b(t,\varepsilon)},$$

$$\eta_{21}(t,\varepsilon,\theta)=-b(t,\varepsilon)\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((Z_1)_0)}{n^2\varphi^2(t,\varepsilon)}\exp(in\theta)+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((Z_2)_0)}{in\varphi(t,\varepsilon)}\exp(in\theta),$$

$$Q_1(t,\varepsilon,N_0)=\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_1}\right)_0\eta_{11}(t,\varepsilon,\theta)+\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\eta_{21}(t,\varepsilon,\theta)\right).$$

Лемма 1. *Пусть система (2) удовлетворяет следующим условиям:*
1) $\Gamma_0(h_1(t,\varepsilon,\theta))\equiv0\ \forall\ t,\varepsilon\in G$,
2) равенство (5) выполняется тождественно $\forall\ t,\varepsilon\in G$ *и* $\forall\ N_0$,
3) уравнение

$$Q_1(t,\varepsilon,N_0)=0 \tag{7}$$

имеет корень $N_0(t,\varepsilon)$, *удовлетворяющий условию:*

$$\inf_G\left|\frac{dQ_1(t,\varepsilon,N_0)}{dN_0}\right|>0, \tag{8}$$

4) функции Z_1,Z_2 *имеют непрерывные частные производные по* z_1,z_2 *до порядка* $2q+3$ *включительно, и если* $z_1,z_2\in B_m$, *то эти частные производные также из класса* B_m.

Тогда для достаточно малых значений параметра μ *существует преобразование вида:*

$$z_j=\widetilde{\xi}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\sum_{k=1}^{2}\psi_{jk}(t,\varepsilon,\mu)\widetilde{z}_k,\ j=1,2 \tag{9}$$

где $\widetilde{\xi}_j,\psi_{jk}\in B_m$ $(j,k=1,2)$, *приводящее систему (2) к виду:*

$$\begin{gathered}\tfrac{d\widetilde{z}_j}{dt}=(j-1)b(t,\varepsilon)\widetilde{z}_j+\textstyle\sum_{k=1}^2\left(\sum_{l=1}^q a_{jkl}(t,\varepsilon)\mu^l\right)\widetilde{z}_k+\\ +\varepsilon c_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\varepsilon\textstyle\sum_{k=1}^2 r_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{z}_k+\\ +\mu^{q+1}\textstyle\sum_{k=1}^2 w_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{z}_k+\mu\widetilde{Z}_j(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\mu),\ j=1,2,\end{gathered} \tag{10}$$

где $a_{jkl}\in S_m$, c_j, d_j, r_{jk}, $w_{jk}\in B_{m-1}$, $\widetilde{Z}_j$ *содержат слагаемые не ниже 2-го порядка относительно* $\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2$.

Доказательство. Наряду с системой (2) рассмотрим вспомогательную систему:

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_1}{d\theta}=h_1(t,\varepsilon,\theta)+\mu Z_1(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\xi_2),\\ \varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_2}{d\theta}=b(t,\varepsilon)\xi_1+h_2(t,\varepsilon,\theta)+\mu Z_2(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\xi_2),\end{gathered} \tag{11}$$

в которой t,φ рассматриваются как постоянные.

Построим частичную сумму разложения в ряд по степеням μ 2π-периодического по θ решения системы (11):

$$\widetilde{\xi}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)=\sum_{k=1}^{2q-1}\xi_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\mu^k,\ j=1,2. \tag{12}$$

Коэффициенты ξ_{jk} тогда должны определяться как 2π-периодические по θ решения цепочки линейных систем:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j0}}{d\theta}=(j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{10}+h_j(t,\varepsilon,\theta),\ j=1,2, \tag{13}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j1}}{d\theta}=(j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{11}+(Z_j)_0,\ j=1,2, \tag{14}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j2}}{d\theta}=(j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{12}+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial\xi_k}\right)_0\xi_{k1},\ j=1,2, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\varphi(t,\varepsilon)\tfrac{d\xi_{jl}}{d\theta}=(j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{1l}+\textstyle\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial\xi_k}\right)_0\xi_{k,l-1}+\\ +F_{jl}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20},\dots,\xi_{1,l-2},\xi_{2,l-2}),\ j=1,2,\ l=\overline{3,2q-1}.\end{gathered} \tag{16}$$

F_{jl} — полиномы относительно $\xi_{10},\xi_{20},\dots,\xi_{1,l-2},\xi_{2,l-2}$ с 2π-периодическими по θ коэффициентами. Эти коэффициенты зависят от производных до $(l-1)$-го порядка от функций Z_1,Z_2 по z_1,z_2.

