

УДК 535.8

А. Я. Бекшаев

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

ФАЗОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ЭФФЕКТИВНАЯ ДЛИНА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИФРАКЦИОННЫМИ РЕШЕТКАМИ

Рекомендовано до друку науковим семінаром
лабораторії “Сенсорної електроніки та високоточних технологій” ОНУ 10.01.2000.

Показано, що ефективна довжина оптичної системи з дифракційною ґраткою виявляється сталою по перетину системи при врахуванні залежності фази вихідного пучка від поперечних зсувів ґратки. Розглядається визначення ефективної довжини такої системи при змінній довжині хвилі пучка.

Показано, что эффективная длина оптической системы с дифракционной решеткой оказывается постоянной по сечению системы при учете зависимости фазы выходного пучка от поперечных сдвигов решетки. Рассматривается определение эффективной длины такой системы при переменной длине волны пучка.

The effective length of the optical system with diffraction grating is shown to be constant over the system cross-section when taking into account the output beam phase dependence on transverse shifts of the grating. Determining the effective length of such a system at variable wavelength of the beam is considered.

Введение. Согласно формальной теории преобразования светового пучка дифракционной решеткой [1,2], параллельный перенос решетки в ее плоскости приводит к изменению фазы дифрагированного пучка на величину

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi m}{d} X, \quad (1)$$

где m – порядок дифракции, d – период решетки, X – перпендикулярная штрихам составляющая ее перемещения (см. рис. 1); входящие в (1) параметры связаны с геометрическими характеристиками дифракции и волновым числом излучения k известным соотношением

$$kd(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = 2\pi m. \quad (2)$$

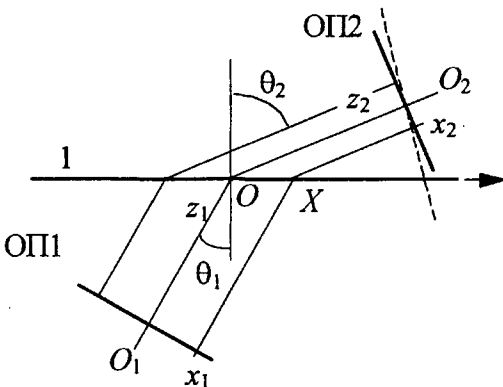


Рис. 1. Участок оптической системы с дифракционной решеткой: 1 – решетка, штрихи которой перпендикулярны плоскости рисунка, стрелка показывает направление ее переноса; ОП1 и ОП2 – входная и выходная опорные плоскости, z_1 и z_2 – номинальные оси входного и выходного пучков, θ_1 и θ_2 – углы падения и дифракции, O_1OO_2 – оптическая ось системы

Такой вывод на первый взгляд представляется парадоксальным, так как подобный перенос решетки, по-видимому, никак не меняет условий преобразования

пучка: начальное и конечное положения решетки выглядят физически неразличимыми.

Оптическим системам с решетками присуща еще одна парадоксальная черта. Например, изображенная на рис. 1 оптическая система не содержит каких-либо фокусирующих элементов и является афокальной (телескопической) (см. [3]); по своему действию она подобна астигматическому телескопу или преломляющей границе. Вдали от ограничивающих апертур такие системы обладают трансляционной поперечной симметрией; иначе говоря, их свойства не меняются при параллельном переносе оси. Однако система, представленная на рис. 1, отличается от «нормальных» афокальных систем тем, что «видимое» оптическое расстояние между опорными плоскостями при таком переносе оси меняется. Так, при переходе от номинальной оси O_1OO_2 к параллельной оси x_1Xx_2 (x_1 и x_2 суть смещения новой оси во входной и выходной опорных плоскостях соответственно) оно, как показывает геометрический подсчет, получает приращение

$$\Delta l(X) = X(\sin \theta_1 - \sin \theta_2). \quad (3)$$

Обычно отсюда делается вывод, что оптическая длина системы при наличии дифракционной решетки определена неоднозначно и является переменной в плоскости дисперсии решетки [1,4], но такое заключение едва ли можно признать удовлетворительным. Ведь если на вход системы поступает плоская волна, бегущая параллельно оптической оси, то точно такая же плоская волна наблюдается и на выходе, а непостоянство оптической длины должно было бы привести к «перекоосу» фронта и к изменению направления распространения выходного пучка.

