Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Д и п л о м н а р о б о т а
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: «Існування та поводження розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь з регулярними та сингулярними жмутками матриць»

«On the existence and behavior of the differential equations systems solutions with regular and singular pencils of matrices»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Соколовська Дарія Сергіївна
Керівник: к. ф.-м. н., доц. Самкова Г.Є.
Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Шарай Н.В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри

№_________від_____________________р.

Завідувач кафедри

__________ ______________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №________

протокол №______________від___________р.

Оцінка_____________/_________/________
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

____________ ________________________
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

У ХХ сторіччі почалося дослідження диференціальних систем вигляду

$$AX + B\frac{dX}{dt} = f(t), \qquad (0.1)$$

де A і B- сталі матриці розміру $m\times n$, $f: J \to R^m, J \subset R$, жмуток матриць $A+\lambda B$ може бути як регулярним, так і сингулярним. У 1890 році Л. Кронекер розробив теорію приведення сингулярних жмутків матриць до канонічного вигляду. Подібно до того, як вивчення регулярних жмутків матриць проводиться на основі теорії елементарних дільників К.Вейєрштрасса, дослідження сингулярних жмутків матриць спирається на теорію мінімальних індексів Л.Кронекера, що є, так би мовити, подальшим розвиненням теорії елементарних дільників К.Вейєрштрасса. За допомогою теорії Л.Кронекера встановлюється канонічна форма жмутка і застосовується у найзагальнішому вигляді до систем вигляду (0.1). Започаткував дослідження лінійних систем (0.1) у дійсній області Ф. Гантмахер, який у роботі $[4]$ на основі теорії скінченних та нескінченних елементарних дільників жмутка для випадку сталих матриць побудував загальний розв'язок системи (0.1).

Ці розробки стали поштовхом для розповсюдження методики дослідження на випадки, коли жмуток матриць $A(t)+\lambda B(t)$ є змінним, до того ж під час таких досліджень виникає потреба у вивченні функціональних матриць. Виникає проблема сталості рангу матриці у деякій області, та, у відповідності з розв'язуванням цієї проблеми, дослідження розгалужуються на декілька напрямків. Дослідження такого роду розподіляють авторів згідно з підходами до проблеми, що розв'язується.

Лінійні системи вигляду (0.1) у випадку змінного жмутка матриць $A(t)+\lambda B(t)$ з виродженою матрицею $B(t)$ вивчалися в роботах А.М. Самойленка, В.П. Яковця[18], St. Campbell[28, 29], С.А. Мазанника[7], Ю.Є. Бояринцева[1,2], В.Ф. Чистякова[20], І. Маценіса[7], М. В. Булатова[3], А.Г. Руткаса[10], В.Х. Симоконя, Є.П.Трофимчука[20], M. Hanke[26], Д. А.Федорова[22], П.Ф. Самусенка[19] та ін.

Один з напрямків дослідження диференціальної системи вигляду (0.1) у випадку змінного жмутка матриць $A(t)+\lambda B(t)$ представлено у роботах Ю.Є. Бояринцева [1,2], В.Ф. Чистякова [24]. Проводяться дослідження, мета яких полягає в тому, щоб обрати такий вигляд загального розв'язку системи (0.1), при якому її розв'язання звелося б до розв'язання ряду лінійних та квазілінійних систем, що є повністю вивченими, і дати рекомендації для чисельних розрахунків.

При дослідженні лінійних систем диференціальних рівнянь вигляду (0.1) із виродженою матрицею при похідних виникає необхідність у вивченні ряду глобальних властивостей функціональних матриць. У роботах А.М. Самойленка, В.А. Єрьоменка, А.А. Давиденка [5,16] доводяться критерії сталості структури матриці відносно одного з власних значень, подібності n-вимірної матриці сталого рангу до блочної матриці з деяким нульовим блоком, сталості рангу деяких добутків матриць. Розглядаються системи вигляду (0.1) з припущенням, що ранги змінних матриць A і B є сталими всюди в R. Отримано достатні умови інваріантних многовидів у лінійних систем з виродженою матрицею при похідних, коли ця матриця стала, діагональна, має ранг не більший за одиницю. Будуються асимезатори матриці $B(t)$ і встановлюються апріорні оцінки, що характерні для лінійних додатно визначених систем диференціальних рівнянь. Розглядається питання про гладкість розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних на торі.

В роботі П.Ф. Самусенка [19] розглядаються лінійні системи вигляду (0.1) у припущенні, що $\left|B(t)\right| = 0$. За допомогою жмутків матриць розглядаються умови, за яких існують невироджені матриці, що приводять систему до структури, аналогічної до L-діагонального вигляду.

