Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «**Асимптотична поведінка розв'язків одного класу лінійних диференціальних рівнянь третього порядку**»

"Asymptotic behavior of solutions of one class of linear differential equations of the third order"

Виконав: студент денної форми навчання

спеціальності 111 Математика

Ховріна Аліса Олександрівна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент

Шарай Наталія Вікторівна

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, доцент

Білозерова Марія Олександрівна

Рекомендовано до захисту:	Захищено на засіданні ЕК № _________
Протокол засідання кафедри	Протокол № ___ від «_____»________ р.
№ ___ від «____»_____ р.	Оцінка ________ / ________ / _______
Завідувач кафедри	Голова ЕК
__________________________	___________________________________

Одеса – 2021 р.

ЗМІСТ

Вступ …………………. ……………………………………………….. …3

ГЛАВА 1. ЕЛЕМЕНТИ АСИМПТОТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

§1.1. Системи лінійних диференціальних рівнянь, асимптотично близькі до діагональних … … … … … … … … … … … … … … … ………. … … … …5

§1.2. Теореми Коддінгтона-Левінсона і Уінтнера-Хартмана ………………..11

§1.3. Приведення систем лінійних диференціальних рівнянь з майже постійними коефіцієнтами до L-діагональному виду … ………………... … 13

ГЛАВА 2. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАКССУ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕТЬОГО ПОРЯДКУ

§2.1. Постановка задачи… ……………………………………………………19

§2.2. Выбор направления исследования и его первый этап..………………..20

§2.3. Свойства матриц $\mathbf{\Lambda(t)}$ и $\mathbf{T^{-1}(t)T'(t)}$ при выполнении основных условий ……………………………………………………………………27

§2.4. Случай уравнения типа Эйлера………………………………………41

§2.5. Основной результат……………………………………………………48

ЗАКЛЮЧЕННЯ... … … … … … … … … . … … … ... ... .57

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ... … … … 58

Вступ

У XIX столітті були розпочаті дослідження, пов'язані з асимптотичною поведінкою розв'зків звичайних диференціальних рівнянь і систем. Відзначимо роботи таких математиків, як Анрі Пуанкаре, Джордж Девід Біркхоф, Адольф Кнезер. Вони досліджували питання про асимптотичну поведінку розв'язків диференціальних рівнянь за допомогою розбіжних рядів.

Втім протягом 40-50 років асимптотичні розв'язки диференціальних рівнянь були отримані за допомогою інших методів. Ці результати мали ряд переваг, у тому числі, дозволяли працювати з більш широким класом диференціальних рівнянь і систем.

Згадаємо результати, які належать Шпету, Левінсону, Коддінгтону, Хартману, Уінтнеру для асимптотично діагональних систем з простими кореннями і Девінатцу для асимптотично діагональних систем з кратними кореннями. Одночасно почали розвиватися методи перетворення лінійних систем до L-діагонального вигляду.

Нарешті, в 1974 році Харіс і Лутц розробили техніки приведення систем до L-діагонального вигляду. Починаючи з середини 1960-х років і продовжуючи до сих пір, проводиться різноманітні дослідження над удосконаленнями і додатками основоположною теореми Мателля - Левінсона.

Дана кваліфікаційна робота бакалавра присвячена встановленню асимптотики розв'зків одного класу лінійних диференціальних рівнянь третього порядку типу Ейлера. Вона складається з вступу і двох глав, розбитих на параграфи.

У першому розділі розглядаються елемнти асимптотичної теорії для лінійних систем диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = \lambda_i(x) y_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (')$$

де $\lambda_i: [a, +\infty[\to C^{n\times n}$ (i = 1, …, n) - неперервна функція, називаєтся діагональною.

У другому розділі розглядається диференціальне рівняння третього порядку:

$$(q(t)(q(t)y')')' + ((q_1(t)y)' + q_1(t)y')/2 + (p_0(t)y')' + p_1(t)y = 0,$$

де p_1, p_0, q, q_1: [a, +∞[→ ℝ \{0} – двічі неперервно диференційна функція

При цьому вважаємо, що воно є "рівнянням типу Єйлера", тобто коли виконуются умови:

$$\frac{(q_1(t))'}{q_1(t)} = k_1 \frac{p_0(t)}{q^2(t)} [1 + o(1)] \qquad при\ t \to \infty,$$

$$\frac{(q^2(t) p_0^{-2}(t))'}{q^2(t) p_0^{-2}(t)} = k_2 \frac{p_0(t)}{q^2(t)} [1 + o(1)] \quad при\ t \to \infty,$$

де $k_1,\ k_2$ - відмінні від нуля постійні.

Для такого класу рівнянь отримані умови, при виконанні яких, воно за допомогою декількох перетворень зводиться до системи диференціальних рівнянь, що допускає застосування результатів з першого розділу. В результаті використання цих результатів отримані асимптотичні подання для фундаментальної системи рішень досліджуваного рівняння третього порядку.

Розділ 1

Елементи асимптотичної теорії для лінійних систем диференційних рівнянь

§ 1.1. Системи лінійних диференціальних рівнянь, асимптотично близькі до діагональних

Система лінійних диференціальних рівняннь

$$\frac{dy_i}{dx} = \lambda_i(x)y_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad (')$$

де $\lambda_i: [a, +\infty[\to C^{n\times n}$ (i = 1, …, n) - неперервна функція, називаєтся діагональною.

Використовуючи вектор–стовбець $Y = (y_i)_{i=1}^{n}$ та матрицю

$$\Lambda(x) = diag[\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)], \qquad ('')$$

Запишемо її у векторно – матричній формі

$$\frac{dY}{dx} = \Lambda(x)Y \qquad (1.1.1_0)$$

Ця система рівнянь має фундаментальну систему розв'язків:

$$Y_j = (y_{ij})_{i=1}^{n} \ (j = 1, \ldots, n),$$

$$Y_j(x) = e_j \exp \int_{x_0}^{x} \lambda_j(s)ds, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (1.1.2_0)$$

де e_j – одиничний n -мірний вектор, j-я компонента, якого дорівнює одиниці, а інші нулю

Виникає запитання: при яких умовах на неперервну матрицю - функцію R=$(r_{ij})_{i,j=1}^{n}$: $[a,+\infty[\ \to\ C^{n\times n}$ система лінійних диференційних рівняннь

$$\frac{dY}{dx} = [\Lambda(x) + R(x)]Y, \tag{1.1.1}$$

або рівносильна їй система, у координатній формі

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = \lambda_i(x)y_i + \sum_{k=1}^{n} r_{ik}(x)y_k, \\ \qquad\qquad i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{1.1.1'}$$

має розв'язок, асимптотично близький при $x \to +\infty$, до розв’язків системи $(1.1.1_0)$.

У 1914 році у роботі О. Перрона була встановлена

Теорема 1.1. *Якщо виконуються умови*

$$\lambda_i(x) \equiv \lambda_{0i} = const(i = 1, \dots, n), \quad \lambda_{0i} \neq \lambda_{0j} \ при \quad i \neq j$$

та

$$\lim_{x\to+\infty} \|R(x)\| = 0,$$

то система диференціальних рівнянь (1.1.1) має фундаментальну систему розв’язків $Y_j(x) = (y_{ij})_{i=1}^{n}$ ($j=1, \dots, n$), кожний з яких задовольняє при $x \geq x_1 \geq \alpha$ нерівностями

$$c_2 \exp\left[Re(\lambda_{0j})x - d_2\int_{x_0}^{x}\|R(s)\|\,ds\right] \leq \|Y_j(x)\| \leq$$

$$\leq c_1 \exp\left[Re\,(\lambda_{0j})x + d_1\int_{x_0}^{x}\|R(s)\|\,ds\right],$$

де c_1, c_2, d_1, d_2 и x_1 – деякі додатні сталі.

Зокрема,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln\|Y_j\,(x)\|}{x} = Re\ (\lambda_{0j}) \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1.2}$$

Зазначені в цій теоремі граничні умови для Y_j ($j=\overline{1,n}$) дають досить грубу інформацію про поведінку розв'язків системи (1.1.1), оскільки цим співвідношенням поряд з ($1.1.2_0$), задовольнять вектор-функції

$$Y_j\,(x) = x^{\alpha_j} e^{\lambda_{0j}x}\ [e_j + o(1)], \quad Y_j\,(x) = x^{\alpha_j} ln^{\beta_j}\ x\ e^{\lambda_{0j}x}\ [e_j + o(1)],$$

де $\alpha_j, \beta_j \in R$ і багато інших.

Виділимо тепер з (1.1.1) клас систем, які отримали (див. монографію І.М. Рапопорта) назву L-діагональних і допускають встановлення точних асимптотичних формул для всіх їх розв'язків.

Означення 1.1. *Система лінійних диференціальних рівнянь вигляду* (1.1.1) *називається L-діагональною, якщо матриця R задовольняє умові*

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \|R(x)\|\, dx < +\infty. \tag{1.1.2}$$

Щоб з'ясувати чи є система рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y,$$

де $P: [a, +\infty[\to C^{n\times n}$- неперервна матриця, L- діагоняльною, необхідно з матриці P виділити в окрему матрицю R = $(r_{ik})_{i,k=1}^{n}$ ті елементи, для яких виконуються умови

$$\int_{\alpha}^{+\infty} |r_{ij}(x)| \ dx < \ +\infty \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \qquad (1.1.2')$$

Якщо при цьому залишаться лише функції, які стоять на головній діагоналі, то система буде L- діагональною.

Вперше результат про асимптотику розв'язків L–діагональних систем диференціальних рівнянь було отримано в роботі М. Мателля, опублікованій в 1924 році.

