

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра методів математичної фізики

## Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Антиплоська задача теорії пружності для шаруватої  
прямокутної області з міжфазними дефектами»

«Anti-plane problem of the theory of elasticity for the  
multilayered rectangular region with interfacial defects»

Виконав: здобувач денної форми навчання  
спеціальності 113 Прикладна математика  
«Прикладна математика»

Чернобровкін Артем Валерійович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Журавльова З.Ю. \_\_\_\_

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю.С.

Рекомендовано до захисту:

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_

Протокол засідання кафедри

Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2022 р.

№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2022 р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Завідувач кафедри

Голова ЕК

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Одеса — 2022 р.

Odesa I. I. Mechnikov National University  
Faculty of Mathematics, Physics and Information Technology  
Department of methods of mathematical physics

## **Diploma thesis**

master

**«Antiplane problem of the theory of elasticity for  
multilayered rectangular region with interfacial defects»**

Fulfilled by: full-time student  
specialty 113 Applied Mathematics  
Artem Chernobrovkin

Supervisor: Ph. D. in physics and mathematics  
sciences, Associate Professor Zinaida Zhuravlova  
Reviewer: Ph. D. in physics and mathematics  
sciences, Associate Professor Yuriy Protserov

# CONTENTS

<b>Вступ</b>		6
<b>Introduction</b>		8
<b>1 The anti-plane problem of elasticity theory for multilayered rectangular area</b>		11
1.1 Statement of the problem . . . . .		11
1.2 Reducing the initial problem to the one-dimensional problem . . . . .		13
<b>2 The anti-plane problem of the theory of elasticity for a three-layer rectangular region</b>		16
2.1 Reducing the initial problem to the one-dimensional problem . . . . .		16
2.2 Inversion of integral transforms . . . . .		18
2.3 Checking of the boundary conditions . . . . .		19
2.4 Summarization of weakly convergent parts of series . . . . .		20
2.4.1 Summary of weakly convergent parts of $W_1(x; y)$ . . . . .		21
2.4.2 Summary of weakly convergent parts of $\tau_{yz}^1(x; y)$ . . . . .		22
2.4.3 Summary of weakly convergent parts of $W_2(x; y)$ . . . . .		23
2.4.4 Summary of weakly convergent parts of $\tau_{yz}^2(x; y)$ . . . . .		25
2.4.5 Summary of weakly convergent parts of $W_3(x; y)$ . . . . .		26
2.4.6 Summary of weakly convergent parts of $\tau_{yz}^3(x; y)$ . . . . .		29
2.5 Analysis of numerical calculations . . . . .		30
2.5.1 Dynamics of displacement changes . . . . .		31
2.5.2 Dynamics of stress changes . . . . .		35
2.5.3 Dependence of stress on the type of loads . . . . .		39
2.5.4 Dependence of stress on the geometry of a rectangular region . . . . .		43
2.5.5 Dependence of the stress value on the arrangement of materials $G_{132}$ . . . . .		47
2.5.6 Dependence of the stress value on the arrangement of materials $G_{213}$ . . . . .		54

