Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 62–68

УДК 511.33

Ф. Б. Ковальчик
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ОДНА АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА НА k- И l-СВОБОДНЫХ ЧИСЛАХ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
“Аналітична теорія чисел” ОНУ 27.04.2002 р.

В роботі знайдена кількість розв’язків діофантова рівняння $n-1=x^2+y^2$, $n\le N$, $n=a^2+b^2$ пробігає свої значення без повторень, $n\in M_k$, $n-1\in M_l$, де M_k та M_l – множина натуральних чисел, вільних від k-х та l-х степенів відповідно.

В работе найдено число решений диофантова уравнения $n-1=x^2+y^2$, $n\le N$, $n=a^2+b^2$ пробегает свои значения без повторений, $n\in M_k$, $n-1\in M_l$, где M_k и M_l – множества натуральных чисел, свободных от k-х та l-х степеней соответственно.

The solution number of the Diophantine equation $n-1=x^2+y^2$, $n\le N$ is found, $n=a^2+b^2$ runs through its values without recurrings, $n\in M_k, n-1\in M_l$, where M_k and M_l are the sets of the natural numbers, which free from degrees k and l correspondingly.

Введение. Задача о числе решений диофантова уравнения

$$n-1=x^2+y^2,\ n\le N,$$

$n=a^2+b^2$ пробегает свои значения без повторений, причем $n-1\in M_l$, $n\in M_k$, где M_l и M_k – множества натуральных чисел, свободных от l-х и k-х степеней соответственно, является бинарной аддитивной задачей типа Харди – Литтлвуда на редких последовательностях. Число решений $Q(N)$ данного диофантова уравнения выражается суммой

$$Q(N)=\sum_{\substack{n\le N, n\in M_k,\\ n-1\in M_l}} r_1(n)\,r(n-1),$$

где $r(m)=4\sum_{d|m}\chi_4(d)$ – число представлений натурального m суммой двух квадратов целых чисел, χ_4 – неглавный характер $\bmod 4$, а $r_1(m)=\begin{cases}1, & \text{если } m=a^2+b^2,\\ 0, & \text{иначе}.\end{cases}$

В работах [1], [2] были решены задачи $\sum_{n\le N} r(N-n)\,r_1(n)$ и $\sum_{n\le N} r(n-1)\,r_1(n)$ без условия $n\in M_k, n-1\in M_l, k,l\ge 2$.

Ц е л ь ю статьи является доказательство следующего утверждения:

Теорема. *При* $N \to \infty$, $\lambda = 0{,}042$ *справедлива асимптотическая формула*

$$Q(N) = \left(1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^l}\right)\pi \prod_{p \equiv 1(4)}\left(1 - \frac{(p-1)p^{l-1} + p^{k-1}(p(l+1)-l)}{p^{k+l}}\right)\times$$

$$\times \prod_{q \equiv 3(4)} A(k,l,q)\frac{N}{\sqrt{\ln N}} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{1/2+\lambda}}\right)$$

с постоянной в символе "O", зависящей только от k *и* l. *При этом*

$$A(k,l,q) = 1 - \frac{q^{k-\delta(k)} + q^{l-u(l)}}{(q-1)q^{k+l-1+v(k,l)}} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ll} \delta(k) = u(l) = v(k,l) = 0 & \text{при } k \equiv l \equiv 0(2) \\ \delta(k) = u(l) = 0, v(k,l) = 1 & \text{при } k \equiv l \equiv 1(2) \\ \delta(k) = 1, u(l) = v(k,l) = 0 & \text{при } k \equiv 0, l \equiv 1(2) \\ \delta(k) = 0, u(l) = 1, v(k,l) = 0 & \text{при } k \equiv 1, l \equiv 0(2) \end{array}.$$

В частности, при $k = l = 2$, *т.е. когда* $(n-1)$ *и* n *соседние бесквадратные,*

$$Q(N) = \frac{\pi}{2}\prod_{p \equiv 1(4)}\left(1 - \frac{4p-3}{p^3}\right)\prod_{q \equiv 3(4)}\left(1 - \frac{3q+2}{q^3}\right)\frac{N}{\sqrt{\ln N}} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{1/2+\lambda}}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на несколько пунктов:

