УДК 519

Саттар Абд Кирбат
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ КЛАССА $\mathfrak{M}(a,b)$ НАД $Z[i]$ В КОРОТКОМ ИНТЕРВАЛЕ

Саттар Абд Кірбат. Мультиплікативні функції класу $\mathfrak{M}(a,b)$ над $Z[i]$ в короткому интервалі. Розглядається клас мультиплікативніх функцій з фіксованим значенням $f(\mathfrak{p}) = const$ на простих гаусових числах. Отримана асимптотична формула середнього значення $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$ в короткому інтервалі $x < N(\alpha) \le x+h$, де $\alpha \in Z[i]$, $\omega(\alpha)$ — кількість різних простих дільників α в $Z[i]$, а z — комплексне число, $|z| \le 2$.
Ключові слова: мультиплікативна функція, дзета-функція Геке, асимптотична формула.

Саттар Абд Кирбат. Мультипликативные функции класса $\mathfrak{M}(a,b)$ над $Z[i]$ в коротком интервале. Рассматривается класс мультипликативных функций с фиксированным значением $f(\mathfrak{p}) = const$ на простых гауссовых числах. Получена асимптотическая формула среднего значения $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$ в коротком интервале $x < N(\alpha) \le x+h$, где $\alpha \in Z[i]$, $\omega(\alpha)$ — число различных простых делителей α в $Z[i]$, а z — комплексное число, $|z| \le 2$.
Ключевые слова: мультипликативная функция, дзета-функция Гекке, асимптотическая формула.

Sattar Abd Kirbat. Multiplicative functions of the class $\mathfrak{M}(a,b)$ over $Z[i]$ in the short intervals. Consider the class of multiplicative functions with the fixed value $f(\mathfrak{p}) = const$ on the gaussian prime numbers. An asymptotic formula for the mean value of $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$ in the short interval $x < N(\alpha) \le x+h$ was obtained, where $\alpha \in Z[i]$, $\omega(\alpha)$ is the number of the different prime factors of α from $Z[i]$, and z is a complex number, $|z| \le 2$.
Key words: multiplicative function, Hecke zeta-function, asymptotic formula.

Введение. Пусть a и b — натуральные числа. Через $\mathfrak{M}(a,b)$ обозначим класс мультипликативных функций над кольцом целых гауссовых чисел под условием для всех простых $\mathfrak{p} \in Z[i]$:

$$f(\mathfrak{p}) = a,\ f(\mathfrak{p}^2) = b\mathfrak{p} + b_0,\ |f(\mathfrak{p}^m)| \le 2N(\mathfrak{p})^{\frac{m}{2}},\ m \ge 3.$$

Примером функции из класса является функция, определяющая количество неассоциированных делителей матриц второго порядка с целыми гауссовыми элементами.

Целью настоящей заметки является изучение распределения значений функции $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$, где $f \in \mathfrak{M}(a,b)$, $z \ne 0$, $|z| \le 2$, $\omega(\alpha)$ — число различных неассоциированных простых делителей целого $\alpha \in Z[i]$.

В дальнейшем мы используем следующие обозначения:
$\mathfrak{p}$ всегда обозначает простое гауссово число;
$N(\alpha)$ — норма целого $\alpha \in Z[i]$, $N(\alpha) = |\alpha|^2$;
$s = \sigma + it$, $s \in C$, $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$;
$Z(s) = \sum\limits_{0 \ne \alpha \in Z[i]} N(\alpha)^{-s}$ (для $\Re s > 1$) — дзета-функция Гекке.

Приводимые ниже леммы хорошо известны, но некоторые из них мы даём в удобной для наших применений формулировке.

Лемма 1. *Дзета-функция Гекке $Z(s)$ аналитична во всей комплексной s-плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом π.*

Кроме того,

$$Z(s)\neq 0 \text{ в области } \Re s > 1-\frac{c}{(\log|t|)^{\frac{2}{3}}\log\log|t|},\ |t|\geq 10;$$
$$N(\sigma,T)\ll T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)}\log^9 T$$

(Это утверждение есть следствие представления $z(s)=4\zeta(s)L(s,\chi_4)$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, а $L(s,\chi_4)$ — L-функция Дирихле неглавным характером mod 4).