Для встановлення цього фундаментального результату буде потрібно одне допоміжне твердження

Лемма 1.2. *Нехай функції h:* $[a, +\infty[\to C$, *p:* $[a, +\infty[\to R$ *- неперервні,*

$$\int_{x}^{+\infty} |\ h(x)|\, dx < \ +\infty, \qquad (1.1.3)$$

А функція p така, что або

$$inf\left\{\int_{u}^{v} p(s)ds : v \ \geq u \ \geq a\right\} > -\infty, \qquad (1.1.4)$$

або

$$sup\left\{\int_{u}^{v} p(s)ds : v \ \geq u \ \geq a\right\} < +\infty, \qquad (1.1.5_1)$$

та

$$\lim_{x\uparrow w} \int_{a}^{x} p(s)ds = -\infty, \qquad (1.1.5_2)$$

Тоді при виконанні умови (1.1.4)

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} h(\tau)\exp(\int_\tau^x p(s)ds)\,d\tau = 0, \tag{1.1.6}$$

А при виконанні умов $(1.1.5_1)$ *та* $(1.1.5_2)$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x h(\tau)exp(\int_\tau^x p(s)ds)\,d\tau = 0. \tag{1.1.7}$$

Означення 1.2. *Будемо говорити, що система n локально інтегрованих функцій* μ_k: $[\,a, +\infty[\, \to R$ $(k = 1, \dots, n)$ *задовольняє умові Мателля-Левінсона, якщо для будь-яких i, j* ∈ $\{1, \dots, n\}$ *або*

$$inf\left\{\int_u^v [\mu_i(s) - \mu_j(s)]ds : v \ge u \ge a\right\} > -\infty,$$

або

$$sup\left\{\int_u^v [\mu_i(s) - \mu_j(s)]ds : v \ge u \ge a\right\} < +\infty$$

та

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x [\mu_i(s) - \mu_j(s)]ds = -\infty.$$

Зауваження 1.2. *Умова Мателля-Левінсона в літературі іноді називають умовою дихотомії, оскільки при фіксованому j* ∈ $\{1, \dots, n\}$ *воно розбиває безліч всіх функцій* μ_i $(i = \overline{1, n})$ *на два непересічних класа, кожний з яких складається з функцій, що задовольняють однієї з умов даного означення.* Тепер сформулюємо і доведемо основний результат теорії *L*- діагональних систем лінійних диференціальних рівнянь.

Теорема 1.2. (М. Мателль, Н. Левінсон). *Якщо система диференціальних рівнянь* (1.1.1) *є L–діагональною та функції* $\mu_k(x) = Re\,\lambda_k$

(k = 1, …, n) *задовольняють на проміжку* $[a,+\infty[$ *умові Мателл-Левінсона, то система* (1.1.1) *має фундаментальну систему розв'язків* $Y_j = (y_{ij})_{i=1}^{n}$ (j=1,…,n), *які допускають при* $x \to +\infty$ *асимптотичні подання*

$$Y_j(x) = exp\left(\int_{x_0}^{x} \lambda_j(s)\,ds\right)\left[e_j + o(1)\right] \ (j = 1, \ldots, n) \qquad (1.1.8)$$

де e_j *– одиничний* n *-мірний вектор,* j *-я компонента якого дорівнює одиниці, а інші – нулю.*

Теорема 1.3. (Ф.Хартман, А. Уінтнер). *Якщо існує число* $\mu > 0$ *таке, що для будь-яких* $i \neq j$ ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$) *в деякому околі* $+\infty$ *виконується нерівність*

$$\left|Re\,\lambda_i(x) - Re\,\lambda_j(x)\right| \geq \mu > 0, \qquad (1.1.18)$$

А матриця R *задовольняє умові*

$$\int_{x_0}^{+\infty} \|R(x)\|^2\,dx < +\infty, \qquad (1.1.19)$$

Тоді система диференційних рівняннь (1.1.1) *має фундаментальну систему рівнянь* $Y_j = (y_{ij})_{i=1}^{n}$ (j = 1, …, n), *які допускають при* $x \to +\infty$ *асимптотичні уявлення:*

$$Y_j(x) = \left[e_j + o(1)\right] exp\left(\int_{x_0}^{x} [\lambda_j(s) + r_{jj}(s)]\,ds\right) \quad j = 1, \ldots, n \qquad (1.1.20)$$

де e_j *– одиничний* n*- мірний вектор,* j*- я компонента якого дорівнює одиниці, а інші - нулю*

§1.2. Теореми Коддінгтона-Левінсона і Уінтнера-Хартмана

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = [A + V(t) + R(t)]\, x \qquad (1.2.1)$$

Теорема 2.1.1. (Коддінгтона-Левінсона) *Нехай A — стала матриця з різними характеристичними коренями* $\mu_j, j = 1,\ldots,n.$ *Нехай матриця V диференційована і задовольняє умові*

$$\int_0^\infty |V(t)|dt < \infty \qquad (1.2.2)$$

та нехай V(t) $\to$ *0 при t* $\to$ ∞. *Нехай матриця R інтегруєма та*

$$\int_0^\infty |R(t)|dt < \infty \qquad (1.2.3)$$

Позначимо корені рівняння det *(A + V(t) —* λ *E) = 0 через* $\lambda_j(t), j = 1,\ldots,n.$

Можливо, якщо це необхідньо, переставити μ_j *так, щоб* $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_j(t) = \mu_j$.

Для данного k :

$D_{kj}(t) = \mathrm{Re}\,(\lambda_k(t) - \lambda_j(t))$.

Припустимо, що всі j, $1 \le j \le n$, *потрапляють в один з двох класів* I_1 *та* I_2, *де*

$j \in I_1$, якщо $\int_0^t D_{kj}(\tau)d\tau \to \infty$ при $t \to \infty$

та

$$\int_{t_1}^{t_2} D_{kj}(\tau)d\tau > -K \qquad (t_2 \ge t_1 \ge 0), \qquad (1.2.4)$$

$$j \in I_2, \text{ якщо } \int_{t_1}^{t_2} D_{kj}(\tau)d\tau < K \quad (t_2 \geq t_1 \geq 0);$$

(1.2.5)

де k фіксовано та К — стала. Нехай p_k *— характеристичний вектор А, який відповідає* μ_k*, такий, що*

$$A p_k = \mu_k' \; p_k . \qquad (1.2.6)$$

Тоді існують розв'язки φ_k *системи (2.1.1) та число* t_0*,* $0 \leq t_0 < \infty$*, такі, що*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_k(t) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau\right] = p_k. \qquad (1.2.7)$$

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$Y'(x) = \{\Lambda(x) + R(x)\}\, Y(x); \qquad (1.2.8)$$

Теорема 1.1 (Хартмана - Уінтнера) *Нехай* $\Lambda(x)$ *– діагональна матриця розміру* $n \times n$,

$\Lambda(x) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$,

І нехай існує константа $\delta > 0$ *така, що*:

$$|\,\mathrm{Re}\,\{\lambda_i(x) - \lambda_j(x)\}\,| \geq \delta \qquad (1.2.9)$$

на деякому проміжку $[a, \infty)$ *для будь-якої пари чисел* $i, j \in \overline{1,n}$, $i \neq j$. *Нехай матриця* $n \times n$ $R(x)$ *задовольняє умові*:

$$\int_a^{\infty} |\,R(x)\,|^p\, dx < \infty \qquad (1.2.10)$$

Для деякого $1 < p \leq 2$. *Тоді, при* $x \to \infty$*, рівняння має асимптотичні розв'язки* $Y_k(x)$ *вигляду*

$$Y_k(x) = \{e_k + o(1)\} \exp\left(\int_a^x \{\lambda_k(t) + r_{kk}(t)\}\, dt\right). \quad (1 \leq k \leq n)$$

(1.2.11)

§1.3. Приведення систем лінійних диференціальних рівнянь з майже постійними коефіцієнтами до *L*-діагональному вигляду

Лемма 1.3. *Якщо функція f:* $[a, +\infty[\to C$*- неперерно диференційована і задовольняє умові*

$$\int_{a}^{+\infty} |f'(t)|dt < +\infty,$$

тоді

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = const.$$

Доведення. В силу умов леми для будь-яких$t_{1,} t_2 \ \geq T \ \geq a$

$$|f(t_2) - f(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f'(t)dt \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|dt \ \leq \int_{T}^{+\infty} |f'(t)|dt$$

і інтеграл, що стоїть праворуч прагне до нуля при $T \to +\infty$. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число таке, що при будь-яких $t_{1,} t_2 \ \geq T$ виконується нерівність

$$|\, f(t_2) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

Таким чином, для функції f в силу критерію Коші існує кінцева межа при $t \to +\infty$. ■

Розглянемо тепер систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = [A(t) + B(t)]Y, \qquad (1.3.1)$$

В якій A: $[a, +\infty[\to C^{n\times n}$ - неперервно диференційна матриця, яка задовольняє умові

$$\int_a^{+\infty} ||A'(t)||dt < +\infty, \qquad (1.3.2)$$

а B: $[a, +\infty[\to C^{n\times n}$- неперервна матриця така, що

$$\int_a^{+\infty} ||B(t)||dt < +\infty, \qquad (1.3.3)$$

В силу умови (1.3.2) існує на підставі леми кінцева границя

$$A(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} A(t). \qquad (1.3.4)$$

Припустимо також, що характеристичне рівняння сталої матриці$A(+\infty)$ має прості корені λ_{0j} $j = \overline{1,n}$.

