Вісник Одеськ. держ. ун-ту. — 2000. — Т. 5, вип. 3. Фіз.-мат. науки. — С. 79–84.

УДК 517.977

Т. А. Мельник
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
"Диференціальні включення і оптимальне керування" ОНУ 25.05.2000

Проведено декомпозицію лінійної системи узагальнених диференційних рівнянь з швидкими та повільними змінними, припускающими імпульсний вплив в довільні моменти часу. Встановлена близкість розв'язків вихідної та спрощених задач.

Проведена декомпозиция линейной системы обобщенных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными, допускающих импульсные воздействия в произвольные моменты времени. Установлена близость решений исходной и упрощенных задач.

The decomposition for a linear system of generalized differential equations with fast and slow variables admitting impulse actions at any moment is constructed. The proximity of solutions of the input and simplified problems is established.

Введение. В работе [1] исследовались системы с импульсными воздействиями в заданные моменты времени. В данной работе проводится декомпозиция линейной системы с быстрыми и медленными переменными, допускающей импульсные воздействия в произвольные моменты времени. Для рассматриваемых систем устанавливается аналог теоремы о предельном переходе [2]. Данное исследование является обобщением результатов [3] для линейных сингулярно возмущенных систем с импульсными воздействиями и основывается на теории импульсных систем [4,5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую систему с импульсными воздействиями $z(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$,

$$\mathrm{D}z = A_1(t,\varepsilon t)z + A_2(t,\varepsilon t)y + N_1(t,\varepsilon t)u + B_1(t,\varepsilon t)Du, \qquad z(-0,\varepsilon) = z^0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &Dy = \varepsilon[A_3(t,\varepsilon t)z + A_4(t,\varepsilon t)y + N_2(t,\varepsilon t)u + B_2(t,\varepsilon t)Du] + E(\varepsilon t)Du, \\ &y(-0,\varepsilon) = y^0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $t \in [0,T]$; $T = L/\varepsilon$; u, z, y – r, M, m-мерные вектор-функции ограниченной вариации; функцию $u(t,\varepsilon) \in U \in \mathrm{comp}\,\mathrm{R}^r$ будем для определенности считать непрерывной справа, $\|Du\| \le C$, $C = \mathrm{const}$. Под решением [5] системы (1), (2) понимаем функции ограниченной вариации $z(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, удовлетворяющие интегральным уравнениям

$$z(t,\varepsilon) = z^0 + \int_0^t [A_1(s,\varepsilon)z(s,\varepsilon) + A_2(s,\varepsilon s)y(s,\varepsilon) + N_1(s,\varepsilon s)u(s,\varepsilon)]ds + \int_0^t B_1(s,\varepsilon s)Du,$$

$$y(t,\varepsilon) = y^0 + \varepsilon\int_0^t [A_3(s,\varepsilon)z(s,\varepsilon) + A_4(s,\varepsilon s)y(s,\varepsilon) + N_2(s,\varepsilon s)u(s,\varepsilon)]ds +$$

$$+\varepsilon\int_0^t B_2(s,\varepsilon s)Du + \int_0^t E(\varepsilon s)Du$$

© Т. А. Мельник, 2000

Здесь интегралы $\int\limits_0^t B_i(s,\varepsilon s)Du$, $\int\limits_0^t E(\varepsilon s)Du$ являются интегралами Римана-Стилтьеса.

Обозначим через $\widetilde{z}(t,\tau,y,u)$ решение присоединенной системы

$$D\widetilde{z} = A_1(t,\tau)\widetilde{z} + A_2(t,\tau)y + N_1(t,\tau)u + B_1(t,\tau)Du, \quad \widetilde{z}(-0,\tau,y,u) = z^0 \tag{3}$$

Здесь τ, y – параметры, u – некоторая функция ограниченной вариации.

Соответствующая упрощенная задача для медленных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} D\widetilde{y} &= \varepsilon[A_3(t,\varepsilon t)\widetilde{z}(t,\varepsilon t,\widetilde{y},\widetilde{u}) + A_4(t,\varepsilon t)\widetilde{y} + N_2(t,\varepsilon t)\widetilde{u} + B_2(t,\varepsilon t)D\widetilde{u}] + \\ &+ E(\varepsilon t)D\widetilde{u}, \qquad \widetilde{y}(-0,\varepsilon) = y^0, \end{aligned} \tag{4}$$

где функция ограниченной вариации $\widetilde{u}(t,\varepsilon) \in U$ непрерывна справа.