Задачей данного сообщения является анализ физической природы упомянутых явлений; при этом будет показано, что хотя каждое из них в отдельности выглядит странным и противоречивым, оба они закономерно вытекают из основных физических законов. Более того, они как бы «предполагают» друг друга, и именно их совместное рассмотрение делает картину преобразования световых пучков в системах с дифракционными решетками однозначной и внутренне согласованной.

1. Геометрический подход. Физическую причину сдвига фазы (1) проще всего понять на примере отражательной решетки-эшелетта с прямоугольными штрихами,

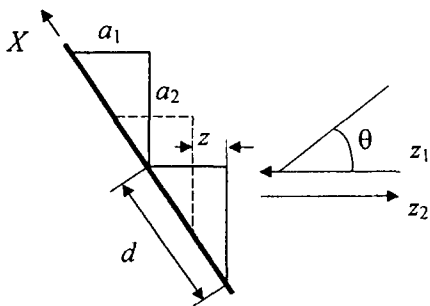


Рис. 2. Участок отражательной решетки

работающей в автоколлимационном режиме [4] (рис.2). Это частный случай системы, представленной на рис. 1, при котором оси z_1 и z_2 пространственно совпадают, но имеют противоположные направления (на рис. 2 они для удобства чуть раздвинуты).

Здесь угол падения входного пучка $\theta_1 = \theta$, а результат дифракции выглядит как отражение от зеркальных граней эшелетта в направлении, противоположном падающему пучку, так что $\theta_2 = \pi + \theta$. Пусть автоколлимационное отражение соответствует,

как обычно [4], минус первому порядку дифракции ($m = -1$); тогда справедливы соотношения

$$2a_1 = \lambda, \quad 2a_2 = \lambda \operatorname{ctg} \theta, \quad 2d \sin \theta = \lambda, \quad (4)$$

где $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны излучения.

Из рис. 2 видно, что при сдвиге решетки вдоль ее плоскости поперек штрихов на X отражающая грань штриха смещается на величину $z = X \sin \theta$, в результате чего разность фаз между выходным и входным пучками возрастает на $2kX \sin \theta$. Прини-

мая во внимание (4), нетрудно видеть, что это и есть та самая величина $\Delta\varphi$, которая требуется соотношением (1). Таким образом, конкретный геометрический расчет подтверждает результаты, полученные ранее на основе довольно отвлеченных представлений; очевидно, рассмотрение других моделей решеток приведет к тому же выводу.

Теперь представим себе, что эшелетт непрерывно движется в направлении оси X ; тогда z пропорционально возрастает, пока не достигнет величины a_1 . В этот момент каждый штрих займет положение своего «соседа сверху», т.е. новое положение решетки станет действительно неотличимым от исходного.

Соответствующее значение $\Delta\varphi$ равно $2ka_1 = 2\pi$, так что его вполне можно опустить и дальнейшее изменение разности фаз отсчитывать «с нуля». Однако есть веские основания рассматривать зависимость $\Delta\varphi$ от сдвига решетки как непрерывную.

2. Оптико-механический подход. В обоснование сказанного рассмотрим механический аспект обсуждаемого явления. Как показано в [5,6], перемещение элементов оптической системы, при котором над световым полем производится работа ΔE , сопровождается дополнительным изменением фазы выходного пучка

$$\Delta\varphi = -ck \frac{\Delta E}{\Phi}, \quad (5)$$

где c – скорость света в пустоте, Φ – поток энергии, переносимый пучком.