1. Предварительные преобразования. Обозначим

$$S = \sum_{\substack{n \le N, n \in M_k, \\ n-1 \in M_l}} r_1(n) r(n-1) = 4\sum_{\substack{n \le N, n \in M_k, \\ n-1 \in M_l}} r_1(n)\sum_{t \mid n-1}\chi_4(t) =$$

$$= 4\sum_{\substack{n \le N, n \in M_k, \\ n-1 \in M_l}} r_1(n)\left\{\sum_{\substack{t \mid n-1 \\ t \le N^{1/2}N_1^{-1}}}\chi_4(t) + \sum_{\substack{t \mid n-1 \\ N^{1/2}N_1^{-1} < t \le N^{1/2}N_1}}\chi_4(t) + \sum_{\substack{t \mid n-1 \\ t > N^{1/2}N_1}}\chi_4(t)\right\} = S_1 + S_2 + S_3.$$

При этом $N_1 = \ln^A N, A \ge 10$, A – постоянная.

Учитывая характеристическую функцию множеств M_k и M_l, после несложных преобразований приведем S_1 к виду:

$$S_1 = 4\sum_{d \le L}\mu(d)\sum_{\substack{\delta \le M \\ (\delta,d)=1}}\mu(\delta)\sum_{a \mid d^l}\chi_4(a)\sum_{\substack{t \le Pa^{-1} \\ (t, d^l\delta a^{-1})=1}}\chi_4(t)\sum_{\substack{n \le N\delta^{-k} \\ n \equiv b(d^l t) \\ (b, d^l t)=1}} r_1(\delta^k n) + O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right). \tag{1.1}$$

В (1.1) $P = N^{1/2}N_1^{-1}$, $L = (\ln N)^{\frac{l+4}{l-1}}$, $M = (\ln N)^{\frac{5l}{(l-1)(k-1)}}$, μ – функция Мебиуса.

К внутренней сумме по n в (1.1) прибавим и вычтем

$$\frac{1}{\varphi(d^l t)}\sum_{\substack{n \le N\delta^{-k} \\ (n, d^l t)=1 \\ 4 \nmid d^l t}} r_1(\delta^k n) \text{ и } \frac{2}{\varphi(d^l t)}\sum_{\substack{n \le N\delta^{-k} \\ (n, d^l t)=1 \\ 4 \mid d^l t}} r_1(\delta^k n),$$

где φ – функция Эйлера.

Тогда

$$S_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 =$$

$$= 4\sum_{d\le L}\mu(d)\sum_{\substack{\delta\le M\\(\delta,d)=1}}\mu(\delta)\sum_{a|d^l}\chi_4(a)\sum_{\substack{t\le Pa^{-1}\\(t,d^l\delta a^{-1})=1}}\frac{\chi_4(t)}{\varphi(d^l t)}\sum_{\substack{n\le N\delta^{-k}\\(n,d^l t)=1\\4\nmid d^l t}} r_1(\delta^k n) +$$

$$+4\sum_{d\le L}\mu(d)\sum_{\substack{\delta\le M\\(\delta,d)=1}}\mu(\delta)\sum_{a|d^l}\chi_4(a)\sum_{\substack{t\le Pa^{-1}\\(t,d^l\delta a^{-1})=1}}\chi_4(t)\left\{\sum_{\substack{n\le N\delta^{-k}\\n\equiv b(d^l t)\\(b,d^l t)=1}} r_1(\delta^k n) - \frac{1}{\varphi(d^l t)}\sum_{\substack{n\le N\delta^{-k}\\(n,d^l t)=1\\4\nmid d^l t}} r_1(\delta^k n)\right\} + T_3 + T_4.$$

Суммы T_3 и T_4 соответствуют слагаемому $\displaystyle\frac{2}{\varphi(d^l t)}\sum_{\substack{n\le N\delta^{-k}\\(n,d^l t)=1\\4|d^l t}} r_1(\delta^k n)$.

Суммы T_2 и T_4 оцениваем с помощью усредненного закона распределения функции $r_1(n)$ в арифметических прогрессиях [1, с.123; 2, теорема 2] и в итоге они дают $T_2 + T_4 = O\left(\dfrac{N}{\ln^A N}\right)$.