Лемма 2. *Пусть $U(s)$ — аналитична в круге $|s-1|\leq r$, $0<r<1$ и пусть в этом круге $U(s)=\sum\limits_{\ell=0}^{k}A_\ell(s-1)^\ell+O\left(|s-1|\right)^{k+1}$.*
Тогда для $\Re z\leq k+1$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\frac{U(s)}{(s-1)^z}x^{s-1}ds=\sum_{\ell=0}^{k}A_\ell\frac{\Gamma(\ell-z)}{(\log x)^{\ell-z+1}}\cdot\frac{(-1)^{\ell+1}\sin\pi z}{z}+$$
$$+O\left(\frac{1}{(\log x)^{k+2-\Re z}}\right)$$

(Здесь C^* — контур, состоящий из отрезка $\left(\left(1-\frac{1}{r}\right)e^{i\pi},\left(1-\frac{1}{\log x}\right)e^{-i\pi}\right)$ проходимого в прямом и обратном направлениях, и окружности радиуса $\frac{1}{\log x}$ с центром в точке $s=0$).

(Для доказательства см. [1]).

Рассмотрим функцию $F(s)$, задаваемую в области $\Re s>1$ абсолютно сходящимся рядом $\sum\limits_{\alpha}\frac{a(\alpha)}{N(\alpha)^s}$. Предположим ещё, что $G(s)$ есть произведение функций $Z(as+b)$, взятых в конечном числе и в комплексных степенях, а также логарифмов и производных от этих функций в неотрицательных целых степенях. Кроме того, в $F(s)$ в качестве множителя может содержаться функция $G_0(s)=\sum\limits_{\alpha}\frac{c(\alpha)}{N(\alpha)^s}$, ряд которой абсолютно сходится для $\sigma>\frac{1}{2}$.

Имеет место следующее обобщение теоремы Рамачандра

Лемма 3. *Для достаточно большого x и всех $1\leq h\leq x$ имеем*

$$\sum_{\substack{\alpha\\ x<N(\alpha)\leq x+h}}g(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}G(s)\frac{(x+h)^s-x^s}{s}ds+$$
$$+O\left(he^{-(\log x)^{\frac{1}{6}}}\right)+O\left(x^{\frac{7}{12}}+\varepsilon\right).$$

Доказательство получается по аналогии с доказательством теоремы Рамачандра (см. [2]).

Основные результаты.

Пусть $f(\alpha)$ — мультипликативная функция из класса $\mathfrak{M}(a,b)$, где $a \geq 1$, b — фиксированные целые числа. Для любого $z \neq 0$ из круга $|z| = 2$ функция $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$, где $\omega(\alpha)$ — число различных простых делителей α, мультипликативна.

Кроме того, для простого гауссового числа $\mathfrak{p}$:

$$\left| f\left(\mathfrak{p}^m\right) zN\left(\mathfrak{p}^m\right)^{-s} \right| \ll \begin{cases} N(\mathfrak{p})^{-\Re s}, & \text{если } m = 1, \\ N(\mathfrak{p})^{-2\Re s+1}, & \text{если } m = 2, \\ N(\mathfrak{p})^{-m\left(\Re s - \frac{1}{2}\right)}, & \text{если } m \geq 3. \end{cases} \tag{1}$$

Следовательно, по тождеству Эйлера, в каждом компакте полуплоскости $\Re s > 1$ сходится ряд

$$\sum_{\alpha \in Z[i]} \frac{f(\alpha) z^{\omega(\alpha)}}{N(\alpha)^s}.$$

Отсюда следует, что определяемая этим рядом функция представима в виде

$$F(s,z) = Z(s)^{az} Z(2s-1)^{bz} G(s,z), \tag{2}$$

где

$$G(s,z) = \sum_{\alpha} \frac{g_\alpha(z)}{N(\alpha)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(z)}{n^s}, \ g_n(z) = \sum_{\alpha} g_\alpha(z), \ g_n(z) \ll n^{\varepsilon},$$

причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(z)}{n^s}$ абсолютно сходится в области $\Re s > \frac{1}{2}$.

Таким образом, $F(s,z)$ допускает аналитическое продолжение в область D, свободную от нулей $Z(s)$ и $Z(2s-1)$, лежащую в полуплоскости $\Re s > \frac{1}{2}$, с исключенной точкой $s = 1$, где $F(s,z)$ имеет особенность типа $(s-1)^{-(a+b)z}$.
Из (2) имеем

$$F(s,z) = \frac{((s-1)Z(s))^{az}((2s-1)Z(2s-1))^{bz}}{(s-1)^{(a+b)z} 2^{bz}} G(s,z) = \frac{H(s,z)}{(s-1)^{(a+b)z}}. \tag{3}$$

Для любого фиксированного натурального q имеем

$$H(s,z) = A_0(z) + A_1(z)(s-1) + \cdots + A_q(z)(s-1)^q + H_1(s,z)(s-1)^{q+1}, \tag{4}$$

где $H_1(s,z)$ ограничена в круге $|s-1| \leq r$, если этот круг находится в области D.