Применим этот результат к ситуации рис. 1. Для этого следует рассчитать силу «отдачи», которую испытывает решетка вследствие дифракции. Для простоты предположим, что существует только один порядок дифракции, изображенный на рисунке, и эффективность преобразования равна 1 (принципиальных запретов этому нет, и на практике можно достаточно близко подойти к таким условиям). В таком случае и входной, и выходной пучки переносят один и тот же поток энергии Φ ; вместе с этим переносятся и равные по величине потоки импульса электромагнитного поля. В каждом пучке линейная плотность электромагнитного импульса (т.е. величина импульса, которую несет «отрезок» пучка единичной длины вдоль его оси) численно равна $g = \Phi/c$, направления же задаются осями z_1 и z_2 соответственно. Составляющие плотностей импульса в плоскости решетки $g \sin \theta_1$ и $g \sin \theta_2$ равны между собой только для нулевого порядка дифракции; в любом другом порядке из-за взаимодействия с решеткой горизонтальный импульс пучка меняется, следовательно, решетка испытывает силу отдачи $(\Phi/c)(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$, вектор которой лежит в плоскости решетки и направлен в сторону пучка с меньшим значением горизонтального импульса (вертикальная отдача также возможна, но она не имеет прямого отношения к обсуждаемым вопросам).

Значит, при движении освещенной решетки поперек штрихов на расстояние X совершается работа $\Delta E = (\Phi/c)(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)X$. Подставляя этот результат в (5) и принимая во внимание (2), снова приходим к соотношению (1). Таким образом, механические аналогии также указывают на необходимость сдвига фазы выходного пучка при описанном перемещении решетки.

3. Оптическая длина как физическое свойство. Наконец, вернемся к вопросу о «неоднозначности» оптической длины систем с решеткой. Для этого рассмотрим внимательнее ситуацию, представленную на рис. 1, когда оптическая ось системы O_1O_2 подвергается параллельному переносу, после которого она занимает положение x_1Xx_2 . Легко заметить, что изменение видимых оптических расстояний между входной и выходной опорными плоскостями не является единственным результатом такого процесса.

В самом деле, этот перенос можно представить как последовательность двух стадий. Пусть сначала вместе с осью движется и решетка, оставаясь при этом в одной плоскости, так что точка O фактически перемещается в положение X . При этом относительное расположение оси и решетки не меняется, и в системе действительно не происходит ничего, кроме изменения оптических расстояний от ОП1 до решетки и от решетки до ОП2, приводящих в совокупности к возрастанию оптической длины системы на величину $\Delta l(X)$ (см. (3)). Далее решетку необходимо вернуть на прежнее место, что относительно новой оси можно рассматривать как сдвиг решетки на $-X$; в результате в системе возникнет дополнительный фазовый набег, равный, в соответствии с (1), $\Delta\varphi = kX(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$. Как нетрудно видеть, окончательное изменение разности фаз на пути между опорными плоскостями составит $k\Delta l(X) + \Delta\varphi = 0$; иными словами, при учете члена (1) параллельный перенос оси не приводит к изменению эффективной оптической длины системы.

Выше было уже показано, что существование «парадоксального» сдвига фазы (1), по существу, необходимо следует из довольно общих физических представлений; теперь мы видим, что и странная «неоднозначность длины» оптических систем с дифракционными решетками фактически исчезает, как только этот сдвиг принимается в расчет. Иными словами, если рассматривать оптическую длину не как геометрическое, а как физическое свойство системы, которое характеризует общее изменение фазы светового пучка при ее прохождении, то такая оптическая длина оказывается вполне однозначной.

Вывод, что система с решеткой обладает таким же свойством поперечной трансляционной инвариантности, как и обычные афокальные системы, полезен тем, что уменьшает число исключений из общей теории преобразований световых пучков и позволяет шире использовать наиболее эффективные ее методы, например, матричные [3]. Заметим, однако, что «упорядочивая» подсчет изменений фазы пучка, он не отрицает того факта, что реально разница путей, проходимых пучком вдоль различных параллельных осей существует. Это должно проявиться, к примеру, в том, что при выборе в качестве оси системы O_1O_2 дифракционные искажения пучка на пути между ОП1 и ОП2 должны описываться иначе, чем при выборе оси x_1Xx_2 (см. рис. 1). Неоднозначности такого рода устраняются при учете искажений формы пучка, вызванных решеткой [7]. Таким образом, эффективная оптическая длина систем с дифракционными решетками, вопреки принятым представлениям [4], не является принципиально неоднородной по поперечному сечению пучка, и в этом смысле такие системы не имеют существенных отличий от обычных оптических систем. Вместе с тем, «геометрическая» оптическая длина таких систем оказывается неопределенной: так, для системы, изображенной на рис. 1, в таком качестве может быть взято расстояние между ОП1 и ОП2, измеренное вдоль любой из параллельных осей. Это не удивительно, поскольку для того проективного преобразования, которое выполняет система, точное значение этой длины не играет роли.