Пусть существует обратная матрица $A_1^{-1}(t,\tau)$, тогда можно записать, что $\widetilde{z}(t,\tau,y,u) = -A_1^{-1}(t,\tau)[A_2(t,\tau)\widetilde{y} + B_1(t,\tau)Du + N_1(t,\tau)u - D\widetilde{z}]$. Обозначим через $\overline{z}(t,\varepsilon) \equiv \widetilde{z}(t,\varepsilon t,\overline{y},\overline{u})$, где $\overline{u} \in U$, $\|D\overline{u}\| \le C$, и подставим в систему (4), получим

$$D\overline{y} = \varepsilon[\widetilde{A}(t,\varepsilon t)\overline{y} + \widetilde{N}(t,\varepsilon t)\overline{u} + \widetilde{B}(t,\varepsilon t)D\overline{u} + A_0(t,\varepsilon t)D\overline{z}] + E(\varepsilon t)D\overline{u}, \quad \overline{y}(-0,\varepsilon) = y^0 \tag{5}$$

Здесь $\widetilde{A} \equiv A_4 - A_0A_2$, $\widetilde{B} \equiv B_2 - A_0B_1$, $\widetilde{N} \equiv N_2 - A_0N_1$, $A_0 \equiv A_3A_1^{-1}$.

Введем следующие предположения:

1) Функции $A_1^{-1}(t,\tau)$, $A_j(t,\tau)$, $N_i(t,\tau)$, $B_i(t,\tau)$, $E(\tau)$ ($j = \overline{1,4}$, $i = \overline{1,2}$) непрерывны и ограничены константой $C > 0$ при $t \ge 0$, $\tau \in [0,L]$.

2) Фундаментальная матрица $\widetilde{Z}(t,s,\tau)$ $(0 \le s \le t)$, удовлетворяющая системе

$$\frac{\partial\widetilde{Z}}{\partial t} = A_1(t,\tau)\widetilde{Z}, \quad \frac{\partial\widetilde{Z}}{\partial s} = -\widetilde{Z}A_1(s,\tau), \quad \widetilde{Z}(s,s,\tau) = E_M,$$

экспоненциально устойчива равномерно по $\tau \in [0,L]$, т. е. существуют константы $\alpha_0 > 0$, и $C > 0$ такие, что для любых $\tau \in [0,L]$ справедливо неравенство $\left\|\widetilde{Z}(t,s,\tau)\right\| \le C\exp[-\alpha_0(t\text{-}s)]$, $0 \le s \le t$.

3) Имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left\|u - \overline{u}\right\|_{L_1[0,L/\varepsilon]} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left\|u(-0,\varepsilon) - \overline{u}(-0,\varepsilon)\right\| = 0.$$

Следующая теорема устанавливает сходимость решений $z(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ задачи (1),(2) к решению $\overline{z}\{t,\varepsilon)$, $\overline{y}(t,\varepsilon)$ задачи (3),(4) в норме пространства L_1.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1)–3). *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left\|x - \overline{x}\right\|_{L_1[0,L/\varepsilon]} = 0.$$

Здесь под вектором x понимаются векторы z и y в совокупности.

Замечание 1. Если в некоторый момент времени t имеет место равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|u(t,\varepsilon) - \overline{u}(t,\varepsilon)\right\| = 0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|x(t,\varepsilon) - \overline{x}(t,\varepsilon)\right\| = 0$.