2. Нахождение суммы $T_1 + T_3$. Проведем его в несколько этапов. Сначала, поменяв местами суммирование по t и n, получаем асимптотическую формулу суммы

$$\sum_{\substack{t\le P\cdot a^{-1}\\(t,n\delta d^l a^{-1})=1}}\frac{\chi_4(t)}{\varphi(d^l t)} = \frac{\pi}{4}\prod_p\left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right)\prod_{p|d^l\delta n a^{-1}}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right)\prod_{p|d^l\delta n}\frac{p(p-1)}{p(p-1)+\chi_4(p)} +$$

$$+O\left(\frac{a\tau\left(\delta n d^l a^{-1}\right)\varphi\left(\delta n d^l a^{-1}\right)\ln\left(Pa^{-1}\right)}{\varphi\left(d^l\right)Pd^l\delta n}\right)+O\left(\frac{1}{\left(Pa^{-1}\right)^{1-\varepsilon}}\right)$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, τ – функция делителей. Затем, чтобы найти асимптотическую формулу суммы $\displaystyle\sum_{\substack{n\le N\cdot\delta^{-k}\\(n\delta,d^l)=1}} r_1\left(\delta^k n\right)F(\delta n)$, где $F(\delta n) = \displaystyle\prod_{p|\delta n}\frac{(p-\chi_4(p))(p-1)}{p(p-1)+\chi_4(p)}$, строим производящий ряд функции $r_1 F$, который при $\mathrm{Re}\, s > 1$ имеет вид

$$\mathfrak{F}(s,\delta) = \sum_{\substack{n=1\\(\delta n,d^l)=1}}^{\infty}\frac{r_1\left(\delta^k n\right)F(\delta n)}{n^s} =$$

$$= H_1(s)f\left(s,d^l\right)K(s,\delta)\left(\left(1-\frac{1}{2^s}\right)^{-1}\prod_{q\equiv 3(4)}\left(1-\frac{1}{q^{2s}}\right)^{-1}\zeta(s)L(s,\chi_4)\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

В (2.1) $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $L(s,\chi_4)$ – L -ряд Дирихле,

$$H_1(s)=\prod_{q\equiv 1(4)}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}(p(p-1)+1)}\right)\prod_{q\equiv 3(4)}\left(1+\frac{1}{q^{2s-1}(q(q-1)-1)}\right),$$

$$f\left(s,d^e\right)=\prod_{\substack{p|d^l\\ p\equiv 1(4)}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^{s-1}(p(p-1)+1)-1}\right)\prod_{\substack{q|d^l\\ q\equiv 3(4)}}\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1+\frac{1}{q^{2s-1}(q(q-1)-1)+1}\right)$$

Пусть $\delta=\prod_{\substack{p|\delta\\ p\equiv 1(4)}}p^{l p}\prod_{\substack{q|\delta\\ q\equiv 3(4)}}q^{l q}$, тогда при $k\equiv 0(2)$

$$K(s,\delta)=\prod_{\substack{p|\delta\\ p\nmid d^l\\ p\equiv 1(4)}}\frac{p^sF(p)}{p^s-1+F(p)}\prod_{\substack{q|\delta\\ q\nmid d^l\\ q\equiv 3(4)}}\frac{q^{2s}F(q)}{q^{2s}-1+F(q)}.$$

Если $k\equiv 1(2)$, $lq\equiv 0(2)$, то $K(s,\delta)$ такое же, как и при $k\equiv 0(2)$. Если $k\equiv 1(2)$, $lq\equiv 1(2)$, то в $K(s,\delta)$ произведение по $q\equiv 3(4)$ другое, а именно $\prod_{\substack{q|\delta\\ q\nmid d^l\\ q\equiv 3(4)}}\frac{q^sF(q)}{q^{2s}-1+F(q)}$.