Цікавість до нелінійних систем вигляду

$$AX + B\frac{dX}{dt} = f(t, X), \qquad f : J \times G \to R^m, J \subset R, G \subseteq R^n \tag{0.2}$$

зі сталим або змінним жмутком матриць особливо зростає в останні роки. В роботах А.М. Самойленка, Н.І. Шкіля[17], І.І. Старуна, В.П. Яковця[25], В.А. Єрьоменка, А.А. Давиденка[5], А.Г. Руткаса[10], Л.А. Власенко, С. Зубатової, В.Ф. Чистякова[23,24], St. Campbell[28,29], Д. В.Пашуткіна[9], R. März[27], M. Hanke[26] та багатьох інших такі дослідження проводяться протягом останніх десятиліть.

До одного з напрямків досліджень диференціальних систем вигляду (0.2) належать дослідження В.Ф. Чистякова, у роботах якого наведені перетворення, що ґрунтуються на доведених твердженнях про сталість рангу дійсної матриці на деякому сегменті. Системи, що виникають після цих перетворень стають «алгебро-диференціальними» і вивчаються при різних припущеннях.

Іншим напрямом, над яким активно працюють А.М. Самойленко, Н.І. Шкіль, І.І. Старун, В.П. Яковець та інші науковці, є вивчення в дійсній області сингулярно-збурених систем із сингулярним змінним жмутком матриць при різних припущеннях про властивості матриць, коли структурні матриці, що виникають, аналогічні до матриць сталого жмутка. Вивчаються умови, при яких утворюються ті або інші структурні блоки у змінних жмутках.

Дещо інший аналіз диференціально - алгебраїчних систем представлений у роботах А.Г. Руткаса [10], Л.А. Власенко. Після класифікації та порівняння відомих розв'язків системи (0.2) із необоротним оператором в банаховому просторі наведено нові результати щодо оцінок многовиду, побудови розв'язків та їх дисипативності. Розглядається система (0.2), де A і B - замкнені лінійні оператори з банахового простору Z в Y, $f:[0;\tau]\times S\to Y$ неперервно-диференційований оператор, S - відкрита куля в Z. В роботах R. Mårz, M. Hanke та інших розглядаються системи вигляду (0.1) та (0.2). Вивчаються властивості розв'язків таких систем при деяких припущеннях про сталість рангів матриць, що входять у систему. Формуються умови регулярності системи (0.1), розглядаються питання про розв'язність, структуру та число розв'язків диференціально – алгебраїчних систем вигляду (0.2), вводиться поняття індексу системи, подається узагальнення результатів на випадок нелінійних систем, наводяться оцінки похибки при чисельному розв'язанні таких систем. Вивчається асимптотика розв'язків нелінійних систем з індексами 2 і 3.

В роботах St. Campbell вивчаються системи вигляду (0.2), де $B(t)$-сингулярна матриця. Досліджуються можливі підходи до її розв'язання, зокрема, пропонується підхід, який автор назвав «нерозщеплюючими наближеннями».

У даній роботі розглядаються лінійна система диференціальних рівнянь (0.1), відповідний сталий жмуток матриць $A+\lambda B$ та нелінійна система вигляду (0.2). А також системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь з регулярними жмутками матриць зі змінними елементами вигляду:

$$A(t)x+B(t)\frac{dx}{dt}=f(t;x), \tag{0.3}$$

з початковою умовою

$$x(0)=0. \tag{0.4}$$

Мета роботи: дослідити системи лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь (0.1) та (0.2) зі сталими сингулярними та регулярними жмутками матриць, дослідити системи нелінійних диференціальних рівнянь (0.3) зі змінними сингулярними та регулярними жмутками матриць. Для досягнення мети були поставлені такі задачі:

1. вивчити теорію регулярних жмутків матриць;
2. вивчити теорію сингулярних жмутків матриць;
3. дослідити питання про приведення жмутка матриць $A+\lambda B$ до канонічного квазідіагонального вигляду;
4. дослідити поняття строгої еквівалентності жмутків;
5. вивчити застосування отриманих результатів до інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь (0.1);

6. проілюструвати теоретичні результати на прикладах систем диференціальних рівнянь з регулярними та сингулярними жмутками матриць.
7. дослідити питання зведення системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (0.2) до системи функціонально-диференціальних рівнянь;
8. дослідити питання про можливість розв'язання системи функціонально-диференціальних рівнянь відносно частини змінних;
9. дослідити питання існування розв'язків системи m нелінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку з n невідомими функціями зі сталими жмутками матриць.
10. дослідити питання існування та єдиності розвязків задачі Коші (0.3)-(0.4)

В 1 розділі роботи досліджується теорія сингулярних та регулярних жмутків матриць. У пункті 1.1 вводяться означення сингулярних та регулярних жмутків матриць, а також сформульовані теореми про еквівалентність та строгу еквівалентність жмутків. У пункті 1.2 більш детально розглянуті регулярні жмутки матриць, сформульована теорема про строгу еквівалентність регулярних жмутків матриць, а також сформульована теорема про зведення регулярних жмутків матриць до канонічного квазідіагонального вигляду.
Пункт 1.3 присвячений вивченню сингулярних жмутків матриць сформульована теорема про строгу еквівалентність для цього випадку.