2. Частный случай. На промежутке $0 \le \tau \le L$ рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\begin{aligned} \varepsilon Dz &= A_1(\tau)z + A_2(\tau)y + N_1(\tau)u + \varepsilon B_1(\tau)Du, \quad z(-0,\varepsilon) = z^0, \\ Dy &= A_3(\tau)z + A_4(\tau)y + N_2(\tau)u + B_2(\tau)Du, \quad y(-0,\varepsilon) = y^0. \end{aligned} \tag{6}$$

Формально положив параметр ε равным нулю, получим соответствующую вырожденную задачу

$$0 = A_1(\tau)\bar{z} + A_2(\tau)\bar{y} + N_1(\tau)\bar{u},$$
$$D\bar{y} = A_3(\tau)\bar{z} + A_4(\tau)\bar{y} + N_2(\tau)\bar{u} + B_2(\tau)D\bar{u}, \quad \bar{y}(-0) = y^0. \tag{7}$$

Рассмотрим следующие условия:

4) Функции $A_j(\tau)$, $B_i(\tau)$, $N_i(\tau)$ $(j = \overline{1,4};\ i = 1,2)$ непрерывны на сегменте $[0, L]$.

5) Собственные значения $\lambda_k(\tau)$ матрицы $A_1(\tau)$ при $\tau \in [0, L]$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_k(\tau) \le -\gamma < 0, \quad k = \overline{1, M}.$$

6) Имеют место предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(-0, \varepsilon) = \bar{u}(-0), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \| u - \bar{u} \|_{L_1[0,L]} = 0.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 4)–6). *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| x - \bar{x} \|_{L_1[0,L]} = 0.$$

3. Вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть выполняются условия* 1), 2). *Тогда фундаментальная матрица* $Z(t, s, \varepsilon)$ *системы* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$\| Z(t, s, \varepsilon) - \tilde{Z}(t, s, \varepsilon t) \| \le C\varepsilon \exp(-\alpha(t - s)),$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $0 \le s \le t \le L/\varepsilon$, $\alpha > 0$.

Доказательство леммы.

Фундаментальная матрица $Z(t, s, \varepsilon)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = A_1(t, \tau)Z + [A_1(t, \varepsilon t) - A_1(t, \tau)]Z, \quad Z(s, s, \varepsilon) = E_M,$$

откуда

$$Z(t, s, \varepsilon) = \tilde{Z}(t, s, \tau) + \int_s^t \tilde{Z}(t, r, \tau)[A_1(r, \varepsilon r) - A_1(r, \tau)]Z(s, s, \varepsilon)dr.$$

Таким образом, можно записать, что

$$\| Z(t, s, \varepsilon) - \tilde{Z}(t, s, \tau) \| \le \int_s^t \| \tilde{Z}(t, r, \tau) \| \| A_1(r, \varepsilon r) - A_1(r, \tau) \| \| \tilde{Z}(r, s, \varepsilon r) \| dr +$$
$$+ \int_s^t \| \tilde{Z}(t, r, \tau) \| \| A_1(r, \varepsilon r) - A_1(r, \tau) \| \| Z(r, s, \varepsilon) - \tilde{Z}(r, s, \varepsilon r) \| dr.$$

Введем гладкую по $\tau \in [0, L]$ функцию $\bar{A}_1(t, \tau, \varepsilon)$ такую, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняются неравенства

$$R(\tau) \equiv \| A_1(t, \tau) - \bar{A}_1(t, \tau, \varepsilon) \| \le C\varepsilon, \quad \| \bar{A}_1(t, \tau, \varepsilon) \| \le C, \quad \left\| \frac{\partial \bar{A}_1(t, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \right\| \le C.$$

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать, вообще говоря, разные константы, не зависящие от ε. Из условий 1), 2) следует, что

$$\| Z(t, s, \varepsilon) - \tilde{Z}(t, s, \tau) \| \le C \int_s^t [|\varepsilon r - \tau| + R(\tau) + R(\varepsilon r)] \exp(-\alpha_0(t - s))\, dr +$$
$$+ C \int_s^t [|\varepsilon r - \tau| + R(\tau) + R(\varepsilon r)] \exp(-\alpha_0(t - r)) \| Z(r, s, \varepsilon) - \tilde{Z}(r, s, \varepsilon r) \| dr.$$

Полагая $\tau = \varepsilon t$, получим

$$\left\| Z(t,s,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)\right\| \le C\varepsilon\int_s^t [(t-r)+2]\exp(-\alpha_0(t-s))\,dr+$$

$$+C\varepsilon\int_s^t [(t-r)+2]\exp(-\alpha_0(t-r))\left\| Z(r,s,\varepsilon)-\widetilde{Z}(r,s,\varepsilon r)\right\| dr.$$