Выбирая в (2.1) при $s\in\mathbb{R}$ действительную ветвь, применяя лемму о частных суммах ряда Дирихле и проведя контурное интегрирование, получаем

$$\sum_{\substack{n\le N\delta^{-k}\\ \left(\delta n,d^l\right)=1}}r_1\left(\delta^k n\right)F(\delta n)=H_1(1)f\left(1,d^l\right)K(1,\delta)\frac{N}{\delta^k(\ln N)^{1/2}}+O\left(\frac{N\ln\ln N}{\delta^k(\ln N)^{3/2}}\right)$$

Суммируя затем по δ и d в T_1+T_3, в итоге получаем

$$\begin{aligned}T_1+T_3&=\left(1-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^l}\right)\pi\prod_{p\equiv 1(4)}\left(1-\frac{(p-1)p^{l-1}+p^{k-1}((l+1)p-l)}{p^{k+l}}\right)\times\\&\times A(k,l,q)\frac{N}{\sqrt{\ln N}}+O\left(\frac{N\ln\ln N}{(\ln N)^{3/2}}\right),\end{aligned}\qquad(2.2)$$

а тогда S_1 равно правой части равенства (2.2).

3. Нахождение S_3. Учитывая условия $n\in M_k, n-1\in M_l$, сумма S_3, как и S_1, преобразуется к следующей

$$S_3=4\sum_{d\le L}\mu(d)\sum_{\substack{\delta\le M\\ (\delta,d)=1}}\mu(\delta)\sum_{j=0}^{3}\sum_{\substack{t\le N^{1/2}N_1^{-1}\\ t\equiv j(4)}}\{Z_1-Z_2\}+O\left(\frac{N\ln\ln N}{\ln^2 N}\right),$$

где $Z_1=\sum_{\substack{n\equiv 0(\delta^k),n\equiv 1(d^l)\\ n\equiv 1+t(4t)\\ tN^{1/2}N_1\le n\le N}}r_1(n)$, $Z_2=\sum_{\substack{n\equiv 0(\delta^k),n\equiv 1(d^l)\\ n\equiv 1-t(4t)\\ tN^{1/2}N_1\le n\le N}}r_1(n)$.

Если $2\,|\,d$, то системы сравнений $\begin{cases}n\equiv 1\left(d^l\right)\\ n\equiv 1+t(4t)\end{cases}$ $\begin{cases}n\equiv 1\left(d^l\right)\\ n\equiv 1-t(4t)\end{cases}$ разрешимы только в том случае, когда $t\equiv 0(4)$, поэтому разбиваем S_3 на две суммы:

$$S_3 = 4\sum_{d\le L, 2|d} + 4\sum_{d\le L, 2\nmid d} = S_{31} + S_{32}.$$

В сумме S_{31} Z_1 и Z_2 станут соответственно

$$Z_1' = \sum_{\substack{n_1 \equiv c_0 \left([d^l, 4t]\right) \\ tN^{1/2} N_1 \delta^{-k} \le n_1 \le N\delta^{-k}}} r_1\left(n_1\delta^k\right) \text{ и } Z_2' = \sum_{\substack{n_1 \equiv c_1 \left([d^l, 4t]\right) \\ tN^{1/2} N_1 \delta^{-k} \le n_1 \le N\delta^{-k}}} r_1\left(n_1\delta^k\right)$$

и при этом $c_0 \equiv c_1(4)$, а тогда эти суммы или обе равны 0 или имеют одинаковые главные члены, а поэтому, применяя усредненный закон распределения функции $r_1(n)$ в арифметических прогрессиях, получаем, как и в S_1, после суммирования по δ и d

$$S_{31} = O\left(\frac{N(\ln\ln N)^5}{\ln^2 N}\right).$$

Сумма S_{32} разбивается на четыре суммы: $S_{32} = \sum_{j=0}^{3} S_{32}^j$, где верхний индекс j соответствует $t \equiv j(4)$. Случаи $t \equiv 0(4)$ и $t \equiv 2(4)$ дадут такую же ситуацию с суммами, аналогичными Z_1' и Z_2', как и при нахождении S_{31}, а поэтому

$$S_{32}^0 + S_{32}^2 = O\left(\frac{N(\ln\ln N)^5}{\ln^2 N}\right)$$

Суммы S_{31}^1 и S_{32}^3 содержат разности, подобные Z_1' и Z_2', а именно S_{31}^1 содержит $P_1 - P_2$, а S_{32}^3 содержит $W_1 - W_2$, причем $P_1 = W_2$, а $P_2 = W_1$, поэтому и в этом случае

$$S_{32}^1 + S_{32}^3 = O\left(\frac{N(\ln\ln N)^5}{\ln^2 N}\right).$$

Значит, окончательно $S_3 = O\left(\frac{N(\ln\ln N)^5}{\ln^2 N}\right)$.