У пункті 1.4 досліджується зведення сингулярного жмутка матриць до канонічної форми.

У пункті 1.5 вводиться поняття мінімальних індексів жмутка, а також сформульована теорема Кронекера про строгу еквівалентність жмутків.

У розділах 2 і 3 даної роботи розглянуті застосування отриманої теорії до розв'язування систем диференціальних рівнянь. У пункті 2.1 розглянуто зведення системи лінійних диференціальних рівнянь (0.1) до системи з канонічним квазідіагональним жмутком матриць.

У пункті 2.2 описується структура систем звичайних диференціальних рівнянь для кожного виду діагональних блоків матриць сингулярного жмутка.

У пункті 2.3 розглянуто приклади, які ілюструють теоретичні результати на системах диференціальних рівнянь з сингулярними та регулярними жмутками матриць. Вказані жмутки матриць приведені до канонічного квазідіагонального вигляду шляхом елементарних перетворень системи, після чого знайдено загальні розв'язки отриманих систем рівнянь.

У розділі 3 даної роботи розглядаються системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь (0.2) з постійними сингулярними та регулярними жмутками матриць.

У пункті 3.1 розглянуто питання про зведення системи звичайних дифе-рен-ціальних рівнянь до системи функціонально-диференціальних рівнянь.

У пункті 3.2 досліджується розв’язання системи функціонально - дифе-рен-ціальних рівнянь відносно частини змінних.

У пункті 3.3 сформульовано теореми про існування розв’язків системи m нелінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку з n невідомими функціями зі сталими жмутками матриць.

У пункті 3.4 розглянуто приклад, який ілюструює теоретичні результати на системах нелінійних диференціальних рівнянь. Жмуток матриць зведено до канонічного квазідіагонального вигляду шляхом елементарних перетворень системи, після чого розглянуто питання про існування та кількість розв’язків системи.

У розділі 4 даної роботи розглядаються системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь (0.3) зі змінними сингулярними та регулярними жмутками матриць.

У пункті 4.1 розглянуто питання про існування та кількість розв’язків системи (0.3) зі змінними регулярними жмутками матриць, що задовольняють початкову умову (4.2)

У пункті 4.2 розглянуто питання про існування та кількість розв’язків системи (0.3) зі змінними сингулярними жмутками матриць, що задовольняють початкову умову (4.2)

У пункті 4.3 досліджується перетворення систем нелінійних диференціальних рівнянь у випадку сингулярних пар матриць зі змінними елементами.

ВИСНОВКИ

У даній роботі розглянуті лінійні та нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими та змінними регулярними і сингулярними жмутками матриць.

Досліджене питання про зведення жмутка сталих матриць до канонічного вигляду. Вивчене поняття строгої еквівалентності, сформульовані теореми про зведення регулярного жмутка матриць до канонічного вигляду та сингулярного жмутка до квазідіагонального канонічного вигляду.

Теорія регулярних та сингулярних жмутків матриць застосована до інтегрування системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь вигляду (0.1).

Шляхом приведення жмутка сталих матриць до канонічного квазідіагонального вигляду система нелінійних звичайних диференціальних рівнянь зведена до системи функціонально-диференціальних рівнянь.

Розглянуто питання розв’язання отриманої системи функціонально - диференціальних рівнянь відносно частини змінних. Результати доведені у лемах 3.1-3.8 та теоремах 3.1-3.8.

Вивчене питання існування розв’язків системи m нелінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку з n невідомими функціями зі сталими жмутками матриць.

Розглянуто питання про існування та кількість розв’язків системи нелінійних диференціальних (0.3) зі змінними регулярними та сингулярними жмутками матриць, що задовольняють початкову умову (0.4). Отримані результати були доведені у теоремах 4.1 та 4.4 про існування та кількість розв’язків задачі Коші (0.3)-(0.4), а також у теоремах 4.3 та 4.6.

Досліджене питання про перетворення систем нелінійних диференціальних рівнянь у випадку сингулярних пар матриць зі змінними елементами.

Деякі отримані теоретичні результати проілюстровані на конкретних прикладах систем звичайних диференціальних рівнянь зі сталими регулярними та сингулярними жмутками матриць. Жмутки матриць приведені до канонічного квазідіагонального вигляду шляхом елементарних перетворень системи, після чого для лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь знайдено загальні розв’язки отриманих систем рівнянь, а для нелінійної системи розглянуто питання про існування та кількість розв’язків системи.