Умножим левую и правую часть полученного равенства на $\exp(\alpha_0(t-s)/2)$ и обозначим $R(t)\equiv\left\| Z(t,s,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)\right\|\exp(\alpha_0(t-s)/2)$, тогда

$$R(t)\le C\varepsilon\int_s^t [(t-r)+2]\exp\left(-\frac{\alpha_0(t-r)}{2}\right)\exp\left(-\frac{\alpha_0(r-s)}{2}\right)dr+$$
$$+\,C\varepsilon\int_s^t [(t-r)+2]\exp\left(-\frac{\alpha_0(t-r)}{2}\right)R(r)\,dr. \tag{8}$$

В силу неравенства (8) и того, что $\tau\exp(-\alpha_0\tau/2)\le 2/(\alpha_0 e)$ при $\tau\ge 0$, по лемме Гронуолла-Беллмана получаем для некоторого $C>0$ оценку

$$R(t)\le C\varepsilon+C\varepsilon\int_s^t R(r)dr\le C\varepsilon\exp(C\varepsilon(t-s)).$$

Выберем $\varepsilon_0>0$ таким, чтобы при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполнялось неравенство $\alpha_0/2-C\varepsilon\ge\alpha_0/2-C\varepsilon_0\ge\alpha_0/4$, тогда

$$\left\| Z(t,s,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)\right\|\le C\varepsilon\exp\left(-\frac{\alpha_0(t-s)}{4}\right)$$

при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $0\le s\le t\le L/\varepsilon$.

Доказательство теоремы 1.

Для решений $z(t,\varepsilon)$ и $\widetilde{z}(t,\tau,y,u)$ систем (1), (3), соответственно, имеют место представления

$$z(t,\varepsilon)=Z(t,0,\varepsilon)z^0+\int_0^t Z(t,s,\varepsilon)\Psi(s,\varepsilon s,y(s,\varepsilon),u(s,\varepsilon))\,ds+\int_0^t Z(t,s,\varepsilon)B_1(s,\varepsilon s)\,Du, \tag{9}$$

$$\widetilde{z}(t,\tau,y,u)=\widetilde{Z}(t,0,\tau)z^0+\int_0^t \widetilde{Z}(t,s,\tau)\Psi(s,\tau,y,u(s,\varepsilon)\,ds+\int_0^t \widetilde{Z}(t,s,\tau)B_1(s,\tau)\,Du, \tag{10}$$

где $\Psi(t,\tau,y,u)\equiv A_2(t,\tau)y+N_1(t,\tau)u$.

В силу существования обратной матрицы $A_1^{-1}(t,\tau)$ из систем (1),(2) следует, что

$$Dy=\varepsilon[\widetilde{A}(t,\varepsilon t)y+\widetilde{N}(t,\varepsilon t)u+\widetilde{B}(t,\varepsilon t)Du+A_0(t,\varepsilon t)Dz]+E(\varepsilon t)Du,\quad y(-0,\varepsilon)=y^0. \tag{11}$$

Из систем (5),(11) вытекают интегральные представления

$$y(t,\varepsilon)=y^0+\varepsilon\int_0^t[\widetilde{A}(s,\varepsilon s)y(s,\varepsilon s)+\widetilde{N}(s,\varepsilon s)u(s,\varepsilon s)]\,ds+I_1(z)+I_2(u)+I_3(u),$$
$$\overline{y}(t,\varepsilon)=y^0+\varepsilon\int_0^t[\widetilde{A}(s,\varepsilon s)\overline{y}(s,\varepsilon s)+\widetilde{N}(s,\varepsilon s)\overline{u}(s,\varepsilon s)]\,ds+I_1(\overline{z})+I_2(\overline{u})+I_3(\overline{u}), \tag{12}$$

где

$$I_1(z)\equiv\varepsilon\int_0^t A_0(s,\varepsilon s)\,Dz,\quad I_2(u)\equiv\varepsilon\int_0^t\widetilde{B}(s,\varepsilon s)\,Du,\quad I_3(u)\equiv\int_0^t E(\varepsilon s)\,Du.$$