Пусть сначала $z = 1$. В этом случае $F(s,1)$ в точке $s = 1$ имеет полюс порядка $(a+b)$ и эта точка является единственной особенностью функции $F(s,1)$. Поэтому применение леммы о частных суммах ряда Дирихле с $c = 1 + (\log x)^{-1}$ и $T > 1$ даёт

$$\sum_{N(\alpha) \leq x} f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s,1) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T \cdot (c-1)^{a+b}} \right). \tag{5}$$

Перенося контур интегрирования на прямую $\Re s = \frac{2}{3} + (\log x)^{-1}$ и применяя Лемму 1 легко получаем

$$A(s,1) := \sum_{n \le x} f(n) = xP_{a+b}(\log x) + O\left(x^{\frac{2a+4b+6}{2a+4b+9}} (\log x)^{a+b}\right), \tag{6}$$

где $P_{a+b}(u)$ — многочлен степени $(a+b)$ с вычислимыми коэффициентами, зависящими от a и b. (Постоянная в символе "O" зависит только от a и b).

Пусть теперь $|z| \le 2$, $z \ne 1$.
Возьмём T, $x^{\frac{1}{2}} \ll T \ll x$ (точнее определим его позднее). Положим $\delta_0 = c_1 \cdot (\log T)^{-\frac{2}{3}} (\log \log T)^{-1}$, где c_1 выбрано так, что в области

$$\sigma \ge 1 - 2c_1 \cdot (logT)^{-\frac{2}{3}} (\log \log T)^{-1}, \ |t| \le T$$

нет нулей $Z(s)$.
Выбор такого c_1 гарантируется Леммой 1.

Обозначим через $\Gamma = \prod_{i=0}^{4} \Gamma_i$, где Γ_1 (соответственно, Γ_2) состоит из тех точек $s = \sigma + it$, для которых $1 - \delta_0 \le \sigma \le (\log x)^{-1}$, $0 < t \le T$ (соответственно, $-T \le t < 0$); Γ_3(соответственно, Γ_4) состоит из тех точек s, для которых $\sigma = 1 - \delta_0$, $0 < t \le T$ (соответственно, $-T \le< 0$); Γ_0 состоит из отрезка $\left[1 - \delta_0, 1 - \frac{1}{2}\log^{-1} x\right)$ вещественной оси, проходимого в прямом и обратном направлениях, и окружности C_0 радиуса $\frac{1}{2}\log^{-1} x$ с центром в точке $s = 1$ (с выколотой точкой $s = 1 - \frac{1}{2}\log^{-1} x$).

На контуре Γ и отрезке $\Re s 1 + (\log x)^{-1}$, $|\Im s| \le T$, функция $F(s,z)\frac{x^s}{s}$ однозначна и аналитична. Поэтому

$$\begin{aligned} A(x,z) := \sum_{\alpha} f(\alpha) z^{\omega(\alpha)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} F(s,z)\frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T \cdot (c-1)^{2(a+b)}}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(s,z)\frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T \cdot (c-1)^{2(a+b)}}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

В силу представления (3) и Леммы 2, мы выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} F(s,z)\frac{x^s}{s} ds &= x\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{H(s,z)}{s} \cdot (s-1)^{-(a+b)z} x^{s-1} ds = \\ &= x\Psi_0(x,z), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\Psi_0(x,z)$ имеет асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \Psi_0(x,z) = \sum_{j=0}^{q} \widetilde{A}_j(z) \frac{\Gamma_j(j+1-(a+b)z)}{(\log x)^{j+1-(a+b)z}} \cdot (-1)^{j+1} \frac{\sin \pi(a+b)z}{\pi} + \\ + O\left((\log x)^{-q-2+(a+b)\Re z}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

$\widetilde{A}_j(s)$ — коэффициенты разложения $\frac{H(s,z)}{s}$ в ряд Тэйлора по степеням $(s-1)$; $\Gamma(u) - \Gamma$ — функция Эйлера.