Наша задача показать, что условия леммы обеспечивают существование у каждой из систем (13)–(16) 2π-периодического по θ решения, и все эти решения будут принадлежать классу B_m.

Условие 1) леммы обеспечивает существование у порождающей системы (13) 2π-периодического по θ решения $\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta)$, определяемого формулами (3), (4), из которых принадлежность этого решения классу B_m следует очевидным образом. В силу условия 2) леммы система (14) также имеет 2π-периодическое по θ решение, определяемое формулами:

$$\xi_{11}(t,\varepsilon,\theta)=\eta_{11}(t,\varepsilon,\theta),\ \xi_{21}(t,\varepsilon,\theta)=\eta_{21}(t,\varepsilon,\theta)+N_1(t,\varepsilon), \tag{17}$$

где $N_1(t,\varepsilon)$ — пока не определённая функция. Запишем условия существования 2π-периодического по θ решения системы (15):

$$\Gamma_0\left(\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_k}\right)_0\xi_{k1}\right)=0. \tag{18}$$

Подставив сюда выражения (17), получим:

$$\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_1}\right)_0\eta_{11}+\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\eta_{21}\right)+\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)N_1=0.$$

Но поскольку

$$\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)=\frac{dQ(t,\varepsilon,N_0)}{dN_0},$$

то с учётом условия 2) леммы и выражения для функции Q_1 получим:

$$Q_1(t,\varepsilon,N_0)=0.$$

То есть получили уравнение (7). Это уравнение не содержит функции $N_1(t,\varepsilon)$, а только $N_0(t,\varepsilon)$, и согласно условию 3) леммы оно имеет корень, удовлетворяющий неравенству (8). В уравнении (7) $N_0(t,\varepsilon)$ содержится не только в функциях $(\partial Z_1/\partial\xi_k)_0$, но и в функциях η_{11}, η_{21}, причём:

$$\frac{d\eta_{11}}{dN_0}=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{1}{in\varphi}\,\Gamma_n\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)\exp(in\theta)-\frac{1}{b}\,\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\xi_2}\right)_0\right), \tag{19}$$

$$\frac{d\eta_{21}}{dN_0}=-b\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{1}{n^2\varphi^2}\,\Gamma_n\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)\exp(in\theta)+$$

$$+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{1}{in\varphi}\,\Gamma_n\left(\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\xi_2}\right)_0\right)\exp(in\theta). \tag{20}$$

Рассмотрим теперь систему (16), положив в ней $l=s+2$, и, выделив явно слагаемые, зависящие от ξ_{js}, $\xi_{j,s+1}$ $(j=1,2)$ (t,ε в аргументах функций для сокращения записей опустим):

$$\begin{gathered}\varphi\tfrac{d\xi_{j,s+2}}{d\theta}=(j-1)b\xi_{1,s+2}+\textstyle\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial Z_j}{\partial\xi_k}\right)_0\xi_{k,s+1}+\\ +\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 Z_j}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_\beta}\right)_0(\xi_{\beta 1}\xi_{\alpha s}+\xi_{\alpha 1}\xi_{\beta s})+\\ +\Xi_{j,s+2}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20},\ldots,\xi_{1,s-1},\xi_{2,s-1}),\ j=1,2.\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $\Xi_{j,s+2}$ — полиномы относительно $\xi_{10},\xi_{20},\ldots,\xi_{1,s-1},\xi_{2,s-1}$.