Тоді відповідно до леми характеристичне рівняння матриці A має на деякому проміжку $[t_0, +\infty[\subset [a, +\infty[$ неперервно диференційні корені λ_j , $j = \overline{1,n}$, які задовольняють умовам

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda_j(t) = \lambda_{0j}, \quad \lambda_j'(t) = O\big(\big||A'(t)|\big|\big) \text{ при } t \to +\infty \ j = \overline{1,n}. \qquad (1.5.5)$$

Крім того, згідно цієї леми існує безперервно диференційована і обмежена разом зі зворотною, матриця T: $[t^0, +\infty[\to C^{n\times n}$ $([t^0, +\infty[\subset$

$[t_0, +\infty[\,)$, стовпцями якої є власні вектори T_j $j=\overline{1,n}$ матриці A, які відповідають її власним значенням λ_j $j=\overline{1,n}$, і задовольняють умовам

$$T^{-1}(t)\,A(t)T(t) = \Lambda(t), ||T'(t)|| = O\big(\big|\big|A'(t)\big|\big|\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad (1.3.6)$$

де

$$\Lambda(t) = diag\,[\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]. \quad (1.3.7)$$

Якщо вибрати таким чином матрицю T, то можливо застосувати до системи (1.3.1) перетворення

$$Y = T(t)Z. \quad (1.3.8)$$

В результаті цього перетворення отримаємо

$$T(t)Z' + T'(t)Z = [A(t) + B(t)]T(t)Z,$$

або

$$T(t)Z' = [\big(A(t) + B(t)\big)T(t) - T'(t)]\,Z,$$

звідки після множення зліва на матрицю T^{-1} приходимо до системи рівнянь

$$Z' = [T^{-1}(t)A(t)\,T(t) + T^{-1}(t)B(t)T(t) - T^{-1}(t)T'(t)]Z.$$

В силу першого з умов (1.3.6) вона має вигляд

$$\frac{dZ}{dt} = [\Lambda(t) + R(t)]Z, \tag{1.3.9}$$

де Λ- діагональна матриця (1.3.7) та

$$R(t) = T^{-1}(t)B(t)T(t) - T^{-1}(t)T'(t).$$

Оскільки матриця T- неперервно диференційна на проміжку $[t^0, +\infty[$, обмежена разом зі зворотним і задовольняє другій з умов (1.3.6), то існують постійні $M_i > 0$ $(i = 1,2,3)$ такі, що

$||T(t)|| \leq M_1, ||T^{-1}(t)|| \leq M_2, \quad ||T'(t)|| \leq M_3||A'(t)||$ при $t \geq t^0$.

В силу цих оцінок

$$||R(t)|| = ||T^{-1}(t)B(t)T(t) - T^{-1}(t)T'(t)|| \leq$$

$$\leq ||T^{-1}(t)B(t)T(t)|| + ||T^{-1}(t)T'(t)|| \leq$$

$$\leq \|T^{-1}(t)\|\|B(t)\|\|T(t)\| + \|T^{-1}(t)\|\|T'(t)\| \leq$$

$$\leq M_1M_2\|B(t)\| + M_2M_3\|A'(t)\| \quad \text{при} \quad t \geq t^0.$$

Звідси з урахуванням умов (1.3.2), (1.3.3) випливає, що

$$\int_{t^0}^{+\infty} ||R(t)||dt < +\infty.$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь (1.3.9) є L-діагональною.

Припустимо, нарешті, що система n функцій $\mu_j(t) = Re\,\lambda_j(t)$ $j = \overline{1,n}$ задовольняє умові Мателля-Левінсона. Тоді згідно з теоремою система диференціальних рівнянь (1.3.9) має фундаментальну систему розв'язків виду:

$$Z_j(t) = \left[e_j + o(1)\right] exp\left(\int\limits_{t^0}^{t} \lambda_j(\tau)\ d\tau\right), \quad j = \overline{1,n} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Їм в силу заміни (1.3.8) відповідає фундаментальна система розв'зків системи лінійних диференціальних рівнянь (1.3.1), яка містить при $t \to +\infty$ асимптотичні подання

$$Y_j(t) = \left[T_j(+\infty) + o(1)\right] exp\left(\int\limits_{t^0}^{t} \lambda_j(\tau)\ d\tau\right), \quad j = \overline{1,n}, \qquad (1.5.10)$$

де

$$T_j(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} T_j(t), \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким чином, має місце наступне твердження.

Теорема 1.3. *Нехай матриця- функція* B: $[a,+\infty[\to C^{n\times n}$ *- неперервна і задовольняє умові* (1.3.3), *а матриця - функція* A: $[a,+\infty[\to C^{n\times n}$*- неперервно - диференційна та задовольняє умові* (1.3.2), *причому гранична матриця* (1.3.4) *має прості характеристичні корені* λ_{0j} $j = \overline{1,n}$. *Нехай, крім того, система функцій* $\mu_j(t) = Re\,\lambda_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, *де кожна* $\lambda_j(t)$ *є корнем характеристичного рівняння матриці* A, *прагнуть до* λ_{0j} *при* $t \to +\infty$, *задовольняє умові Мателля-Левінсона. Тоді система диференціальних рівнянь* (1.3.1) *має фундаментальну систему розв'язків* Y_j, $j = \overline{1,n}$, *допускає при* $t \to$

$+\infty$ *асимптотичні подання* (1.3.10), *де кожен постійний вектор* $T_j(+\infty)$ *є власним вектором матриці* $A(+\infty)$, *відповідним її власному значенню* λ_{0j}.

Розділ 2

Асимптотична поведінка розв'язків одного класу лінійних диференційних рівнянь третього порядку

§2.1. Постановка задачі

Розглядається диференціальне рівняння

$$(q(t)(q(t)y')')' + ((q_1(t)y)' + q_1(t)y')/2 + (p_0(t)y')' + p_1(t)y = 0, \quad (2.1.1)$$

де p_1, p_0, q, q_1 : [a, +∞[→ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ - двічі безперервно диференціюються функції.

При цьому очікується, що воно вважається рівнянням типу Ейлера, коли виконуються умови

$$\frac{(q_1(t))'}{q_1(t)} = k_1 \frac{p_0(t)}{q^2(t)} [1 + o(1)] \qquad при\ t \to \infty,$$

$$(2.1.2)$$

$$\frac{(q^2(t)p_0^{-2}(t))'}{q^2(t)p_0^{-2}(t)} = k_2 \frac{p_0(t)}{q^2(t)} [1 + o(1)] \quad при\ t \to \infty,$$

де $k_{1,}$ k_2 - відмінні від нуля постійні.

Коли

$$q^2(t) = c_1 t^{\alpha_1},$$

$$q_1(t) = c_2 t^{\alpha_2}, p_0(t) = c_3 t^{\alpha_3}, p_1(t) = c_4 t^{\alpha_4},$$

рівняння (2.1.1) є рівнянням виду Эйлера, якщо виконуються умови

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \neq 0$$

У цьому випадку

$$\frac{(q_1(t))'}{q_1(t)} = \frac{1}{t}, \qquad \frac{(q^2(t)p_0^{-2}(t))'}{q^2(t)p_0^{-2}(t)} = \frac{1}{t}, \quad \frac{p_0(t)}{q^2(t)} = \frac{c_3}{c_1}\frac{1}{t},$$

тобто віконується співвідношення (2.1.2).

§2.2. Вибір напрямку дослідження і його перший етап

Суть використовуваного способу вивчення здійснено в приведенні рівняння (2.1.1) перетвореннями до системи лінійних диференціальних рівнянь, яка передбачає використання аксіоми Мателля- Левінсона, власне що дозволить отримати асимптотику базової системи висновків диференціального рівняння (2.1.1).

Спочатку диференціальне рівняння (2.1.1) за допомогою

$$\begin{pmatrix} y \\ q(t)y' \\ \left(\frac{1}{2}\right) q_1(t)y + p_0(t)y' + q(t)(q(t)y')' \end{pmatrix} = Y \tag{2.2.1}$$

зводиться до системи диференціальних рівнянь

$$Y' = A(t)Y, \tag{2.2.2}$$

де

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1}(t) & 0 \\ -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & -p_0(t)q^{-2}(t) & q^{-1}(t) \\ -p_1(t) & -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо характеристичне рівняння матриці А:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & q^{-1}(t) & 0 \\ -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & -p_0(t)q^{-2}(t) - \lambda & q^{-1}(t) \\ -p_1(t) & -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & -\lambda \end{vmatrix}$$

Воно має вигляд:

$$\lambda^3 + \frac{p_0(t)}{q^2(t)}\lambda^2 + \frac{q_1(t)}{q^2(t)}\lambda + \frac{p_1(t)}{q^2(t)} = 0 \qquad (2.2.3)$$

Нехай λ_j – (j = *1,2,3*) – корні цього рівняння. Оскільки функції p_1 и q не дорівнюють нулю на $[a,+\infty[$, то корені λ_j (j = *1,2,3*), також не дорівнюють нулю на цьому відрізку. Припускаючи, що ці корені різні і двічі неперервно диференційна на деякому проміжку $[t_0, +\infty[\subset [a, +\infty[$, знайдемо власні вектора $v_j = (v_{ji})_{i=1}^3$ (j = *1,2,3*) матриці A, відповідні цим корені. Вони визначаються з лінійних алгебраїчних систем рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_j(t)v_{j1} + q^{-1}(t)v_{j2} = 0, \\ -1/2q_1(t)q^{-1}(t)v_{j1} - \left(p_0(t)q^{-2}(t) + \lambda_j(t)\right)v_{j2} + q^{-1}(t)v_{j3} = 0, \\ -p_1(t)v_{j1} - 1/2q_1(t)q^{-1}(t)v_{j2} - \lambda_j(t)v_{j3} = 0 \end{cases} \quad (j = 1,2,3).$$

Якщо вибрати $v_{j1}(t) \equiv 1$ (j = *1,2,3*), отримаємо такі власні вектори:

$$v_j(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ q(t)\,\lambda_j(t) \\ \frac{1}{2}\,q_1(t) + \,p_0(t)\lambda_j(t) + q^2(t)\lambda_j^2(t) \end{pmatrix} \quad (j = 1,2,3\,) \qquad (2.2.4)$$

Вектор-функції, одержувані на довільні відмінні від нуля на проміжку $[t_0, +\infty[$, скалярні речові функції, очевидно, також є лінійно незалежними власними векторами матриці A, відповідними її власним значенням λ_j $(j = 1,2,3\,)$.

