ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.– 2016.– Т. 21, вип. 2(28).– С. 12–18

УДК 514.76

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО КВАЗІАРЕАЛЬНУ НЕСКІНЧЕННО МАЛУ ДЕФОРМАЦІЮ КАТЕНОЇДА

В даній роботі розглянута квазіареальна нескінченно мала деформація катеноїда, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі.
MSC: 53A10.
Ключові слова: деформація, катеноїд, вектор зміщення, варіація .

Вступ. Основні рівняння квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні (квазіареальної н. м. д.) були здобуті в роботі [1]. В [2] розглядалася задача про квазіареальну н. м. д., при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі. В цій роботі встановлено, що для існування зазначеної деформації необхідно і достатньо, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - T^{\alpha} b^{\beta}_{\alpha} + \mu_{\alpha} c^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T^{\alpha}_{,j} - b_{ij}\mu = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

мала ненульовий розв'язок $(T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}, \mu)$. Тут через $c_{\alpha\beta}$ позначено дискримінантний тензор поверхні ($c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, g_{ij}$– метричний тензор, $\alpha, \beta, i, j = 1, 2$), b_{ij}– коефіцієнти другої квадратичної форми. Симетричний тензор $T^{\alpha\beta} \in C^2$, контраваріантний вектор $T^{\alpha} \in C^2$ і функція $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$ входять до розкладу частинних похідних вектора зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$ квазіареальної н. м. д. поверхні за базисом $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{n}$

$$\overline{U_i} = \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu\delta^{\beta}_{i} \right) \overline{r_{\beta}} + c_{i\alpha} T^{\alpha} \overline{n}, \tag{2}$$

де $\overline{r_i} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^i}, \overline{n}$– орт нормалі поверхні, δ^{α}_{β}–символи Кронекера.

Має місце

Теорема 1. *[3] Будь-яка мінімальна поверхня ненульової гаусової кривини S допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. При цьому тензорні поля $T^{\alpha\beta} \in C^2, T^{\alpha} \in C^2$ та функція $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$ явно виражаються через довільну гармонічну функцію $\psi = \psi(x^1, x^2)$:*

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2K} \psi_{\gamma,k} \left(c^{\alpha\gamma} b^{k\beta} + c^{\beta\gamma} b^{k\alpha} \right), \ T^{\alpha} = c^{\alpha\gamma}\psi_{\gamma}, \ \mu = \frac{1}{2K} \psi_{\alpha,\beta} b^{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Об'єктом дослідження в [3] була квазіареальна н. м. д. мінімальної поверхні, при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі. Оскільки отримані результати носять виключно теоретичний характер, то надалі ми маємо намір на прикладі поверхні катеноїда продемонструвати викладену в роботі [3] теорію.

Надійшла 12.10.2016

Основні результати. Катеноїд — це єдина мінімальна поверхня обертання ненульової гаусової кривини, яка утворюється обертанням ланцюгової лінії

$$x^2 = a \operatorname{ch} \frac{x^1}{a}$$

навколо вісі OX^1 [4,5]. Форму катеноїда набуває мильна плівка, натягнута на два дротяних кола, площини яких перпендикулярні до лінії, що з'єднує їх центри.

Нехай рівняння катеноїда S задано у параметричному вигляді

$$\overline{r} = \left\{\operatorname{ch} x^1 \cos x^2, \operatorname{ch} x^1 \sin x^2, x^1\right\}. \tag{4}$$

Обчислимо

$$\begin{gathered}
\overline{r_1} = \{\ shx^1 \cos x^2,\ shx^1 \sin x^2, 1\},\\
\overline{r_2} = \{-\ chx^1 \sin x^2,\ chx^1 \cos x^2, 0\},\\
\overline{n} = \{\frac{-\cos x^2}{chx^1}, \frac{-\sin x^2}{chx^1}, \frac{shx^1}{chx^1}\},\\
g_{11} = g_{22} = \operatorname{ch}^2 x^1,\ g_{12} = 0,\\
b_{11} = -1,\ b_{22} = 1,\ b_{12} = 0, \qquad (5)\\
b_1^1 = \frac{-1}{\operatorname{ch}^2 x^1},\ b_2^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^1},\ b_2^1 = b_1^2 = 0,\\
d_1^1 = -\operatorname{ch}^2 x^1,\ d_2^2 = \operatorname{ch}^2 x^1,\ d_2^1 = d_1^2 = 0,\\
H = 0, K = -\frac{1}{\operatorname{ch}^4 x^1},\\
\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = thx^1,\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,
\end{gathered}$$