Для $k=\overline{1,s+1}$ можем записать:

$$\xi_{1k}(t,\varepsilon,\theta)=\eta_{1k}(t,\varepsilon,\theta),\ \xi_{2k}(t,\varepsilon,\theta)=\eta_{2k}(t,\varepsilon,\theta)+N_k(t,\varepsilon), \tag{22}$$

где η_{1k},η_{2k} — некоторые известные 2π-периодические по θ функции. Предположим, что функции $\xi_{10},\xi_{20},\ldots,\xi_{1,s-1},\xi_{2,s-1}$ уже определены полностью, включая $N_{s-1}(t,\varepsilon)$, и эти функции принадлежат классу B_m. А функции $N_s(t,\varepsilon)$, $N_{s+1}(t,\varepsilon)$ ещё подлежат определению. Представим функции $\eta_{j,s+1}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j=1,2)$ в виде:

$$\eta_{j,s+1}=\eta_{j,s+1}^{(1)}+\eta_{j,s+1}^{(2)}, \tag{23}$$

где $\eta_{j,s+1}^{(1)}$ — частное 2π-периодическое по θ решение системы:

$$\varphi\frac{d\xi_{j,s+1}}{d\theta}=(j-1)b\xi_{j,s+1}+\left(\frac{\partial Z_j}{\partial\xi_2}\right)_0N_s,\ j=1,2, \tag{24}$$

а $\eta^{(2)}_{j,s+1}$ — частное 2π-периодическое по θ решение системы:

$$\varphi\frac{d\xi_{j,s+1}}{d\theta}=(j-1)b\xi_{j,s+1}+\left(\frac{\partial Z_j}{\partial\xi_1}\right)_0\eta_{1s}+\left(\frac{\partial Z_j}{\partial\xi_2}\right)_0\eta_{2s}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 Z_j}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_\beta}\right)_0(\xi_{\beta 1}\xi_{\alpha,s-1}+\xi_{\alpha 1}\xi_{\beta,s-1})+ \tag{25}$$
$$+\Xi_{j,s+1}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20},\dots,\xi_{1,s-2},\xi_{2,s-2}),\ j=1,2.$$

Условие существования 2π-периодического по θ решения системы (24) имеет вид:

$$\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)\ N_s=0. \tag{26}$$

Но поскольку коэффициент при N_s в этом уравнении тождественно равен нулю, то равенство (26) выполнено при любом N_s. Далее имеем:

$$\eta^{(1)}_{1,s+1}=N_s\left(\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)}{in\varphi}\exp(in\theta)-\frac{\Gamma_0\left(\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\xi_2}\right)_0\right)}{b}\right),$$

$$\eta^{(1)}_{2,s+1}=N_s\left(-b\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n\left(\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\right)}{n^2\varphi^2}\exp(in\theta)+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n\left(\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\xi_2}\right)_0\right)}{in\varphi}\exp(in\theta)\right).$$

Или:

$$\eta^{(1)}_{j,s+1}=\frac{\partial\eta_{j1}}{\partial N_0}\ N_s,\ j=1,2. \tag{27}$$

Из равенства (23) тогда вытекает, что существует и 2π-периодическое по θ решение системы (25), поскольку $\eta_{j,s+1}$ $(j=1,2)$ — уже известные 2π-периодические по θ функции.

Запишем теперь условие существования 2π-периодического по θ решения системы (21). С учётом условия 2) леммы, выражения для функции $Q_1(t,\varepsilon,N_0)$, а также (22), (23), (27) это условие принимает вид:

$$\frac{dQ_1(t,\varepsilon,N_0)}{dN_0}\ N_s=K_s, \tag{28}$$

где

$$K_s=-\Gamma_0\left[\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_1}\right)_0\eta^{(2)}_{1,s+1}+\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\xi_2}\right)_0\eta^{(2)}_{2,s+1}+\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial\xi_1^2}\right)_0\eta_{11}\eta_{1s}+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial\xi_1\xi_2}\right)_0(\eta_{11}\eta_{2s}+\eta_{21}\eta_{1s}+N_1\eta_{1s})+\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial\xi_2^2}\right)_0(\eta_{21}\eta_{2s}+N_1\eta_{2s})+$$
$$\left.+\Xi_{1,s+2}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20},\dots,\xi_{1s},\xi_{2s})\right]$$

— известная функция.

В силу условия 3) леммы функция $N_s = N_s(t,\varepsilon)$ однозначно определяется из уравнения (28).

Таким образом все функции $\xi_{jl}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j = 1,2;\ l = \overline{0,2q-1})$ оказываются полностью определёнными. И в силу условия 4) леммы все эти функции принадлежат классу B_m. Следовательно, в силу (12) полностью определёнными и принадлежащими классу B_m будут и функции $\widetilde{\xi}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j = 1,2)$.