Тоді матриця:

$$T(t) = (m_1^{-1}(t)v_1(t)\;\; m_2^{-1}(t)v_2(t)\;\; m_3^{-1}(t)v_3(t)), \qquad (2.2.5)$$

де $m_j\colon [t_0, +\infty[\to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - двічі неперервно диференційні функції, підлягають в подальшому визначенню, стовпцями якої є лінійно незалежні на проміжку $[t_0, +\infty[$ Власні вектори матриці A, відповідні коріння λ_j $(j = 1,2,3)$, призводить матрицю A до діагонального вигляду:

$$T^{-1}(t)A(t)T(t) = \Lambda(t), \qquad (2.2.6)$$

де

$$\Lambda(t) = diag\,[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]. \qquad (2.2.7)$$

Якщо застосувати до системи диференціальних рівнянь (2.2.2) перетворення:

$$Y = T(t)Z \qquad (2.2.8)$$

і якщо врахувати, що $Y' = T(t)Z' + T'(t)Z$, то отримаємо систему диференціальних рівнянь виду

$$Z' = [\Lambda(t) - \,T^{-1}(t)T'(t)]Z. \qquad (2.2.9)$$

Розглянемо тепер вибір функцій m_j $(j = 1,2,3)$. Введемо матрицю E,

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і обчислимо матрицю $B(t) = EA(t)$. Маємо

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q^{-1}(t) & 0 \\ -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & -p_0(t)q^{-2}(t) & q^{-1}(t) \\ -p_1(t) & -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -p_1(t) & -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & 0 \\ -1/2q_1(t)q^{-1}(t) & -p_0(t)q^{-2}(t) & q^{-1}(t) \\ 0 & q^{-1}(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця $B(t) = (b_{ij}(t))$ є симетричною, причому в ній

$$b_{33}(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad b_{23}(t) = b_{32}(t) = q^{-1}(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \geq a.$$

Звідси з урахуванням того, що $B = EA(t)$ и $EE = I$, где $I -$ одинична матриця, слід, що матриця A подана в вигляді

$$A(t) = EB(t),$$

де B - симетрична матриця з зазначеними вище властивостями. В силу симетричності матриці B маємо:

$$B = (EA(t)\,)^T = A^T(t)E^T = A^T(t)E$$

і тому

$$A(t) = EB(t) = EA^T(t)E = E^{-1}A^T(t)E.$$

Покладемо:

$$m_j(t) = (Ev_j(t))^T.\ v_j(t) \qquad (j = 1,2,3) \qquad (2.2.10)$$

Тоді функції m_j $(j = 1,2,3)$ відмінні від нуля і мають вигляд:

$$m_j(t) = (-1)^3\left[\frac{d}{d\lambda}\det(A(t) - I\lambda)\right]_{\lambda=\lambda j(t)} \left(\prod_{i+k=5} b_{ik}(t)\right)^{-1} =$$

$$= \left(3\lambda_j^2(t) + \frac{2\lambda_j(t)p_0(t)}{q^2(t)} + \frac{q_1(t)}{q^2(t)}\right) q^2(t) =$$

$$= 3\lambda_j^2(t)q^2(t) + 2\lambda_j(t)p_0(t) + q_1(t) \qquad (j = 1,2,3).$$

А так як згідно (2.2.3):

$$3\lambda_j^2(t) + 2\frac{p_0(t)}{q^2(t)}\lambda_j(t) + \frac{p_0(t)}{q^2(t)}\lambda_j(t) + 2\frac{q_1(t)}{q^2(t)} + \frac{q_1(t)}{q^2(t)} + 3\frac{p_1(t)}{q^2(t)}\lambda_j^{-1}(t) = 0$$

то маємо

$$m_j(t) = 3\lambda_j^2(t)q^2(t) + 2\lambda_j(t)p_0(t) + q_1(t) = -\lambda_j(t)p_0(t) - 3p_1(t)\lambda_j^{-1}(t) -$$

$$- 2q_1(t) \qquad (j = 1,2,3). \qquad (2.2.11)$$

Тоді

$$(Ev_j(t))^T.v_k(t) = 0 \qquad \text{при} \quad j \neq k \qquad (2.2.12)$$

і рядками матриці $T_1^{-1}(t)$ є вектор-функції:

$$\frac{((Ev_j(t))^T}{m_j(t)} \quad (j = 1,2,3)$$

де T_1 - матриця, стовпцями якої є вектор функції $v_j(t)$ $(j = 1,2,3)$.

В силу цього факту при даному виборі функцій m_j $(j = 1,2,3)$ рядками матриці $T^{-1}(t)$ є вектор-функції:

$$r_j(t) = ((Ev_j(t))^T \quad (j = 1,2,3), \qquad (2.2.13)$$

тобто

$$T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}.$$

Вибравши функції m_j $(j = 1,2,3)$ і враховуючи, що вони в силу (2.2.11) є двічі неперервно диференційними функції на проміжку $[t_0, +\infty[$, знайдемо тепер матрицю:

$$T^{-1}(t)T'(t) = (t_{jk}(t))_{j,k=1}^{n}$$

В силу (2.2.13), (2.2.10) і (2.2.12)

$$t_{jk}(t) = (Ev_j(t))^T . \left(-m_k'(t)m_k^{-2}(t)v_k(t) + m_k^{-1}(t)v_k'(t)\right) =$$

$$= -\frac{m_k'(t)}{m_k^2(t)} \left[(Ev_j(t))^T . v_k(t)\right] + m_k^{-1}(t)\left[(Ev_j(t))^T . v_k'(t)\right] =$$

$$= -\frac{m_k'(t)}{m_k^2(t)} \left[(Ev_j(t))^T . v_k(t)\right] +$$

$$+ m_k^{-1}(t)\left(\frac{1}{2}q_1(t) + p_0(t)\lambda_j(t) + q^2(t)\lambda_j^2(t), q(t)\lambda_j(t), 1\right) *$$

$$* \begin{pmatrix} 0 \\ \left(q(t)\lambda_k(t)\right)' \\ \left(\frac{1}{2}q_{\,1}(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t)\right)' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{m_k'(t)}{m_k(t)} + \dfrac{1}{m_k(t)}\left[q(t)\lambda_k(t)\left(q(t)\lambda_k(t)\right)' + \left(\dfrac{1}{2}q_{\,1}(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t)\right)'\right] \\ \text{если } j = k \\ \dfrac{1}{m_k(t)}\left[q(t)\lambda_k(t)\left(q(t)\lambda_k(t)\right)' + \left(\dfrac{1}{2}q_{\,1}(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t)\right)'\right], \\ \text{если } j \neq k \end{cases}$$

Тут

$$q(t)\lambda_k(t)\left(q(t)\lambda_k(t)\right)' + \left(\frac{1}{2}q_{\,1}(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t)\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(q(t)\lambda_k(t)\right)^2 + \frac{1}{2}q_1(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t)\right)'$$

Звідси з урахуванням того, що відповідно до (2.2.11):

$$\tfrac{1}{2}q_1(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t) = \tfrac{m_k(t)}{3} + \tfrac{1}{3}\,\lambda_k(t)p_0(t) + \tfrac{1}{6}\,q_1(t),$$

маємо

$$q(t)\lambda_k(t)\left(q(t)\lambda_k(t)\right)' + \left(\frac{1}{2}q_{\,1}(t) + p_0(t)\lambda_k(t) + q^2(t)\lambda_k^2(t)\right)' =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\big(q(t)\lambda_k(t)\big)^2 + \frac{m_k(t)}{3} + \frac{1}{3}\,\lambda_k(t)p_0(t) + \frac{1}{6}\,q_1(t) \right)' =$$

$$= \left(\frac{3q^2(t)\lambda_k^2(t) + 2p_0(t)\lambda_k(t) + q_1(t)}{6} + \frac{m_k(t)}{3} \right)' = \left(\frac{m_k(t)}{6} + \frac{m_k(t)}{3} \right)' =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, m_k'(t).$$

Тому отримаємо, що

$$t_{kk}\,(t) = -\,\frac{1}{2}\frac{m_k'(t)}{m_k(t)} \quad k = \overline{1,n} \tag{2.2.14}$$

$$t_{jk}\,(t) = \frac{1}{2}\frac{m_k'(t)}{m_k(t)} + \frac{q(t)[\lambda_j(t)-\lambda_k(t)\,]}{m_k(t)}\,\big(q(t)\lambda_k(t)\big)' \text{ при } j \neq k \tag{2.2.15}$$

§2.3. Властивості матриць $\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{t})$ та $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{t})\mathbf{T}'(\mathbf{t})$ при виконанні основних умов