де $d_j^i = d^{i\alpha} g_{\alpha j}, d^{i\alpha}-$ тензор, обернений до тензора $b_{i\alpha}$, $H-$ середня кривина поверхні, $K-$ повна кривина поверхні, Γ_{ij}^k- символи Христофеля. Оскільки $g_{11} = g_{22},\ g_{12} = 0$, то поверхня катеноїда, задана у вигляді (4), віднесена до ізотермічної координатної сітки. Має місце

Теорема 2. *Поверхня катеноїда допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі з вектором зміщення*

$$\overline{U} = \left\{c \operatorname{sh} x^1 \cos x^2 + c_1;\ c \operatorname{sh} x^1 \sin x^2 + c_2;\ 0\right\},\ c \neq 0, c, c_1, c_2 = const. \tag{6}$$

Доведення. В теоремі 1 обґрунтовується існування квазіареальної н. м. д. довільної мінімальної поверхні, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. Доведено, що тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ та функція μ виражаються через довільну гармонічну функцію за формулами (3).

Задамо гармонічну функцію $\psi(x^1, x^2)$ як лінійну функцію, а саме

$$\psi(x^1, x^2) = cx^1 + c_0,\ c \neq 0,\ c, c_0 = const, \tag{7}$$

і знайдемо тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ та функцію μ у випадку катеноїда.

З (7) маємо

$$\psi_1 = c,\ \psi_2 = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = \psi_i. \tag{8}$$

Для обчислення компонентів $\psi_{1,1},\ \psi_{2,2},\ \psi_{1,2} = \psi_{2,1}$ використаємо формулу для визначення коваріантної похідної від градієнтного вектора ψ_i у розгорнутому вигляді

$$\psi_{i,j} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x^j} - \psi_\alpha\Gamma^\alpha_{ij}. \tag{9}$$

З урахуванням $(5)_9$ і (8) з (9) здобудемо

$$\psi_{1,1} = \frac{-c}{2}\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial x^1} = -c\ thx^1,\ \psi_{2,2} = \frac{c}{2}\frac{\partial\ln g_{11}}{\partial x^1} = c\ thx^1,\ \psi_{1,2} = \psi_{2,1} = 0. \tag{10}$$

Внаслідок підставляння в (3) відповідних значень з формул (5), (8) і (10) для поверхні катеноїда дістанемо вирази для компонентів тензорів деформації $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$ і функції μ

$$T^{11} = T^{12} = T^{22} = 0,\ T^1 = 0,\ T^2 = \frac{-c}{\operatorname{ch}^2 x^1},\ \mu = -c\ thx^1,\ c \neq 0, c = const. \tag{11}$$

Внесемо в (2) замість $T^{\alpha\beta},\ T^\alpha$ та функції μ їх відповідні значення з (11), тоді у випадку катеноїда отримаємо систему двох векторних рівнянь відносно однієї невідомої — вектор-функції $\overline{U}(x^1, x^2)$

$$\begin{cases} \overline{U_1} = c\ thx^1\overline{r_1} - c\overline{n}, \\ \overline{U_2} = c\ thx^1\overline{r_2}. \end{cases} \tag{12}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи рівнянь. Для цього спочатку з другого рівняння визначимо

$$\overline{U} = c\ thx^1\overline{r} + \overline{\varphi}(x^1), \tag{13}$$

де $\overline{\varphi}(x^1)$– довільна векторна функція від однієї змінної x^1. Отриманий вираз (13) підставимо в перше рівняння системи (12), звідки дістанемо умову на вектор-функцію $\overline{\varphi}(x^1)$

$$\overline{\varphi\prime} = \frac{-c}{ch^2x^1}\overline{r} - c\overline{n}. \tag{14}$$

Проінтегруємо (14) з урахуванням формул (4), $(5)_3$:

$$\overline{\varphi}(x^1) = \{c_1;\ c_2;\ -cx^1\ thx^1\}, c \neq 0, c, c_1, c_2 = const. \tag{15}$$

Нарешті внесемо в (13) замість функції $\overline{\varphi}$ її представлення з (15), тоді отримаємо компоненти вектора зміщення $\overline{U}$ квазіареальної н. м. д. катеноїда у явному вигляді

$$\overline{U} = \left\{c\operatorname{sh}x^1\cos x^2 + c_1;\ c\operatorname{sh}x^1\sin x^2 + c_2;\ 0\right\},\ c \neq 0, c, c_1, c_2 = const.$$

Таким чином, внаслідок деформування катеноїда S дістали поверхню S^* :

$$\overline{r^*} = \overline{r} + t\overline{U}, \tag{16}$$

де $\overline{U}$ — вектор-функція (6). Теорема доведена.