2.5.7	Dependence of the stress value on the arrangement of materials $G_{231}$ . . . . .	60
2.5.8	Dependence of the stress value on the arrangement of materials $G_{321}$ . . . . .	66
2.5.9	Dependence of the stress value on the arrangement of materials $G_{312}$ . . . . .	72
2.6	Conclusions to the second section . . . . .	78
<b>3</b>	<b>The anti-plane problem of the theory of elasticity for the multilayered rectangular region with interfacial cracks</b>	<b>79</b>
3.1	Statement of the problem . . . . .	79
3.2	Reducing the initial problem to the one-dimensional problem . . . . .	82
<b>4</b>	<b>The anti-plane problem of the theory of elasticity for the three-layer rectangular region with interfacial defects</b>	<b>85</b>
4.1	Reducing the initial problem to the one-dimensional problem . . . . .	85
4.2	Inversion of integral transforms . . . . .	88
4.3	Checking of the boundary conditions . . . . .	90
4.4	Summarization of weakly convergent parts of series. . . . .	91
4.4.1	Summation of weakly convergent parts of $W_1(x; y)$ . . . . .	92
4.4.2	Summation of weakly convergent parts of $\tau_{yz}^1$ . . . . .	95
4.4.3	Summation of weakly convergent parts of $W_2(x; y)$ . . . . .	97
4.4.4	Summation of weakly convergent parts of $\tau_{yz}^2$ . . . . .	101
4.4.5	Summation of weakly convergent parts of $W_3(x; y)$ . . . . .	104
4.4.6	Summation of weakly convergent parts of $\tau_{yz}^3$ . . . . .	107
4.5	Singular integrodifferential equations (SIDE) . . . . .	110
4.5.1	Singular integrodifferential equation-1 (SIDE-1) . . . . .	110
4.5.2	Singular integro-differential equation-2 (SIDE-2) . . . . .	114
4.6	Stress intensity factors (SIF) . . . . .	118
4.6.1	Stress intensity factors-1 (SIF-1) . . . . .	118
4.6.2	SIF-1 when changing longitudinal cracks . . . . .	119
4.6.3	SIF-1 when the load changes . . . . .	120
4.6.4	Stress intensity factors-2 (SIF-2) . . . . .	122
4.6.5	SIF-2 when changing longitudinal cracks . . . . .	123
4.6.6	SIF-2 when the load changes . . . . .	124

4.7 Conclusions to the fourth section . . . . .	126
<b>Висновки</b>	127
<b>Conclusions</b>	128
<b>List of published papers by the subject of the master's thesis</b>	129
<b>Список літератури</b>	131

## ВСТУП

**Актуальність.** Інженерні проблеми визначення міцності конструкцій потребують адекватних та простих математичних моделей, за допомогою яких можна підраховувати величини напружень та їх розподіл усередині області.

Реальні конструкції досить часто складаються декількох шарів заради зміцнення або ізолювання деяких речовин між собою. Також слід зауважити, що особим класом задач є задачі з різними дефектами. Зокрема, виокремлюють два види дефектів: тріщина або включення.

Слід зауважити, що часто виникають ситуації, коли впродовж тривалого часу на конструкціях такого типу можуть з'явитись тріщини. Такого роду дефекти можуть виникти під впливом різних природних умов: вітру, води чи механічної дії.

Данна робота складається з чотирьох розділів, в яких було розв'язано такі модельні задачі:

- 1) В першому та другому розділі розглянута прямокутна область, що складається з  $N$ -шарів та окремий випадок, коли  $N = 3$ .
- 2) В третьому та четвертому розділі розглянута прямокутна область, що складається з  $N$ -шарів та окремий випадок, коли  $N = 3$ , яка послаблена на місці стику тріщинами.

Всі ці задачі було розв'язано за допомогою методу інтегральних перетворень. Використання рекурентних співвідношень для визначення сталих одного шару через сталі іншого дозволяє будувати розв'язок для багат шарової області будь-якої складності.

Також слід відзначити, що у випадку дефекту треба побудувати сінгулярне інтегро-диференціальне рівняння.

**Мета.** Для багат шарової області, на прикладі трьох шарової, прямокутної області досліджено розподіл напружень у залежності від співвідношення модулів пружності шарів та геометричних параметрів області.

Також розглянуто різні види навантажень та характеристик матеріалу у дефекті.

Обчислити коефіцієнти інтенсивності напружень в залежності від довжини тріщини.

**Об'єкт дослідження.**  $N$ -шарова прямокутна область, що знаходиться у стані антиплоської деформації та  $N$ -шарова прямокутна область, що знаходиться у стані антиплоської деформації, що послаблена міжфазними тріщинами.

## INTRODUCTION

**Relevance.** The engineering problems of determining the strength of structures require adequate and simple mathematical models which can be used to calculate the values of loads and their distribution in the middle of an area.

Simple constructions are often made of several layers to cement or isolation of certain substances among themselves. It should also be noted that a particular class of problems has different defects. In particular, two types of defects are identified: fracture or inclusion.

It should be noted that there are often situations where cracks can appear on structures of this type over a long period. The defects can occur under various environmental conditions: wind, water, and sneezing.