Введемо першу умову

Умова (I):

$$q^2(t)q_1(t) = o(p_0^2(t)) \;\; \textit{при}\; t \to +\infty \tag{2.3.1}$$

$$p_0(t)p_1(t) = o(q_1^2(t)) \;\; \textit{при}\; t \to +\infty \tag{2.3.2}$$

З цієї умови випливає, що для функцій:

$$\delta_1(t) = \frac{q^2(t)q_1(t)}{p_0^2(t)} \tag{2.3.3}$$

$$\delta_2(t) = \frac{p_0(t)p_1(t)}{q_1^2(t)} \tag{2.3.4}$$

$$\delta_3(t) = \frac{q^2(t)p_1(t)}{p_0(t)q_1(t)} \tag{2.3.5}$$

виконується відповідно

$$\lim_{t\to+\infty} \delta_1(t) = 0 \tag{2.3.6}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \delta_2(t) = 0 \tag{2.3.7}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \delta_3(t) = 0 \tag{2.3.8}$$

1) Вважаючи в характеристичному рівнянні (2.2.3) матриці

$$\lambda = -\frac{p_1(t)}{q_1(t)}\mu_1; \tag{2.3.9}$$

отримаємо алгебраїчне рівняння

$$-q^2(t)\frac{p_1^3(t)}{q_1^3(t)}\mu_1^3 + p_0(t)\frac{p_1^2(t)}{q_1^2(t)}\mu_1^2 - q_1(t)\frac{p_1(t)}{q_1(t)}\mu_1 + p_1(t) = 0 \qquad |: p_1(t)\,,$$

$$-q^2(t)\frac{p_1^2(t)}{q_1^2(t)}\mu_1^3 + \frac{p_0(t)p_1(t)}{q_1^2(t)}\mu_1^2 - \mu_1 + 1 = 0,$$

$$\frac{p_0(t)p_1(t)}{q_1^2(t)}\left(-\frac{q^2(t)p_1(t)}{p_0(t)q_1(t)}\mu_1^3 + \mu_1^2\right) - \mu_1 + 1 = 0,$$

або

$$\delta_2(t)(-\delta_3(t)\,\mu_1^3 + \mu_1^2) - \mu_1 + 1 = 0. \qquad (2.3.10)$$

В силу (2.3.7) і (2.3.8) алгебраїчне рівняння (2.3.10) є рівнянням з майже постійними коефіцієнтами, причому тут δ_2, δ_3 – двічі неперервно-диференційні функції на проміжку $[a; +\infty)$.

Граничним для (2.3.10) є рівняння:

$$\mu_1 = 1$$

Займемося тепер уточненням виду цього кореня.

Нехай корінь μ_1 рівняння $(2.3.10)$ має вигляд:

$$\mu_1 = 1 + \alpha(t), \qquad \text{де} \qquad \lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0.$$

Тоді, підставляючи його в (2.3.10), отримаємо:

$$\delta_2(t)\big(-\delta_3(t)\big(-\alpha^3(t) - 3\alpha^2(t) - 3\alpha(t) - 1\big) + 1 + 2\alpha(t) +$$
$$+ \alpha^2(t)\big) - \alpha(t) - 1 + 1 = 0,$$

або

$$\alpha(t) = \ \delta_2(t)\,(1 + \alpha(t)(\alpha(t) + 2)),$$

звідки з урахуванням того, що α – неперевно - дифференційна на $[t_0; +\infty[$

функція, яка прагне до нуля при $t \to +\infty$, маємо:

$$\alpha(t) = \delta_2(t)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

та

$$\alpha'(t) = {\delta_2}'(t)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

В силу вищевикладеного маємо:

$$\mu_1 = 1+ \delta_2(t)\big(1 + o(1)\big) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \qquad (2.3.11)$$

та

$$\mu_1' = \delta_2{}'(t)\big(1 + o(1)\big) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \qquad (2.3.12)$$

2) Вважаючи в характеристичному рівнянні (2.2.3) матриці A

$$\lambda = -\frac{q_1(t)}{p_0(t)}\mu_2; \qquad (2.3.13)$$

отримаємо алгебраїчне рівняння

$$-q^2(t)\frac{q_1^3(t)}{p_0^3(t)}\mu_2^3 + p_0(t)\frac{q_1^2(t)}{p_0^2(t)}\mu_2^2 - \frac{q_1^2(t)}{p_0(t)}\mu_2 + p_1(t) = 0 \qquad |: \frac{q_1^2(t)}{p_0(t)}$$

$$-\frac{q^2(t)q_1(t)}{p_0^2(t)}\mu_2^3 + \mu_2^2 - \mu_2 + \frac{p_1(t)p_0(t)}{q_1^2(t)} = 0,$$

або

$$-\delta_1(t)\mu_2^3 + \mu_2^2 - \mu_2 + \delta_2(t) = 0 \qquad (2.3.14)$$

У силу (2.3.6) та (2.3.7) алгебраїчне рівняння (2.3.14) є рівнянням з майже сталими коефіцієнтами, причому тут δ_1, δ_2 – двічі неперервні диференційні функції на проміжку $[a; +\infty)$.

Граничним для (2.3.14) є рівняння:

$$\mu_2 = 1$$

Розглянемо тепер уточненням виду цього кореня.

Нехай корень μ_2 рівняння (2.3.14) має вигляд:

$$\mu_2 = 1 + \beta(t), \qquad \text{где} \qquad \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = 0.$$

Тоді підставляючи його у (2.3.14), отримаємо

$$-\delta_1(t)\big(1 + 3\beta^2(t) + 3\beta(t) + \beta^3(t)\big) + 1 + 2\beta(t) + \beta^2(t) - 1 - \beta(t) +$$

$$+\delta_2(t) = 0,$$

або

$$\beta(t) = -\delta_2(t) - \beta^2(t) + \delta_1(t)\,(1 + \beta(t)(3 + 3\beta(t) + \beta^2(t))),$$

звідки з урахуванням того, що β – непреривно диференційована на проміжку $[t_0; +\infty[$ функція, яка прагне до нуля при $t \to +\infty$, маємо:

$$\beta(t) = (\delta_1(t) - \delta_2(t))\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

маємо:

$$\beta\,'(t)(t) = (\delta_1{}'(t) - \delta_2{}'(t))\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

В силу вищевикладеного маємо:

$$\mu_2 = 1 + (\delta_1(t) - \delta_2(t))\big(1 + o(1)\big) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \qquad (2.3.15)$$

та

$$\mu_2' = (\delta_1{}'(t) - \delta_2{}'(t))\big(1 + o(1)\big) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \qquad (2.3.16)$$

3) Вважаючи в характеристичному рівнянні (2.2.3) матриці A

$$\lambda = -\frac{p_0(t)}{q^2(t)}\mu_3 \qquad (2.3.17)$$

отримаємо алгебраїчне рівняння

$$-q^2(t)\frac{p_0^3(t)}{q^6(t)}\mu_3^3 + p_0(t)\frac{p_0^2(t)}{q^4(t)}\mu_3^2 - \frac{q_1(t)p_0(t)}{q^2(t)}\mu_3 + p_1(t) = 0 \,|\!: \frac{p_0^3(t)}{q^4(t)}$$

$$-\mu_3^3 + \mu_3^2 - \frac{q^2(t)q_1(t)}{p_0^2(t)}\mu_3 + \frac{p_1(t)q^4(t)}{p_0^3(t)} = 0$$

або

$$-\mu_3^3 + \mu_3^2 - \delta_1(t)\mu_3 + \delta_1(t)\delta_3(t) = 0 \qquad (2.3.18)$$

У силу (2.3.6) и (2.3.8) алгебраїчне рівняння (2.3.18) є рівнянням з майже сталими коефіцієнтами, причому тут δ_1, δ_3 – двічі неперервно – диференційні функції на проміжку $[a; +\infty)$.

Граничними для (2.3.18) є рівняння

$$\mu_3 = 1$$

Розглянемо тепер уточненням виду цього кореня.

Нехай корінь μ_3 рівняння (2.3.18) має вигляд:

$$\mu_3 = 1 + \gamma(t), \qquad \text{де} \qquad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = 0.$$

Тоді підставляючи його у (2.3.18), отримаємо:

$$-\gamma^3(t) - 3\gamma^2(t) - 3\gamma(t) - 1 + 1 + 2\gamma(t) + \gamma^2(t) - \delta_1(t)\big(1 + \gamma(t)\big) +$$

$$+\delta_1(t)\delta_3(t) = 0.$$

або

$$\gamma(t) = -\delta_1(t)(1 + \gamma(t) - \delta_3(t)) - \gamma^3(t) - 2\gamma^2(t)$$

звідки з урахуванням того, що β - неперервно – диференційна функція на проміжку $[t_0; +\infty[$ функція, яка прагне до нуля при $t \to +\infty$, маємо:

$$\gamma(t) = -\delta_1(t)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

та

$$\gamma\,'(t) = -\delta_1{}'(t)\big(1 + o(1)\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

В силу вищевикладеного маємо:

$$\mu_3 = 1 - \delta_1(t)\big(1 + o(1)\big) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \qquad (2.3.19)$$

та

$$\mu_1' = 1 - \delta_1{}'(t)\big(1 + o(1)\big) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty \qquad (2.3.20)$$

Отримавши повну інформацію про коріння алгебраїчних рівнянь (2.3.10), (2.3.14), (2.3.18) з урахуванням замін (2.3.9), (2.3.13), (2.3.17) приходимо до висновку, що при виконанні умов (2.3.1) та (2.3.2) характеристичне рівняння (2.2.3) матриці A матриці має різні непреривно – диференційовані на деякому проміжутку $[t_{0,} + \infty[$ корені λ_j $(j = 1,2,3)$, допускають при $t \to +\infty$ асимптотичні подання

$$\lambda_1(t) = -\frac{p_1(t)}{q_1(t)}(1 + \delta_2(t)(1 + o(1))), \qquad (2.3.21)$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{q_1(t)}{p_0(t)}\big(1 + (\delta_1(t) - \delta_2(t))\big(1 + o(1)\big)\big), \qquad (2.3.22)$$

$$\lambda_3(t) = -\frac{p_0(t)}{q^2(t)}(1 - \delta_1(t)(1 + o(1))). \qquad (2.3.23)$$

При цьому ясно, що неважко записати і асимптотику для похідних цих коренів.