4. Переменная длина волны. Все сказанное справедливо, однако, только для фиксированной длины волны излучения; в то же время оптическая длина как параметр системы во многих случаях характеризует ее поведение при изменении длины волны. Чтобы исследовать и такие ситуации, рассмотрим случай, когда волновое число излучения отличается от номинального значения k , определяющего, согласно (2), геометрию системы, изображенной на рис. 1:

$$k \rightarrow k + \Delta k, \quad \Delta k/k \ll 1. \quad (6)$$

Пусть на вход поступает плоская волна, так что плоскость ОП1 представляет собой эквивалентную поверхность; в номинальном режиме плоскость ОП2 также эквивалентна. Если волновое число пучка изменяется согласно (6), фронт выходящего пучка (пунктирная линия на рис. 1) остается плоским, но уже не совпадает с выходной опор-

ной плоскостью, а образует с нею угол $\beta = \frac{\Delta k \sin \theta_1 - \sin \theta_2}{k \cos \theta_2}$ [1]. Значит, в линейном по Δk приближении распределение фазы пучка в выходной опорной плоскости имеет вид

$$\varphi(x_2) = \varphi(0) + k\beta x_2 = \varphi(0) + \Delta k \frac{x_2}{\cos \theta_2} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2),$$

где $\varphi(0) = (k + \Delta k)L$ – фаза на номинальной оси системы, т.е. в точке O_2 , L – длина системы, измеренная вдоль номинальной оси. Поскольку $X = x_2 / \cos \theta_2$, полученный результат можно также записать в виде

$$\varphi(X) = kL + \Delta k [L + \Delta l(X)] \quad (7)$$

(величина $\Delta l(X)$ определяется равенством (3)).

Отсюда, в частности, следует, что при параллельном переносе оси системы ($X \neq 0$) осевое значение разности фаз между входной и выходной опорными плоскостями меняется, т.е. при изменении длины волны неоднозначность оптической длины системы и в самом деле имеет место. В таком случае вопрос, какова эффективная длина системы, может решаться по-разному в зависимости от конкретных условий задачи; при этом одновременно будет устранена и неопределенность этой длины, о которой говорилось в конце предыдущего раздела.

Рассмотрим, например, ситуацию, когда система, изображенная на рис. 1, есть «развертка» некоторого открытого резонатора, и определим его межмодовый интервал [3], т.е. разность соседних собственных значений волнового числа. Как обычно, она находится из условия

$$\varphi(X) - kL = 2\pi. \quad (8)$$

В «нормальных» системах, для которых $\Delta l(X) = 0$, это условие может быть выполнено для всех точек поперечного сечения пучка; в системах с решеткой из (7) и (8) формально следует

$$\Delta k(X) = \frac{2\pi}{L + \Delta l(X)}. \quad (9)$$

Однако собственные значения не могут зависеть от координат, и чтобы придать последнему равенству физический смысл, следует охарактеризовать полученный результат каким-либо постоянным числом, например, усреднить (9) по поперечному сечению пучка. Строго говоря, для этого необходимо знать профиль интенсивности пучка, но предполагая его однородным и требуя $|\varphi(X) - \varphi(0)| / \varphi(0) \ll 1$ (это естественное условие существования нескольких продольных мод дисперсионного резонатора), можно в качестве межмодового интервала взять среднее арифметическое значение (9) по апертуре пучка, т.е.

$$\Delta k = \frac{1}{2} [\Delta k(X_{\min}) + \Delta k(X_{\max})],$$

где X_{\min} и X_{\max} – координаты границ сечения пучка плоскостью решетки. Тогда, согласно (9), эффективная длина, определяющая межмодовый интервал рассматриваемого резонатора, может быть найдена из соотношения

$$L = \frac{2\pi}{\Delta k} \approx L + \frac{1}{2} [\Delta l(X_{\min}) + \Delta l(X_{\max})],$$

т.е. в данном случае эффективная длина оптической системы фактически равна ее средней длине. Конечно, сам по себе этот результат тривиален, но приведшие к нему рассуждения демонстрируют существо подхода к определению оптической длины и в более сложных случаях.