Наявність вектора зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$, а також його вигляд (6) дає змогу сформулювати таку теорему

Теорема 3. *Якщо катеноїд закріпити лише в одній точці, то він буде жорстким відносно квазіареальної н. м. д., при якій відхилення від дотичної площини є стаціонарним у будь-якому напрямі.*

Має місце також

Теорема 4. *Квазіареальна нескінченно мала деформація катеноїда з вектором зміщення (6) має такі властивості:*

1) *деформація катеноїда не зводиться до ареальної;*
2) *асимптотичні лінії катеноїда при цій деформації залишаються стаціонарними;*
3) *здеформована поверхня катеноїда S^* є мінімальною;*
4) *варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми катеноїда мають вигляд*

$$2\varepsilon_{11} = 2\varepsilon_{22} = c \operatorname{sh} 2x^1, \ 2\varepsilon_{12} = 0, \ c \neq 0; \tag{17}$$

5) *варіація гаусової кривини катеноїда*

$$\delta K = \frac{4c \ thx^1}{\operatorname{ch}^4 x^1}, \ c \neq 0. \tag{18}$$

Доведення. Насамперед відзначимо, що квазіареальна н. м. д. катеноїда з вектором зміщення (6) не зводиться до ареальної. Дійсно, необхідною і достатньою умовою того, що квазіареальна н. м. д. поверхні зводиться до ареальної, є рівність $\mu \equiv 0$ [1]. У нашому випадку функція μ дорівнює

$$\mu = -c \ thx^1, \ c \neq 0, c = const.$$

Доведемо, що при квазіареальній н. м. д. катеноїда зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі асимптотичні лінії також залишаються стаціонарними. Мінімальна поверхня є поверхнею від'ємної гаусової кривини і на такій поверхні існує регулярна сітка дійсних асимптотичних ліній. На поверхні S рівняння асимптотичних ліній має вигляд

$$b_{ij} dx^i dx^j = 0, \tag{19}$$

а на здеформованій поверхні S^* (16) асимптотичні лінії слід шукати з рівняння

$$b^*_{ij} dx^i dx^j = 0. \tag{20}$$

Аналітичною умовою того, що при зазначеній деформації відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі, є умови $\beta_{ij} = 0$, де $\beta_{ij}-$ це варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми [2]. Використовуючи розкладення коефіцієнтів другої квадратичної форми b^*_{ij} поверхні S^* в ряд за степенями t, дістанемо

$$b^*_{ij} dx^i dx^j = b_{ij} dx^i dx^j + t\beta_{ij} dx^i dx^j + o(t^2). \tag{21}$$

З останнього співвідношення маємо, що за умов $\beta_{ij} = 0$ формули (19) та (20) визначають одні і ті ж геометричні образи. Звідси випливає, що у випадку, коли при квазіареальній нескінченно малій деформації катеноїда відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі, то асимптотичні лінії зберігаються.

Для подальшого нам знадобляться наступні формули, отримані в роботі [1]

$$2\delta H = T^{\alpha\beta} c_{\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\beta} + T^{\alpha}_{,\beta} c^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + 2H\mu, \tag{22}$$

$$2H^* = 2H + t\left(T^{\alpha\beta} c_{\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\beta} + T^{\alpha}_{,\beta} c^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + 2H\mu\right) + o(t^2), \tag{23}$$

$$2\varepsilon_{ij} = T^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta}\right) - 2\mu g_{ij}, \tag{24}$$

$$\delta K = K(d^{\alpha\beta}\beta_{\alpha\beta} + 4\mu). \tag{25}$$

Покажемо, що здеформована поверхня катеноїда S^* є мінімальною. Для цього підставимо в (22) замість тензорів деформації $T^{\alpha\beta}$, T^{α} їх представлення через гармонічну функцію ψ з (3), тоді для мінімальної поверхні отримаємо

$$\delta H = 0.$$

На підставі формули (23) одержуємо, що середня кривина H^* поверхні S^* дорівнює нулю. Отже, поверхня S^* є мінімальною.