Оценку интегралов на участке $\Gamma \setminus \Gamma_0$ можно получить стандартным путём, используя Лемму 1, а потому имеем

$$\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_0} F(s,z)\frac{x^s}{s}ds \ll x\exp\left(-c_2\cdot(\log x)^{\frac{3}{5}}\cdot(\log\log x)^{-1}\right),\ (c_2>0) \tag{10}$$

с постоянной в символе "$\ll$", зависящей только от a и b.

Таким образом, для $|z|\le 2$, $z\ne 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} A(x,z) := \sum_{N(\alpha)\le x} f(\alpha)z^{\omega(\alpha)} = x\Psi_0(x,z) + \\ + O\left(x\exp\left(-c_2\cdot(\log x)^{\frac{3}{5}}\cdot(\log\log x)^{-1}\right)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Из соотношений (6) и (11) следует теорема

Теорема 1. *Пусть $z\in C$, $|z|\le 2$. Тогда для любого фиксированного q справедлива асимптотическая формула*

$$\sum_{N(\alpha)\le x} f(\alpha)z^{\omega(\alpha)} = \begin{cases} xP_{a+b}(\log x)+O_1, & \text{если } z=1,\\ x\Psi_0(x,z)+O_2, & \text{если } z\ne 1,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} O_1 := O\left(x^{\frac{2a+4b+6}{2a-4b+9}}(\log x)^{a+b}\right)\\ O_2 := O\left(x\exp\left(-c_2\cdot(\log x)^{\frac{3}{5}}\cdot(\log\log x)^{-1}\right)\right), \end{aligned}$$

где $\Psi_0(x,z)$ определена интегралом в (8) и имеет асимптотическое разложение (9); $P_{a+b}(u)$ — многочлен степени $(a+b)$ с вычислимыми коэффициентами.

Замечание 1. *Простые вычисления показывают, что*

$$P_{a+b}(\log x) = \Psi_0(x,1).$$

Эта теорема вместе с теоремой Рамачандра (см. Лемма 3 из п.2) позволяет изучать распределение значений функции $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$ в коротких интервалах.

Теорема 2. *Для любого положительного ε и любого h из интервала $\left(x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}, x\exp\left(-c_3\cdot(\log x)^{\frac{1}{3}}(\log\log x)^{-1}\right)\right)$, $c_3=\frac{1}{2}c_2$, справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} B(x,h;z) := \sum_{x<N(\alpha)\le x+h} f(\alpha)z^{\omega(\alpha)} = h\Psi(x,z) + \\ + O\left(h\exp\left(-c_5\cdot(\log x)^{\frac{1}{6}}\cdot(\log\log x)^{-1}\right)\right) + O\left(x^{\frac{17}{12}+\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\Psi(x,z) = \sum\limits_{j=0}^{q} B_j(z)\frac{\Gamma(j+1-(a+b)z)}{(\log x)^{j+1-(a+b)z}}\cdot\frac{\sin\pi(a+b)z}{\pi} + O\left((\log x)^{-q-2+(a+b)\Re z}\right)$; B_j — вычислимые и ограниченные функции от z; q — любое фиксированное целое, а постоянные в символах "O" зависят только от $\varepsilon>0$ и q.

Доказательство. Пусть сначала

$$x \exp\left(-c_3 \cdot (\log x)^{\frac{3}{5}} \cdot (\log\log x)^{-1}\right) \ll h \ll x \exp\left(-c_4 \cdot (\log x)^{\frac{1}{6}}\right),$$

где c_4 — постоянная из теоремы Рамачандра.

Принимая во внимание, что для $0 < u \ll x \exp\left(-c_4 \cdot (\log x)^{\frac{1}{6}}\right)$ имеем

$$(x+u)(\log(x+u))^k - x\log^k x = u\log^k x + O\left(ku\log^{k-1} x\right), \ (k \in N),$$