У силу (2.2.11) и (2.3.10), (2.3.14), (2.3.18) при $j = 1,2,3$

$$m_1(t) = q_1(t)(1 - 2\delta_2(t)(1 + o(1))) \qquad (2.3.24)$$

$$m_2(t) = -q_1(1 - 5\delta_1\big(1 + o(1)\big) + 2\delta_2(t)(1 + o(1))) \qquad (2.3.25)$$

$$m_3(t)=\frac{p_0^2(t)}{q^2(t)}(1-3\delta_1(t)(1+o(1))) \qquad (2.3.26)$$

$$\frac{m_1'(t)}{m_1(t)}=\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)-2\delta_2'(t)\big(1+o(1)\big)+2\delta_2^2(t)\delta_3'(t)\,*$$

$$*\big(1+o(1)\big)+6\delta_1(t)\delta_2^2(t)\left(\frac{q'(t)}{q(t)}+\frac{p_1'(t)}{p_1(t)}\right),$$

$$\frac{m_2'(t)}{m_2(t)}=\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)+\delta_1'(t)\big(1+o(1)\big)+2\delta_2'(t)\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{m_3'(t)}{m_3(t)}=\left(2\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}-2\frac{q'(t)}{q(t)}\right)\Big(1-4\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big)-4\delta_1'(t)\,*$$

$$*\big(1+o(1)\big)+4\delta_1(t)\delta_3'(t)\big(1+o(1)\big)+\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\delta_1(t)\big(1+o(1)\big),$$

та при $k \neq j$

$$\frac{q(t)\big(\lambda_1(t)-\lambda_2(t)\big)}{m_2(t)}(q(t)\lambda_2(t))'=\big(\delta_1(t)-\delta_3(t)\big)\,*$$

$$*\left(\frac{q'(t)}{q(t)}\big(1+o(1)\big)+\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\big(1+o(1)\big)\right)+$$

$$+(\delta_1(t)-\delta_3(t))(\delta_1'(t)-\delta_2'(t))\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{q(t)\big(\lambda_1(t)-\lambda_3(t)\big)}{m_3(t)}\big(q(t)\lambda_3(t)\big)'=\frac{q'(t)}{q(t)}\Big(1-2\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big)-$$

$$-3\delta_3(t)\frac{q'(t)}{q(t)}\Big(1+\big(\delta_2(t)-\delta_1(t)\big)\big(1+o(1)\big)\Big)+$$

$$+\delta_3(t)\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\Big(1+\big(\delta_2(t)-\delta_1(t)\big)\big(1+o(1)\big)\Big)-$$

$$-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\Big(1-2\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big)+(\delta_1'(t)-\delta_1(t)\delta_3'(t))\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{q(t)\big(\lambda_2(t)-\lambda_1(t)\big)}{m_1(t)}\big(q(t)\lambda_1(t)\big)'=\ \delta_3(t)\,(\frac{q'(t)}{q(t)}-\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}+\frac{p_1'(t)}{p_1(t)})\,*$$

$$*\,\big(1+o(1)\big)+\delta_3(t)(\delta_2'(t)-\ \delta_2(t)\delta_3'(t))\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{q(t)\big(\lambda_2(t)-\lambda_3(t)\big)}{m_3(t)}\big(q(t)\lambda_3(t)\big)'=-\delta_1(t)\frac{q'(t)}{q(t)}\Big(1-\delta_2(t)\big(1+o(1)\big)\Big)\ +$$

$$+\frac{q'(t)}{q(t)}(1-2\delta_1(t)(1+o(1)))+\delta_1(t)\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\Big(1-\delta_2(t)\big(1+o(1)\big)\Big)-$$

$$-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}(1-2\delta_1(t)(1+o(1)))+(\delta_1'(t)-\delta_1(t)\delta_3'(t))\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{q(t)\big(\lambda_3(t)-\lambda_1(t)\big)}{m_1(t)}\big(q(t)\lambda_1(t)\big)'=\delta_2(t)\,(\frac{q'(t)}{q(t)}\big(1+o(1)\big)+\ \frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\ *$$

$$*\ \big(1+o(1)\big)+\ \frac{p_1'(t)}{p_1(t)}(1+o(1)))+\delta_2(t)(\delta_2'(t)-\delta_2(t)\delta_3'(t))\,*$$

$$*\,\big(1+o(1)\big),$$

$$\frac{q(t)\big(\lambda_3(t)-\lambda_2(t)\big)}{m_2(t)}\big(q(t)\lambda_2(t)\big)'=-\ \frac{q'(t)}{q(t)}\big(1+o(1)\big)-\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)+$$

$$+\ \frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\big(1+o(1)\big)-(\delta_1'(t)-\delta_2'(t))\,\big(1+o(1)\big).$$

Тому для елементів t_{jk} $(j,k=1,2,3)$ матриці $T^{-1}T'$ у силу (2.2.14) та (2.2.15) маємо:

$$t_{11}=-\frac{1}{2}\frac{q_1^{'}(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)+\delta_2'(t)\big(1+o(1)\big)-\delta_2^2(t)\delta_3'(t)\big(1+o(1)\big)-$$

$$-3\delta_1(t)\delta_2^2(t)\frac{q'(t)}{q(t)}-3\delta_1(t)\delta_2^2(t)\frac{p_1'(t)}{p_1(t)}\,, \qquad (2.3.27)$$

$$t_{22}=-\frac{1}{2}\frac{q_1^{'}(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)-\ \frac{1}{2}\delta_1'(t)\big(1+o(1)\big)-\delta_2'(t)\big(1+o(1)\big), \qquad (2.3.28)$$

$$t_{33}=-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\Big(1-4\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big)+\frac{q'(t)}{q(t)}\Big(1-4\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big)+$$

$$+2\delta_1'(t)\big(1+o(1)\big)-\ 2\delta_1(t)\delta_3'(t)\big(1+o(1)\big)-\frac{\delta_1}{2}\frac{q_1^{'}(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big), \quad (2.3.29)$$

та при $k\neq j$

$$t_{12}=-\,t_{22}+\ (\delta_1(t)-\delta_3(t))(\frac{q'(t)}{q(t)}\big(1+o(1)\big)+\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)-$$

$$-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}(1+o(1)))+(\delta_1(t)-\delta_3(t))(\delta_1'(t)-\delta_2'(t))\big(1+o(1)\big), \quad (2.3.30)$$

$$t_{21}=-\,t_{11}+\delta_3(t)\,(\,\frac{q'(t)}{q(t)}-\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}+\frac{p_1'(t)}{p_1(t)})\big(1+o(1)\big)+\delta_3(t)\,*$$

$$*\,(\delta_2'(t)-\ \delta_2(t)\delta_3'(t))\big(1+o(1)\big), \qquad (2.3.31)$$

$$t_{13} = -t_{33} + \frac{q'(t)}{q(t)}\Big(1 - 2\delta_1(t)\big(1 + o(1)\big)\Big) - \; 3\delta_3(t)\frac{q'(t)}{q(t)} \; *$$

$$* \Big(1 + \big(\delta_2(t) - \delta_1(t)\big)\big(1 + o(1)\big)\Big) \; + \; \delta_3(t)\frac{p_0'(t)}{p_0(t)} *$$

$$* \Big(1 + \big(\delta_2(t) - \delta_1(t)\big)\big(1 + o(1)\big)\Big) - \frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\Big(1 - 2\delta_1(t)\big(1 + o(1)\big)\Big) +$$

$$+ (\delta_1'(t) - \delta_1(t)\delta_3'(t))\big(1 + o(1)\big), \qquad (2.3.32)$$

$$t_{23} = -t_{33} - \delta_1(t)\frac{q'(t)}{q(t)}\Big(1 - \delta_2(t)\big(1 + o(1)\big)\Big) + \frac{q'(t)}{q(t)} *$$

$$* (1 - 2\delta_1(t)(1 + o(1))) + \delta_1(t)\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\Big(1 - \delta_2(t)\big(1 + o(1)\big)\Big) - \frac{p_0'(t)}{p_0(t)} *$$

$$* (1 - 2\delta_1(t)(1 + o(1))) + (\delta_1'(t) - \delta_1(t)\delta_3'(t))\big(1 + o(1)\big), \qquad (2.3.33)$$

$$t_{32} = -t_{22} - \frac{q'(t)}{q(t)}\big(1 + o(1)\big) - \frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1 + o(1)\big) + \frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\big(1 + o(1)\big) -$$

$$- (\delta_1'(t) - \delta_2'(t))\big(1 + o(1)\big), \qquad (2.3.34)$$

$$t_{31} = -t_{11} - \delta_2(t)\,(\frac{q'(t)}{q(t)}\big(1 + o(1)\big) + \frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1 + o(1)\big) + \frac{p_1'(t)}{p_1(t)} *$$

$$* (1 + o(1))) + \delta_2(t)(\delta_2'(t) - \delta_2(t)\delta_3'(t)\big(1 + o(1)\big), \qquad (2.3.35)$$