Тепер переконаємося в тому, що варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми катеноїда мають вигляд (17). Внесемо в (24) замість поля деформації $T^{\alpha\beta}$ та функції μ їх відповідні представлення з (11), тоді, беручи до уваги формулу $(5)_4$, врешті решт для поверхні катеноїда знайдемо явні вирази компонентів першого тензора деформації ε_{ij}

$$2\varepsilon_{11} = 2\varepsilon_{22} = c\,\mathrm{sh}\,2x^1,\ 2\varepsilon_{12} = 0,\ c \neq 0.$$

Далі доведемо, що варіація гаусової кривини поверхні катеноїда при її квазіареальній н. м. д. зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі виражається за формулою (18). Дійсно, оскільки при зазначеній деформації варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми дорівнюють нулю, то з (25) маємо

$$\delta K = 4K\mu.$$

Звідси для варіації гаусової кривини катеноїда остаточно дістанемо

$$\delta K = \frac{4c\ thx^1}{\mathrm{ch}^4 x^1},\ c \neq 0.$$

Теорему доведено.

Висновки. В даній роботі розглянуто квазіареальну н. м. д. катеноїда, при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі. В теоремі 2 доведено, що така деформація існує і в явному вигляді здобуто поле зміщення $\overline{U}$. До того ж встановлено, що зазначена деформація має властивості, викладені в теоремі 4.

1. **Безкоровайна Л. Л.** Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3 / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Proc. Intern.Geom. Center. – 2014. – № 2. – С. 6–19.
2. **Безкоровайна Л. Л.** Аналітичне моделювання однієї задачі квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Proc. Intern.Geom. Center. – 2015. – № 2. – С. 34–42.
3. **Безкоровайна Л. Л.** Деформація з заданим законом змінювання елемента площі мінімальної поверхні / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р., Київ: матеріали конф. Т.2: Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 52–56.
4. **Основы теории поверхностей в тензорном изложении** Ч. 1: Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности / [сост. Каган В. Ф ; ред. Гуревича Г. Б.]. – Москва: ОГИЗ, 1947. – 512 с.
5. **Основы теории поверхностей в тензорном изложении** Ч. 2: Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы / [сост. Каган В. Ф ; ред. Гуревича Г. Б.]. – Москва: ОГИЗ, 1948. – 410 с.

Безкоровайная Л. Л., Хомич Ю. С.
О квазиареальной бесконечно малой деформации катеноида

Резюме

В данной работе рассмотрена квазиареальная бесконечно малая деформация катеноида, при которой отклонение от касательной плоскости сохраняется в любом направлении.
Ключевые слова: деформация, катеноид, вектор смещения, вариация.

Bezkorovaina L. L., Khomych. Y. S.
About the quasiareal infinitesimal deformation of catenoid

Summary

In this paper we considered the quasiareal infinitesimal deformation of catenoid under which the deviation from the tangent plane is preserved in all directions.
Key words: deformation, catenoid, vector of displacement, variation.

References

1. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Yu. S. (2014), Quasiarial infinitesimal deformation of surfaces in E_3 [Kvaziarealna neskinchenno mala deformaciya poverxni v E_3], *Proc. Intern. Geom. Center*, no. 2, pp. 6–19.
2. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Yu. S. (2015), Analytical modeling of a problem of quasiareal infinitesimal deformation of surfaces [Analitychne modelyuvannya odniyeyi zadachi kvaziarealnoyi neskinchenno maloyi deformaciyi poverxni], *Proc. Intern. Geom. Center*, no. 2, pp. 34–42.
3. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Yu. S. (2015), Deformation of the given law of changing the element area of a minimal surface [Deformaciya z zadanym zakonom zminyuvannya elementa ploshhi minimalnoyi poverxni], *Sixteenth International Conference named. Acad. Michail Kravchuck, May 14-15, 2015, Kyiv*, Conf. proc., Vol. 2, Algebra. Geometry. Mathematical Analysis, K.: NTUU «KPI», pp. 52–56.

4. Kagan, V. F. et al. (1947), Fundamentals of the theory of surfaces in tensor presentation. Part 1. The studies apparatus. General foundations of the theory and the intrinsic geometry of the surface, (comp. Kagan V. F.; ed. Gurevich G. B.), Moscow: OGIZ, 512 p.
5. Kagan, V. F. et al. (1948), Fundamentals of the theory of surfaces in tensor presentation. Part 2. Surfaces in space. Imaging and deformation of surfaces. Special issue, (comp. Kagan V. F.; ed. Gurevich G. B.), Moscow: OGIZ, 410 p.