и используя теорему 1, мы находим

$$\begin{aligned} B(x,h;z) &= h\Psi_0(x,z) + x(\Psi_0(x+h,z) - \Psi_0(x)) + \\ &+ O\left(h\exp\left(-\frac{1}{2}c_4 \cdot (\log x)^{\frac{1}{6}}\right)\right) = \\ &= h\Psi_0(x,z) + h\Psi_1(x,z) + h\sum_{i=R}^{Q}\left(\frac{h}{x}\right)^{i-1}\Psi_i(x,z) + \\ &+ O\left(h\exp\left(-\frac{1}{2}c_4 \cdot (\log x)^{\frac{1}{6}}\right)\right), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Psi_i(x,z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_0} \frac{H_i(s,z)}{s}x^{s-1}ds$, $H_i(s,z)$ — регулярная функция в области $\Re s >$ $> \frac{5}{6}$, $i = 2, \ldots, Q$.
Поэтому

$$B(x,h;z) = h\Psi(x,z) + O\left(h\exp\left(-c_5 \cdot (\log x)^{\frac{1}{6}}\right)\right), \ (c_5 > 0), \tag{15}$$

где $\Psi(x,z) = \sum\limits_{j=0}^{q} B_j(z)\frac{\Gamma(j+1-(a+b)z)}{(\log x)^{j+1-(a+b)z}} \cdot \frac{\sin\pi(a+b)z}{\pi} + O\left((\log x)^{-q-2+(a+b)\Re z}\right)$, $B_j(z)$ — вычислимые и ограниченный для $|z| \le 2$ функции.

Для $h \ll x\exp\left(-c_5 \cdot (\log x)^{\frac{3}{5}}\right) \cdot (\log\log x)^{-1}$ мы применяем теорему Рамачандра, согласно которой при $h \ge x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$ получаем

$$\begin{aligned} B(x,h;z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} F(x,z)\frac{(x+h)^s - x^s}{s}ds + \\ &+ O\left(h\exp\left(-(\log x)^{\frac{1}{6}}\right)\right) + O\left(x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{16}$$

где C_0 — окружность радиуса r с центром в точке $s = 1$.
На окружности C_0 имеем

$$\frac{(x+h)^s - x^s}{s} = hx^{s-1} + \frac{h^2}{2}x^{s-2}(s-1) + O\left(h^3x^{\Re z-3}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{B(x,h;z)}{h} - \frac{A(x,z)}{x} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} F(s,z)\frac{x^{s-1}}{s}(s-1)ds + \\ &+ O\left(\max_{s\in C_0}|F(s,z)| \cdot rh\left(x^{r-1} + h^2x^{r-2}\right)\right) \end{aligned} \tag{17}$$

Учтём, что $\max_{s\in C_0}|F(s,z)| \ll r^{-2(a+b)}$ и положим $r = \exp\left(-(\log x)^{\frac{2}{5}}\right)$.
Тогда из (16), (17) и теоремы 1 выводим

$$\begin{aligned}\frac{B(x,h;z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i}\int C_0 F(s,z)x^{s-1}ds + \\ &+ O\left(\exp\left(-c_2\cdot(\log x)^{\frac{3}{5}}\cdot(\log\log x)^{-1}\right)\right) + O\left(h^{-1}x^{\frac{7}{12}}+\varepsilon\right)\end{aligned} \tag{18}$$

Обозначим через C_1 контур, состоящий из окружности радиуса $(\log x)^{-1}$ с центром, в точке $s=1$ (с выколотой точкой $s = 1-(\log x)^{-1}$) и отрезка $\left[1-r, 1-(\log x)^{-1}\right]$, проходимого в прямом и обратном направлениях, начиная с точки $(1-r)\ell^{-i\pi}$. Ясно, что функция $F(s,z)$ аналитична на замкнутом контуре $C_1 \bigcup C_0$, а потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0} F(s,z)x^{s-1}ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} F(s,z)x^{s-1}ds.$$

Теперь, вспоминая представление $F(s,z) = \frac{H(s,z)}{(s-1)^{(a+b)z}}$ и применяя Лемму 2, мы легко получаем утверждение Теоремы 2.

$\square$

Теоремы 1 и 2 могут быть использованы для изучения локального поведения функций $f(\alpha)\in\mathfrak{M}(a,b)$.

Заключение. Получена асимптотическая формула среднего значения $f(\alpha)z^{\omega(\alpha)}$ в коротком интервале $x < N(\alpha) \le x+h$, где $\alpha \in Z[i]$, $\omega(\alpha)$ — число различных простых делителей α в $Z[i]$, а z — комплексное число, $|z| \le 2$.

1. **Katai I.** Some remarks on a paper Ramachandra [text] / Katai I.// Liet. math. rink. – 2003. – V. 43, 4. – P. 497–506.
2. **Ramachandra K.** Some problem on analytic number [text] / Ramachandra K.// Acta Arith. – 1976. – V. 31. – P.313–324.