This work consists of four sections in which these model problems were solved:

- 1) In the first and second sections, a rectangular area consists of  $N$ -layered and a single case where  $N = 3$  are considered.
- 2) In the third and fourth sections, a rectangular area consists of  $N$ -layered in a single case where  $N = 3$  is considered, which is relaxed at the sticking point by frictions.

All these problems have been solved using the method of integral transformations. Using recurrent relations to determine the steels of one layer through the steels of another allows one to construct solutions for any complexity of different difficulties.

It should also be noted that a singular integral referential equation must be created in the case of a defect.

**Goal.** For a three-layer, rectangular area, the distribution of loads depending on the ratio of the layer twist's modulus and the area's geometrical parameters is investigated.

Also, different kinds of stresses and characteristics of the material in the defect are considered.

Calculate the coefficients of the loads' intensity depending on the fracture's length.



**Subject of study.**  $N$ - a layered rectangular region in a state of antiplane deformation and  $N$ -a layers, a rectangular area in a state of antiplane deformation loosened by internal cracks.

Simple constructions are often made of several layers to cement or isolation of certain substances among themselves. It should also be noted that a particular class of problems has different defects. In particular, two types of defects are identified: fracture or inclusion.

It should be noted that there are often situations where cracks can appear on structures of this type over a long period. The defects can occur under various environmental conditions: wind, water, and sneezing.

This work consists of four sections in which these model problems were solved:

- 1) In the first and second sections, a rectangular area consists of  $N$ -layered and a single case where  $N = 3$  are considered.
- 2) In the third and fourth sections, a rectangular area consists of  $N$ -layered and a single case where  $N = 3$  is considered, which is relaxed at the sticking point by frictions.

All these problems have been solved using the method of integral transformations. Using recurrent relations to determine the steels of one layer through the steels of another allows one to construct solutions for any complexity of different difficulties.

It should also be noted that a singular integral referential equation must be created in the case of a defect.

**Goal.** For a three-layer, rectangular area, the distribution of loads depending on the ratio of the layer twist's modulus and the area's geometrical parameters is investigated.

Also, different kinds of stresses and characteristics of the material in the defect are considered.

Calculate the coefficients of the loads' intensity depending on the fracture's length.

**Subject of study.**  $N$ -th layers, rectangular region in a state of antiplane

deformation and  $N$ -a layers, a rectangular area in a state of antiplane deformation loosened by internal cracks.

## ВИСНОВКИ

В магістерській роботі досліджено антиплоські задачі для шаруватої прямокутної області під впливом навантаження різної природи, що задано за віссю  $Oz$ . Розглянуто задачу для випадку, коли прямокутну область послаблено міжфазною тріщиною. Отримано такі основні результати:

- 1) Побудован розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для  $N$ -шарової прямокутної області з використанням апарату інтегральних перетворень. Та окремий випадок, коли область складається з трьох шарів
- 2) Побудован розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для  $N$ -шарової прямокутної області, що послаблена міжфазною тріщиною з використанням апарату інтегральних перетворень. Та окремий випадок, коли область складається з трьох шарів
- 3) Проаналізовані коефіцієнти інтенсивності напружень стосовно довжини тріщини.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. — Одеса: Астропринт, 2005. — 184 с.
2. Попов Г. Я. Вибрані праці.—Одеса: Видавничо-поліграфічний будинок ВМВ, 2007.—1100с.
3. N. D. Vaysfel'd, Z. Yu. Zhuravlova On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip // Acta Mechanica, 2015. DOI: 10.1007/s00707-015-1452-x
4. Градштейн І. С., Рижик І. М. Таблиці інтегралів, сум, рядів та назв. М.: Фізматгіз, 1963. — 1100 с.
5. Попов Г. Я., В. В. Реут, М. Г. Моїсеєв, Н. Д. Вайсфельд. Рівняння математичної фізики. Метод ортогональний многочленів: навчальний посібник —Одеса: Астропринт, 2010,— 120с.
6. Попов Г. Я. Концентрація пружних напружень біля штампів, розрізів, тонких включень та підкріплень. —Одеса: Астропринт, 1982.— 344 с.
7. Вайсфельд Н. Д., Журавльова З. Ю., Реут В. В. Плоскі мішані задачі теорії пружності для півнескінченної смуги: наукова монографія — Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019. — 149 с.