Выберем гладкие по τ функции $\overline{A}_0(s,\tau,\varepsilon)$, $\overline{B}(s,\tau,\varepsilon)$, $\overline{E}(\tau,\varepsilon)$, ограниченные вместе со своими частными производными по τ константой $C>0$ такие, что при $\varepsilon\le\varepsilon_0$ выполнялись неравенства

$$\left\|A_0(s,\tau)-\overline{A}_0(s,\tau,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon,\ \left\|\widetilde{B}(s,\tau)-\overline{B}(s,\tau,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon,\ \left\|E(\tau)-\overline{E}(\tau,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon,\quad \tau\in[0,L].$$

Тогда справедливо представление

$$I_1(z)=\varepsilon\int_0^t[A_0(s,\varepsilon s)-\overline{A}_0(s,\varepsilon s,\varepsilon)]\,Dz+\varepsilon\int_0^t\overline{A}_0(s,\varepsilon s)\,Dz=\varepsilon\int_0^t[A_0(s,\varepsilon s)-\overline{A}_0(s,\varepsilon s,\varepsilon)]\,Dz+$$

$$+\varepsilon\,\overline{A}_0(t,\varepsilon t)\,z(t,\varepsilon)-\varepsilon\,\overline{A}_0(0,0)\,z^0-\varepsilon\int_0^t\frac{d\overline{A}_0(s,\varepsilon s)}{ds}\,z(s,\varepsilon)\,ds,$$

Аналогично

$$I_2(u)=\varepsilon\int_0^t[\widetilde{B}(s,\varepsilon s)-\overline{B}(s,\varepsilon s,\varepsilon)]\,Du+\varepsilon\overline{B}(t,\varepsilon t,\varepsilon)\,u(t,\varepsilon)-\varepsilon\,\overline{B}(0,0,\varepsilon)\,u(-0,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\int_0^t\frac{d\overline{B}(s,\varepsilon s,\varepsilon)}{ds}\,u(s,\varepsilon)\,ds,\ \ I_3(u)=\int_0^t[E(\varepsilon s)-\overline{E}(\varepsilon s,\varepsilon)]\,Du+\overline{E}(\varepsilon t,\varepsilon)\,u(t,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\overline{E}(0,\varepsilon)\,u(-0,\varepsilon)-\varepsilon\int_0^t\frac{d\overline{E}(\varepsilon s,\varepsilon)}{d\tau}\,u(s,\varepsilon)\,ds,$$

Интегрируя по частям в представлении (10), при $\tau=\varepsilon t$, $u=\overline{u}$, $y=\overline{y}$ получаем

$$\overline{z}(t,\varepsilon)=\widetilde{Z}(t,0,\varepsilon t)\,z^0+\int_0^t\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[A_2(s,\varepsilon t)\,\overline{y}(t,\varepsilon)+N_1(s,\varepsilon t)\,\overline{u}(s,\varepsilon)]\,ds+$$

$$+\int_0^t\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[B_1(s,\varepsilon t)-\overline{B}_1(s,\varepsilon t,\varepsilon)]D\overline{u}+ \tag{13}$$

$$+\overline{B}_1(t,\varepsilon t,\varepsilon)\overline{u}(t,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,0,\varepsilon t)\overline{B}_1(0,0,\varepsilon)\overline{u}(-0,\varepsilon)-\int_0^t\frac{\partial(\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)\overline{B}_1(s,\varepsilon t,\varepsilon))}{\partial s}\overline{u}(s,\varepsilon)\,ds$$

Здесь $\left\|B_1(s,\tau)-\overline{B}_1(s,\tau,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon$, при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Из уравнений (12), (13) и условий 1), 2) следует, что

$$\left\|\overline{x}(t,\varepsilon)\right\|\le C\quad\text{при}\quad t\in[0,L/\varepsilon]. \tag{14}$$

Введем обозначения $Rx(t,\varepsilon)\equiv x(t,\varepsilon)-\overline{x}(t,\varepsilon)$, $Ru(t,\varepsilon)\equiv u(t,\varepsilon)-\overline{u}(t,\varepsilon)$. Из представления (12) запишем, что

$$Ry(t,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^t[\widetilde{A}(s,\varepsilon s)Ry(s,\varepsilon)+\widetilde{N}(s,\varepsilon s)Ru(s,\varepsilon)]ds+I_1(Rz)+I_2(Ru)+I_3(Ru),$$