Дослідження апробовані на «World science: problems, prospects and innovations. Abstracts of III International Scientific and Practical Conference Toronto, Canada 25-27 November 2020.»

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бояринцев Ю.Е. Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1982.
2. Бояринцев Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988.
3. Булатов М.В. Редукция систем алгебро-дифференциальных уравнений.//Диф. уравнения с частными производными. АН СССР,СО ин-т математ.Новосибирск,1991, с.59-63.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.:Наука,1988, 552с.
5. Еременко В.А. Периодические решения систем двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с вырожденной матрицей при производных //Укр.мат.журнал.-1998.-50,№3, с.350-356.
6. Д.Е. Лиманская, Г.Е. Самкова. О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных. / Лиманская Д.Е., Самкова Г.Е // Вісник Одеського національного університету. -- 2014. -- Т. 19. -- Вип. 1(21). Математика і механіка. -- С. 16-28.
7. Мазаник С.А. О линейных системах дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных //Докл. АН БССР.-1985.-29,№9, с.784-787.
8. Маценис И. Структура решения вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. //В сб. ”Диф. уравнения и их применение”. Вильнюс.- 1986.-№38, с.53-57.
9. Пашуткин Д.В. О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений к блочно- треугольному виду //Изв.ВУЗов.Мат.-2001.-№6, с. 50-57.
10. Руткас А.Г. О классификации и свойствах решений уравнения $Ax' + Bx = f(t)$ //Диф. уравнения.-1989.-25,№7, с.1150-1155.
11. Самкова Г.Е. О разрешимости и асимптотическом поведении решений некоторых полуявных дифференциальных систем. Reports of enlarged session of the seminar of L.N. Vekua Institute of applied mathematics. Tbilisi, 1992, v.7, N.3, p.85-88.
12. Самкова Г.Є., Соколовська Д.С. Системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними регулярними та сингулярними жмутками матриць. World science: problems, prospects and innovations. Abstracts of III International Scientific and Practical Conference Toronto, Canada 25-27 November 2020, с. 868-873.
13. Самкова Г.Е., Шарай Н.В. Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц. Нелінійні коливання. 2002, том 5, № 2, с.224-236.
14. Самкова Г.Е., Шарай Н.В. Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц// Нелінійні коливання.- 2002.-5,№ 2, с.224-236.

15.Самойленко А.М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных //Укр. мат.журнал.-2002.-54,№11, с.1505-1517.

16.Самойленко А.М., Еременко В.А., Давиденко А.А. Гладкость квазипериодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождающейся симметрической матрицей при производной //Докл. НАН Украины.-2001.-№4, с.21-27.

17.Самойленко А.М., Шкиль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. - Київ: Вища школа, 2000 - 294с.

18.Самойленко А.М.,Яковец В.П. О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме //Доклады АН Украины,1993.- №4, с.10-15.

19.Самусенко П.Ф. Об асимптотических решениях системы линейных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Докл. НАН Украины, 1997.- №7, с. 44-50.

20.Симоконь В.Х.,Трофимчук Е.П. О регулярности линейных систем с вырожденной матрицей при производных //Укр.мат.журнал.-1993.- 45,№2.

21.Старун І.І.,Шкіль М.І. Лінійні сингулярно збурені системи // Укр. мат. журнал.- 2002.-54, №12, с.1688-1693.

22.Федоров Д.Л. О представлении решений задачи Коши для сингулярной системы линейных дифференциальных уравнений с особенностью в начальной точке // Труды удм. гос. университета. Ижевск,2000 - 11с.

23.Чистяков В.Ф. О свойствах квазилинейных вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений //"Динамика нелинейных систем", Новосибирск, 1993, с.164-173.

24.Чистяков В.Ф. О нетеровом индексе линейных алгебро-дифференциальных систем //Сиб.мат.журнал.-1993.-34,№3, с.209-219.

25.Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями.-Киев: Вища школа. –1991. - 207с.

26. Hanke M., Izquierdo Macaha E., März R. On asymptotics in case of Linear index-2 differential-algebraic equations //SIAM J. Numer Anal.- 1998.-35,№4.- c.1326-1344.

27. März R. Criteria for the trivial solution of differential algebraic equations with small nonlinearities to be asymptotically stable //Journal of mathematical analysis and applications.-1998.- 225.- c.587-607.

28. Campbell St.,Retzold L. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations //SIAM J. Algebra and Discrete Methods.-1983.-№4-c.517-521.
29. Campbell St. Uniqueness of completions for linear time varying differention algebraic equations //Linear Algebra and Appl.-1992.-161.-c.55-67.