4. Оценка S_2. Оценку S_2 проводим по методу К. Хооли [3, с.97], но с учетом специфики функции $r_1(n)$, $n \in M_k$, $n-1 \in M_l$. Обозначим

$$N_0 = N^{1/(\ln\ln N)^2},\ P_3 = P_3(N) = \prod_{\substack{p\le N_0 \\ p\equiv 3(4)}} p,\ D_3 = \left\{n \in \mathbb{N} \middle| p \mid n \Rightarrow p \equiv 3(4)\right\},$$

$$B^* = B^*(N_0) = \left\{n \in \mathbb{N} \middle| n = m^2 l, (m,l) = 1, m \in D_3, m \le \ln^A N, (l, P_3) = 1\right\}.$$

Пусть $r_1^*(\cdot)$ – характеристическая функция множества B^*, тогда имеет место

Лемма. *Пусть* $\ln^{2A} N < y \le N$, *a и q – натуральные числа с* $(a,q) = 2^\gamma$, $\gamma = 0,1$ *и* $q < N^\theta (0 < \theta < 1)$.

Тогда $\sum_{\substack{\nu\le y\\ \nu\equiv a(q)}} r_1^*(\nu)=\frac{1}{q}\prod_{\substack{p|q\\ p\equiv 3(4)}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)B(N)y+O\left(\frac{N}{q\ln^{10}N}\right).$

При этом $B(N)$ *зависит только от* N *и* $B(N)=O\left(\frac{\ln\ln N}{\sqrt{\ln N}}\right)$.

Доказательство см. [2, лемма 3].

Рассматриваем функции $F(m)=\sum_{\substack{t|m\\ N^{1/2}N_1^{-1}<t<N^{1/2}N_1}}\chi_4(t)$, $D(m)=\sum_{\substack{l|m\\ N^{1/2}N_1^{-1}<l<N^{1/2}N_1}}1$. Тогда по неравенству Коши – Шварца

$$S_2=4\sum_{\substack{n\le N\\ n\in M_k,\,n-1\in M_l}} r_1(n)F(n-1)=O\left(\left(\sum_{\substack{n\le N,D(n-1)\ne 0\\ n\in M_k,\,n-1\in M_l}} r_1(n)\right)^{\frac12}\left(\sum_{\substack{n\le N\\ n\in M_k,\,n-1\in M_l}} r_1(n)F^2(n-1)\right)^{\frac12}\right)= \tag{4.1}$$

$$=O\left((\Sigma_D)^{1/2}(\Sigma_E)^{1/2}\right).$$

Как показано в работах [1], [2],

$$\Sigma_D=O\left(\sum_{n\le N,D(n-1)\ne 0} r_1(n)\right)=O\left(\frac{N}{(\ln N)^{1/2}}\ln^{-\gamma}N\ln^{\xi_0}N\right),$$

где $\xi_0>0$ сколь угодно мало, $\gamma=1-\gamma_0$, $\gamma_0=\frac{1+\ln\ln 2}{\ln 2}$, $\gamma\approx 0.0858$.

В обозначениях К. Хооли

$$\sum_{\substack{1<n\le N\\ n\in M_k,\,n-1\in M_l}} r_1^*(n)F(n-1)^2=\Sigma_E'=\sum_{t\le N^{1/l}}\mu(t)\sum_{\delta\le N^{1/k}}\mu(\delta)\sum_{d}\chi^2(d)\sum_{(L_1)}\chi(l_1)\sum_{(L_2),(H)}\chi(l_2)\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv a\left(\delta^k\left[t^l,d\,l_1\,l_2\right]\right)}} r_1^*(n)\,. \tag{4.2}$$

В (4.2) $\chi=\chi_4$.