где

$$Rz(t,\varepsilon)=[Z(t,0,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,0,\varepsilon t)]\,z^0+\int_0^t\{Z(t,s,\varepsilon)\,A_2(s,\varepsilon s)\,Ry(s,\varepsilon)+[Z(t,s,\varepsilon)-$$

$$-\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)]\,A_2(s,\varepsilon s)\,\overline{y}(t,\varepsilon)+\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[A_2(s,\varepsilon s)-A_2(s,\varepsilon t)]\,\overline{y}(t,\varepsilon)+$$

$$+Z(t,s,\varepsilon)\,A_2(s,\varepsilon s)\,[\varepsilon\int_t^s(A_3(r,\varepsilon r)\overline{z}(r,\varepsilon)+A_4(r,\varepsilon r)\,\overline{y}(r,\varepsilon)+N_2(r,\varepsilon r)\,\overline{u}(r,\varepsilon))\,dr+$$

$$+(\varepsilon\int_t^s B_2(r,\varepsilon r)D\overline{u}+\int_t^s E(\varepsilon t)D\overline{u})]\}ds+\int_0^t\{Z(t,s,\varepsilon)N_1(s,\varepsilon s)Ru(s,\varepsilon)+[Z(t,s,\varepsilon)-$$

$$-\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)]N_1(s,\varepsilon s)\overline{u}(s,\varepsilon)+\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[N_1(s,\varepsilon s)-N_1(s,\varepsilon t)]\overline{u}(s,\varepsilon)\}ds+$$

$$+\int_0^t Z(t,s,\varepsilon)[B_1(s,\varepsilon s)-\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)]Du-\int_0^t\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[B_1(s,\varepsilon t)-\overline{B}_1(s,\varepsilon t,\varepsilon)]D\overline{u}+$$

$$+\overline{B}_1(t,\varepsilon t,\varepsilon)Ru(t,\varepsilon)-Z(t,0,\varepsilon)\overline{B}_1(0,0,\varepsilon)Ru(-0,\varepsilon)-$$

$$-[Z(t,0,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,0,\varepsilon t)]\overline{B}_1(0,0,\varepsilon)\overline{u}(-0,\varepsilon)+$$

$$+\int_0^t Z(t,s,\varepsilon)\left[A_1(s,\varepsilon s)\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)-\frac{\partial\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)}{\partial s}\right]Ru(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_0^t\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[A_1(s,\varepsilon s)\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)-A_1(s,\varepsilon t)\overline{B}_1(s,\varepsilon t,\varepsilon)]\overline{u}(s,\varepsilon)ds-$$

$$-\int_0^t\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)[\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)-\overline{B}_1(s,\varepsilon t,\varepsilon)]\overline{u}(s,\varepsilon)ds-\varepsilon\int_0^t Z(t,s,\varepsilon)\frac{\partial B_1(s,\varepsilon s)}{\partial\tau}u(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_0^t[Z(t,s,\varepsilon)-\widetilde{Z}(t,s,\varepsilon t)]\left[A_1(s,\varepsilon s)\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)-\frac{\partial\overline{B}_1(s,\varepsilon s,\varepsilon)}{\partial s}\right]u(s,\varepsilon)ds.$$

Умножая левые и правые части последних двух представлений на ε и оценивая по норме пространства $L_1[0,L/\varepsilon]$, в силу леммы Гронуолла-Беллмана получаем утверждение теоремы 1.

Заключение. Таким образом, установлена близость в норме пространства L_1 решений исходной и упрощенных задач для систем линейных дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными, допускающих импульсные воздействия в произвольные моменты времени.

1. **Перестюк Н. А., Лисовская В. П.** Периодические решения сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений подверженных импульсному воздействию // Дифференциальные уравнения с малым параметром. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1989. – С. 85–93.
2. **Тихонов А. Н.** Системы дифференциальных уравнений содержащих параметры // Математ. сборник. – 1952. – Т. 31 (73), № 3. – С. 575–586.
3. **Плотников В. А.** Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. – К.: 1993. – 62 с. (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 93-27).
4. **Самойленко А. М., Перестюк Н. А.** Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща школа. – 1987. – 288 с.
5. **Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.** Импульсные процессы: Модели и приложения.– М.: Наука, 1991.– 256 с.