В системе (2) совершим подстановку:

$$z_j = \widetilde{\xi}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + y_j,\ j = 1,2, \tag{29}$$

где y_1, y_2 - новые неизвестные функции, относительно которых получим систему:

$$\begin{gathered}\tfrac{dy_j}{dt} = (j-1)b(t,\varepsilon)y_1 + (2-j)\varepsilon\alpha(t,\varepsilon)y_2 + \varepsilon\widetilde{h}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \\ +\mu^{2q}k_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \textstyle\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{jkl}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)y_k + \\ +\mu^{q+1}\textstyle\sum_{k=1}^{q} v_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k + \mu H_j(t,\varepsilon,\theta,y_1,y_2,\mu),\ j = 1,2.\end{gathered} \tag{30}$$

В работе [5] (лемма 3.1) было показано, что систему вида (30) можно привести к виду (10).

Лемма доказана.

4. Основные результаты.

Из леммы 1 и результатов работы [5] вытекают следующие утверждения.

Введём матрицы $A_l(t,\varepsilon) = (a_{jkl}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2}$, $(l = \overline{1,q})$ (a_{jkl} определены в лемме 1),

$$J(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t,\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, \quad A^*(t,\varepsilon,\mu) = J(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} A_l(t,\varepsilon)\mu^l.$$

Теорема 1. *Пусть система (10) удовлетворяет условиям:*
1) собственные значения $\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)$ $(j = 1,2)$ матрицы $A^*(t,\varepsilon,\mu)$ таковы, что

$$\inf_G |\mathrm{Re}\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)| \geq \gamma_0\mu^{q_0} \quad (\gamma_0 > 0,\ 0 < q_0 \leq q),$$

2) для матрицы $A^*(t,\varepsilon,\mu)$ существует матрица $U(t,\varepsilon,\mu)$ такая, что

а) $\inf\limits_G |\det U(t,\varepsilon,\mu)| > 0$,

б) $U^{-1}A^*U = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)$ — диагональная матрица.

Тогда для достаточно малых значений μ, ε/μ^{2q_0-1} система (10) имеет частное решение класса B_{m-1}.

Теорема 2. *Пусть система (2) такова, что выполнены условия леммы 1, система (10), получающаяся из системы (2) с помощью подстановки (9), удовлетворяет условиям теоремы 1.*

Тогда для достаточно малых значений μ, ε/μ^{2q_0-1} система (2) имеет частное решение класса B_{m-1}.

Заключение. Таким образом для квазилинейной дифференциальной системы с нулевыми собственными значениями матрицы вещественной части получены признаки существования частного решения, представимого в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, в особом случае, который не охватывался ранее полученными в этом направлении результатами. Предложенный метод доказательства в дальнейшем предполагается распространить на исследование аналогичных особых случаев в системах с чисто мнимыми собственными значениями матрицы линейной части.

1. **Самойленко А. М.** Математичні аспекти теорії нелінійних коливань [текст] / А. М. Самойленко, Р. І. Петришин. – К.: Наук. думка, 2004. – 474 с.
2. **Меркин М. Р.** Проекционный метод решения задачи о вынужденных колебаниях в нелинейных системах с медленно меняющимися коэффициентами [текст] / М. Р. Меркин, В. М. Фридман // Прикл. матем. и механ. – 1981. – Т. 45, вып. 1. – С. 71–76.
3. **Костин А. В.** Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами [текст] / А. В. Костин, С. А. Щёголев // Дифференц. уравн. – 2008. – Т. 44, № 1. – С. 45–51.
4. **Щоголев С. А.** Про деякі резонансні випадки в квазілінійних системах із повільно змінними параметрами [текст] / С. А. Щоголев // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 85–92.
5. **Щоголев С. А.** Про розв'язки квазілінійної диференціальної системи другого порядку, зображувані рядами Фур'є з повільно змінними параметрами в деяких критичних випадках [текст] / С. А. Щоголев // Укр. матем. вісник. – 2010. – № 3. – С. 384–399.
6. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [текст] / И. Г. Малкин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
7. **Хаяси Т.** Нелинейные колебания в физических системах [текст] / Т. Хаяси. – М.:Мир, 1968. – 432 с.