Снова, как и при нахождении суммы S_1, ограничиваем суммирование по $t\le L$ и $\delta\le M$, при этом остальные слагаемые в (4.2) оцениваем тривиально. Тогда

$$\Sigma_E'=\sum_{t\le L}\mu(t)\sum_{\delta\le M}\mu(\delta)\left\{\sum_{d\le N^{1/8}}\chi^2(d)+\sum_{d\ge N^{1/8}}\chi^2(d)\right\}\sum_{(L_1)}\chi(l_1)\sum_{(L_2),(H)}\chi(l_2)\sum_{\substack{n\le N\\ n\equiv a\left(\delta^k\left[t^l,dl_1l_2\right]\right)}} r_1^*(n)+$$

$$+O\left(\frac{N(\ln\ln N)}{\ln^2 N}\right)=\Sigma_{E_1}'+\Sigma_{E_2}'+O\left(\frac{N(\ln\ln N)}{\ln^2 N}\right)$$

Находим Σ_{E_2}'. Применим лемму к внутренней сумме в Σ_{E_2}':

$$\Sigma_{E_2}'=NB(N)\sum_{t\le L}\frac{\mu(t)}{t^l}\sum_{us_1s_2|t^l}\chi^2(u)\chi(s_1)\chi(s_2)\sum_{\delta\le M,(\delta,t)=1}\frac{\mu(\delta)}{\delta^k}\sum_{d_1>\frac{N^{1/8}}{u}}\chi^2(d_1)\times$$

$$\times\sum_{\substack{(B_1)\\ (M_1)}}\frac{\chi(b_1)}{b_1}\prod_{\substack{p|t^l\delta^k d_1b_1\\ p\equiv 3(4)}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\times\sum_{\substack{(B_2)\\ (b_1,b_2)=1}}\frac{\chi(b_2)}{b_2}\prod_{\substack{p\nmid t^l\delta^k d_1b_1\\ p|b_2,\,p\equiv 3(4)}}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

При этом

$$\left(B_i\right) = \left(\frac{N^{1/2}N_1^{-1}}{ud_1 s_i} \le b_i \le \frac{N^{1/2}N_1}{ud_1 s_i}\right), i = 1,2$$

Воспользуемся тем, что

$$\sum_{\substack{l \ge y \\ (l,a)=1}} \frac{\chi(l)}{l} \prod_{\substack{p|l,\, p \neg| ab \\ p \equiv 3(4)}} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = \sum_{\substack{l \ge y \\ (l,a)=1}} \frac{\chi(l)}{l} \sum_{\substack{q|l,(q,ab)=1 \\ p|q \Rightarrow p \equiv 3(4)}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi(q)} =$$

$$= O\left(\frac{\tau(a)\ln y}{y}\right) + O\left(\sigma_{-1}(a)\right).$$

Тогда, следуя К. Хоoли [3, с. 101], получаем

$$\sum\nolimits_{E_2}' = O\left(NB(N)\left(\ln\ln N\right)^5 \sum_{t \le L} \frac{\tau_4(t^l)}{t^l} \sum_{\delta \le M,(\delta,t)=1} \frac{1}{\delta^k}\right) = O\left(\frac{N\left(\ln\ln N\right)^6}{\left(\ln N\right)^{1/2}}\right)$$

с постоянной в символе "O", зависящей от k и l.

Аналогично по методу К. Хооли оценивается $\sum\nolimits_{E_1}'$, которая дает $O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right)$.

Таким образом

$$\sum\nolimits_{E} = O\left(\frac{N\left(\ln\ln N\right)^6}{\left(\ln N\right)^{1/2}}\right) \text{ и } S_2 = O\left(\frac{N}{\left(\ln N\right)^{1/2+\lambda}}\right), \text{ где } \lambda = 0{,}042\,.$$

Подстановка значений S_1, S_2, S_3 в S завершает доказательство теоремы.

В заключение отметим, что полученный результат обобщает результаты работ [1] и [2] и улучшает остаточные члены в этих задачах.

1. **Ковальчик Ф. Б.** Некоторые аналоги проблемы Харди – Литтлвуда и плотностные методы // Зап. научн. семин. ЛОМИ.– 1980.– Т. 112, № 4.– С. 121–142.
2. **Gottschalk M., Indlekofer K.-H.** Über binäre additive Problem // I. reine und angew. Math. – 1978.– V. 297.– S. 65–79.
3. **Хоoли К.** Применение методов решета в теории чисел.– М.: Наука, 1987.– 136 с.

Получено 28.06.2002 г.