Заключение. В работе рассмотрены два свойства оптических систем с дифракционными решетками, которые, как принято считать, определяют их особое положение по сравнению с «обычными» оптическими системами [1–4]: (i) изменение фазы выходного пучка при параллельном сдвиге решетки в ее плоскости и (ii) «неоднородность» оптической длины системы по ее поперечному сечению. Детально проанализирована физическая природа свойства (i) и на конкретной модели продемонстрировано, что оно обусловлено присущей решетке неоднородной структурой. Кроме того, установлена связь этого явления с работой сил светового давления при параллельном сдвиге решетки и показано, что соответствующее изменение фазы следует из общих энергетических соображений.

В ходе анализа найдено, что параллельный перенос оптической оси системы с решеткой не может рассматриваться в отрыве от конкретного способа его осуществления, и если при этом оптическая ось пересекает штрихи решетки, то изменение фазы (i) также должно быть принято во внимание. В результате для всех пар сопряженных точек входной и выходной плоскостей оптическое расстояние между ними оказывается одинаковым, и, стало быть, «неоднородность» оптической длины системы (ii) является кажущейся.

Таким образом, «парадоксальное» свойство (i) находит простое и наглядное объяснение, а свойства (ii), учет которого представляет наибольшие потенциальные трудности при расчете оптических систем с решетками, вообще не существует. Это говорит о применимости к таким системам обычных методов расчета, и если до сих пор последние использовались с оговорками и как приближения [4], то результаты данной работы позволяют их полностью обосновать.

Вместе с тем подчеркнем, что представленные в работе факты служат иллюстрацией «двойственной» природы решетки как дисперсионного оптического элемента. Ее всегда можно описать как некий «обычный» оптический элемент, но при этом параметры последнего, как правило, обладают явной и сильной зависимостью от длины волны (дисперсией). Пока длина волны остается постоянной или ее изменениями можно пренебречь, выводы предыдущего абзаца справедливы, но при изменении длины волны специфика свойств решеток становится решающей.

Конкретные проявления этой специфики могут быть весьма многообразны. Насколько нам известно, ранее они рассматривались только на примере резонатора Фабри – Перо, одно из зеркал которого заменено автоколлимационно отражающей дифракционной решеткой [8]; там же приведены и результаты экспериментов, которые явным образом подтверждают итоги наших рассуждений.

1. **Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я.** Учет локальных элементов в матричном методе анализа разъюстированных астигматических систем // *Опт. и спектр.* – 1989. – Т. 66, № 3. – С. 702-708.
2. **Бекшаев А.Я.** Матричное описание двумерных дифракционных решеток // *Опт. и спектр.* – 1989. – Т. 67, № 2. – С. 428-432.
3. **Ананьев Ю.А.** Оптические резонаторы и лазерные пучки. - М.: Наука, 1990. – 264 с.
4. **Анохов С. П., Марусий Т. Я., Соскин М. С.** Перестраиваемые лазеры. - М.: Радио и связь, 1982. – 360 с.
5. **Bekshaev A.Ya.** Mechanical properties of the light wave with phase singularity // *Proc. SPIE.* – 1999 – V. 3904. – P. 131-139.
6. **Бекшаев А.Я.** Проявление механических свойств световых волн в оптических системах: «вихревые» пучки // *Опт. и спектр.* – 2000. – Т. 88, № 6. – С. 993-999.
7. **Ананьев Ю.А., Бекшаев А.Я.** Изменение структуры световых пучков при их прохождении через дисперсионные элементы. II. Частные случаи // *Опт. и спектр.* – 1996. – Т. 80, № 3. – С. 497-504.
8. **Lotem H.** Littrow-mounted diffraction grating cavity // *Appl. Opt.* - 1994. - V. 33, N 6. - P. 930-934.