Введемо другу умову на коефіцієнти диференційного рівняння

Умова (II):

$$\int_a^{+\infty}\left(\left|\frac{p_1'(t)}{p_1(t)}\right|+\left|\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\right|+\left|\frac{q'(t)}{q(t)}\right|+\left|\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\right|\right)|\delta_m(t)|dt<-\infty;$$

$$m=1,2,3; \qquad (2.3.36)$$

З урахуванням цієї умови, при обчислені t_{jk} в окремий доданок, позначається s_{jk} , будемо виділяти ті складові з t_{jk} , для яких невласний інтеграл від t_0 до $+\infty$ абсолютно сходиться, тобто коли:

$$s_{jk} \in L\,(\,t_0\,,+\infty) \quad (j,k=1,2,3); \qquad (2.3.37)$$

Оскільки згідно $(2.3.3), (2.3.4), (2.3.5)$

$$\frac{\delta_1'(t)}{\delta_1(t)}=\frac{2q'(t)}{q(t)}+\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}-2\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}, \qquad (2.3.38)$$

$$\frac{\delta_2'(t)}{\delta_2(t)}=\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}+\frac{p_1'(t)}{p_1(t)}-2\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}, \qquad (2.3.39)$$

$$\frac{\delta_3'(t)}{\delta_3(t)}=\frac{2q'(t)}{q(t)}+\frac{p_1'(t)}{p_1(t)}-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}-\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}, \qquad (2.3.40)$$

То очевидно, що $\delta_1', \delta_2', \delta_3' \in L(a,+\infty)$;

Тоді з $(2.3.27)$, $(2.3.28)$, $(2.3.29)$ в силу $(2.3.6)$, $(2.3.7)$, $(2.3.8)$ и $(2.3.38), (2.3.39), (2.3.40)$ маємо:

$$t_{11}=-\frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)-\ s_{11}(t),$$

$$t_{22} = -\frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big) - \ s_{22}(t),$$

$$t_{33} = -\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\big(1+o(1)\big) + \frac{q'(t)}{q(t)}\big(1+o(1)\big) - \ s_{33}(t),$$

Використовуючи тепер ці три представлення, а також $(2.3.38), (2.3.39), (2.3.40)$ з формул $(2.3.30), (2.3.31), (2.3.32), (2.3.33),$ $(2.3.34), (2.3.35)$ отримаємо:

$$t_{12} = \ \frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big) - \ s_{12}(t),$$

$$t_{21} = \ \frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big) - \ s_{21}(t),$$

$$t_{13} = - \ s_{13}(t),$$

$$t_{31} = \frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big) - \ s_{31}(t),$$

$$t_{23} = -s_{23}(t),$$

$$t_{32} = - \ \frac{q'(t)}{q(t)}\big(1+o(1)\big) - \frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big) + \frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\big(1+o(1)\big) - \ s_{32}(t),$$

Оскільки елементи t_{jk} $(j,k = 1,2,3)$ матриці $T^{-1}T'$ допускають зазначені представлення, то система диференціальних рівнянь $(2.2.9)$ маємо:

$$\frac{dZ}{dt} = [\Lambda(t) + R(t) + S(t)]Z, \qquad (2.3.41)$$

де Λ – діагональна матриця (2.2.7), $S = \left(s_{jk}(t)\right)$ - неперервна на проміжку $[t_0, +\infty)$ вещественнозначная матриця, яка задовольнить умові:

$$\int_{t_0}^{+\infty} ||S(t)||dt < +\infty; \qquad (2.3.42)$$

R– неперервно – диференційна функція на проміжку $[t_0, +\infty)$ дійсна матриця виду:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho(t) & -\frac{1}{2}\rho(t) & 0 \\ -\frac{1}{2}\rho(t) & \frac{1}{2}\rho(t) & 0 \\ -\frac{1}{2}\rho(t) & \frac{1}{2}\rho(t) + \frac{1}{2}\eta(t) & -\frac{1}{2}\eta(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.3.43)$$

у якій

$$\rho(t) = \frac{q_1'(t)}{q_1(t)}\left(1 + o(1)\right),$$

$$(2.3.44)$$

$$\eta(t) = \frac{(q^2(t)p_0^{-2}(t))'}{q^2(t)p_0^{-2}(t)} = \left(2\frac{q'(t)}{q(t)} - 2\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\right)\left(1 + o(1)\right),$$

§2.4. Випадок рівняння типу Єйлера

Виділимо тепер введенням ще однієї умови на коефіцієнти диференціального рівняння, так званий випадок рівняння типу Ейлера.

Умова (III):

$$\frac{1}{2}\frac{q_1'(t)}{q_1(t)} = \frac{p_0(\mathrm{t})}{q^2(t)}\big(\delta + \varphi(t)\big), \tag{2.4.1}$$

$$\frac{(q^2(t)p_0^{-2}(t))'}{q^2(t)p_0^{-2}(t)} = \frac{p_0(\mathrm{t})}{q^2(t)}\big(\omega + \psi(t)\big), \tag{2.4.2}$$

де δ и ω – неперервно – диференційні $[a, +\infty[$ функції такі що

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0, \lim_{t\to+\infty} \psi(t) = 0, \tag{2.4.4}$$

та

$$\int_{t_0}^{+\infty} |\varphi'(t)| dt < +\infty; \quad \int_{t_0}^{+\infty} |\psi'(t)| dt < +\infty. \tag{2.4.5}$$

При виконанні цієї умови матриця $\Lambda + R$ може бути записана наступним чином:

$$\Lambda(t) + R(t) = \lambda_3[C + S_1(t)], \tag{2.4.6}$$

де C – стала матриця виду

$$C = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \sigma & -\sigma & 0 \\ \sigma & \sigma - \frac{1}{2}\omega & 1 + \frac{1}{2}\omega \end{pmatrix}, \tag{2.4.7}$$

та $S_1 -$ неперервна - диференційна на проміжку $[t_0, +\infty[$ дійсна матриця виду:

$$S_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \\ u_2(t) & u_3(t) & 0 \\ u_2(t) & u_4(t) & u_5(t) \end{pmatrix}, \tag{2.4.8}$$

де

$$u_1(t) = \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_3(t)} - \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big),$$

$$u_2(t) = \sigma\big(1 + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big),$$

$$u_3(t) = \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_3(t)} - \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big),$$

$$u_4(t) = \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big),$$

$$u_5(t) = \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big),$$

Яка у силу умов (2.4.4), (2.4.5) і того факта, що $\delta_1', \delta_2', \delta_3' \in L(a, +\infty)$ володіє слід властивостями:

$$\lim_{t\to+\infty} S_1(t) = 0, \int_{t_0}^{+\infty} ||S_1'(t)||dt < +\infty. \tag{2.4.9}$$

Знайдемо власні значення матриці C. Для його запишемо характеристичне рівняння цієї матриці. Воно має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\alpha & \sigma & 0 \\ \sigma & -\sigma-\alpha & 0 \\ \sigma & \sigma-\frac{1}{2}\omega & 1+\frac{1}{2}\omega-\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\left(1+\frac{1}{2}\omega-\alpha\right)(2\sigma\alpha+\alpha^2) = 0.$$

Значить характеристичними коренями матриці C є числа:

$$\alpha_{01} = 1+\frac{1}{2}\omega; \quad \alpha_{02} = 0; \quad \alpha_{03} = -2\delta. \qquad (2.4.10)$$

Оскільки у силу умови $(2.4.3)$ вони є різними та при цьому виконуються умови $(2.4.9)$, то існує неперервно – диференційна на проміжку $[t_0, +\infty)$ та обмежена разом з зворотного $n\,x\,n$ – матриця T_1, яка зводить матрицю $C+S_1(t)$ до діагонального виду:

$$T_1^{-1}(t)[C+S_1(t)]T_1(t) = diag\,[\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)], \qquad (2.4.11)$$

де $\alpha_j(t)$ $(j=1,2,3)$ – корені характеристичного рівняння $(2.4.11)$

матриці $C+S_1(t)$, які прагнуть при $t \to +\infty$ відповідно до коренів $\alpha_{0j}(t)$ $(j=1,2,3)$ характеристичного рівняння матриці C, та

така, що: $||T_1'(t)|| = O(\|S_1'(t)\|)$ при $t \to +\infty$,

тобто для якої у силу $(2.4.9)$ виконується умова:

$$\int_{t_0}^{+\infty} ||T_1'(t)||dt < +\infty. \qquad (2.4.12)$$

Більш того, із доведення леми випливає, що у якості такої матриці може бути обрана матриця, стовпцями якої є неперервно диференційні на проміжку $[t_0, +\infty)$ власні вектори матриці $C + S_1(t)$, відповідні її власним значенням $\alpha_j(t)$ $(j = 1,2,3)$, і які при $t \to +\infty$ прагнуть до сталих власних векторів матриці C, які відповідають $\alpha_{0j}(t)$ $(j = 1,2,3)$.

Щоб побудувати таку матрицю, знайдемо спочатку корені характеристичного рівняння матриці $C + S_1(t)$

$$\begin{vmatrix} \begin{matrix} -\sigma + \dfrac{\lambda_1(t)}{\lambda_3(t)} - \\ -\sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \alpha \end{matrix} & \sigma + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) & 0 \\ \sigma + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) & \begin{matrix} -\sigma + \dfrac{\lambda_2(t)}{\lambda_3(t)} - \\ -\sigma\big(\varphi(t) + \delta_1 + o(\delta_1)\big) - \alpha \end{matrix} & 0 \\ \sigma + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) & \begin{matrix} \sigma - \dfrac{1}{2}\omega + \\ +\sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \\ -\dfrac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) \end{matrix} & \begin{matrix} 1 + \dfrac{1}{2}\omega + \\ +\dfrac{1}{2}\omega * \\ * \big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \alpha \end{matrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння має вигляд:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1 + o(\delta_1)\big) - \alpha\right) *$$

$$* \, [-\sigma^2 - 2\sigma^2 \varphi(t) - 2\sigma^2\delta_1(t) - \sigma^2\varphi^2(t) + o(\delta_1) + \alpha^2 + \alpha *$$

$$* \big(2\sigma + 2\sigma\,\varphi(t) + 2\sigma\delta_1(t) - \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) + \sigma^2 + 2\sigma^2 \varphi(t) + 2\sigma^2\delta_1(t) +$$

$$+\sigma^2 \varphi^2(t) + \sigma^2 \varphi(t)\delta_1(t) - \sigma\delta_1(t) - \sigma\,\varphi(t)\delta_1(t) + o(\delta_1)] = 0.$$

Його кореннями є функції

$$\alpha_1(t) = 1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1 + o(\delta_1)\big),$$

$$\alpha_2(t) = -\sigma - \sigma\varphi(t) - \sigma\delta_1(t) + \frac{\delta_1(t)}{2} +$$

$$+\sigma\sqrt{1 + 2\,\varphi(t) + 2\delta_1(t) + \ \varphi^2(t) + o(\delta_1)} + o(\delta_1),$$

$$\alpha_3(t) = -\sigma - \sigma\varphi(t) - \sigma\delta_1(t) + \frac{\delta_1(t)}{2} -$$

$$-\sigma\sqrt{1 + 2\,\varphi(t) + 2\delta_1(t) + \ \varphi^2(t) + o(\delta_1)} + o(\delta_1).$$

які прагнуть при $t \to +\infty$ відповідно до кореня $\alpha_{0j}(t)$ $(j = 1,2,3)$ характеристичного рівняння матриці C.

Власні вектора C_j $(j = 1,2,3)$ матриці $C + S_1(t)$, відповідні $\alpha_j(t)(j = 1,2,3)$ визначаються з систем алгебраїчних рівняннь:

$$(C + S_1(t) - \alpha_j E)C_j = 0 \quad (j = 1,2,3).$$

Звідси, якщо позначити через c_{1j}, c_{2j}, c_{3j} елементи вектора C_j, отримаємо такі системи алгебраїчних рівнянь для находження цих елементів:

$$\begin{cases} \left(-\sigma + \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_3(t)} - \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \alpha_j(t)\right)c_{1j} + (\sigma + \sigma(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)))c_{2j} = 0, \\ \Big(\sigma + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)\Big)c_{1j} + \left(-\sigma + \frac{\lambda_2(t)}{\lambda_3(t)} - \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \alpha_j(t)\right)c_{2j} = 0, \\ \Big(\sigma + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)\Big)c_{1j} + \left[\sigma - \frac{1}{2}\omega + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)\right] * \\ * c_{2j} + \left(1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \alpha_j(t)\right)c_{3j} = 0; \end{cases}$$

При $j = 1$ з цієї системи, якщо вважати $c_{31} = 1$, отримаємо

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.4.13)$$

При $j = 2$ та $j = 3$, якщо вважати $c_{1j} = 1$, отримаємо

$$C_j(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1 + \varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1) - \dfrac{\alpha_j}{\sigma}}{1 + \varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)} \\ \dfrac{-\sigma - \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) -}{1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)} \\ \dfrac{-\left[\sigma - \frac{1}{2}\omega + \sigma\big(\varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big) - \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)\right] *}{1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)} \\ * \left(\dfrac{1 + \varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1) - \dfrac{\alpha_j}{\sigma}}{1 + \varphi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)}\right) \end{pmatrix}$$

$$j = 2,3. \qquad (2.4.14)$$

Ці власні вектори матриці $C + S_1(t)$ прагнуть при $t \to +\infty$ відповідно до лінійно незалежних власних векторів:

$$C_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dfrac{-2\sigma + \frac{1}{2}\omega}{1 + \frac{1}{2}\omega} \end{pmatrix}, \qquad C_{03} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \dfrac{-4\sigma + \frac{3}{2}\omega}{1 + \frac{1}{2}\omega} \end{pmatrix}$$

матриці C.

Тобто, шукана матриця $T_1(t)$ має вид:

$$T_1(t) = \big(C_1(t) C_2(t) C_3(t)\big) \qquad (2.4.15)$$

Застосуємо тепер до системи (1.2.9) перетворення:

$$Z = T_1(t)W, \tag{2.4.16}$$

отримаємо з урахуванням (2.4.6) систему диференційних рівнянь

$$\frac{dW}{dt} = [\Lambda_1(t) + B(t)]W, \tag{2.4.17}$$

де

$$\Lambda_1(t) = \lambda_3 T_1^{-1}(t)[C + S_1(t)]T_1(t),$$

$$B(t) = T_1^{-1}(t)S(t)T_1(t) - T_1^{-1}T_1'(t).$$

Тут у силу (2.4.11)

$$\Lambda_1(t) = \lambda_3 \, diag\,[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)] \tag{2.4.18}$$

Окрім того, оскільки матриця T_1 ограничена матриця зі зворотним на проміжку $[t_0, +\infty)$ і дотримуються умови (2.4.12) та (2.3.20), то:

$$\int_{t_0}^{+\infty} ||B(t)||dt < +\infty. \tag{2.4.19}$$

Звідси випливає, що отримана система диференціальних рівнянь (2.4.17) є L- діагональною системою диференційних рівнянь

Більш того, враховуючи, що:

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha_j(t) = \alpha_{0j} \qquad (j = 1,2,3)$$

та $\alpha_{0j}(t)$ $(j = 1,2,3)$ в силу $(2.4.10)$ та $(2.4.3)$ різні дійсні числа, приходимо до висновку про те, що система функцій $\lambda_3 Re\alpha_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ задовольняє умові Мателля-Левінсона.

§2.5. Основний результат

Теорема 2.5. *Нехай дотримуються умови* (I)-(III). *Тоді диференціальне рівняння* $(2.1.1)$ *має фундаментальну систему розв'язків* $y_j(t)$ $(j = 1,2,3)$, *які допускають при* $t \to +\infty$ *асимптотичні уявлення:*

$$y_1(t) = \frac{q^2(t)}{p_0^2(t)}\big(1 + o(1)\big)exp\left(-\left(1 + \frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right), \qquad (2.5.1_1)$$

$$y_1'(t) = -\frac{1}{p_0(t)}\big(1 + o(1)\big)exp\left(-\left(1 + \frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right), \qquad (2.5.1_2)$$

$$(q(t)y_1'(t))' = \frac{1}{q(t)}\big(1 + o(1)\big)exp\left(-\left(1 + \frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right), \qquad (2.5.1_3)$$

$$y_2(t) = \frac{\delta_1(t)}{q(t)}\left(\frac{10 + 6w - 4\sigma}{2 + w}\right)\big(1 + o(1)\big) + \frac{4}{q(t)}\delta_2(t)\big(1 + o(1)\big), \qquad (2.5.2_1)$$

$$y_2'(t) = \frac{1}{p_0(t)}\left(\frac{2 + 4\sigma}{2 + w}\right)\big(1 + o(1)\big), \qquad (2.5.2_2)$$

$$(q(t)y_2'(t))' = \frac{1}{q(t)}\left(\frac{w-4\sigma}{2+w}\right)\left(1+o(1)\right), \qquad (2.5.2_3)$$

$$y_3(t) = -\frac{2}{q_1(t)}\left(1+o(1)\right)exp\left(2\sigma\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right), \qquad (2.5.3_1)$$

$$y_3'(t) = \frac{1}{p_0(t)}\left(\frac{6+8\sigma}{2+w}\right)\left(1+o(1)\right)exp\left(2\sigma\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right), \qquad (2.5.3_2)$$

$$\left(q(t)y_3'(t)\right)' = \frac{1}{q(t)}\left(\frac{3w-8\sigma}{2+w}\right)\left(1+o(1)\right)exp\left(2\sigma\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right). \quad (2.5.3_3)$$

Доведення. У силу виконання умов (I)-(III) система диференційних рівнянь (2.2.1), як було встановлено вище, за допомогою перетворення (2.2.8) та (2.4.16) приводиться до L-діагональної системи (2.4.17), допускає застосування теореми Мателля-Левінсона. Відповідно до цієї теореми і замін (2.2.8), (2.4.16) система диференціальних рівнянь (2.2.2) має фундаментальну систему розв'язків $Y_j(t)$ $(j = 1,2,3)$, задовольняє при $t \to +\infty$ асимптотичним співвідношенням:

$$Y_j(t) = T(t)T_1(t)\left[e_j + o(1)\right]exp\left(\int_{t_0}^{t}\lambda_3\alpha_j(\tau)\,d\tau\right)(j = 1,2,3). \qquad (2.5.4)$$

З (2.2.5) з урахуванням (2.3.9), (2.3.13), (2.3.17) та (2.3.4), (2.3.5) випливає, що матриця T має такий вигляд:

$T(t) =$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\delta_2(t)\big(1+o(1)\big)}{q_1(t)} & \begin{matrix} -\dfrac{1+5\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)}{q_1(t)} - \\ -\dfrac{2\delta_2(t)\big(1+o(1)\big)}{q_1(t)} \end{matrix} & \dfrac{\delta_1(t)\Big(1+3\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big)}{q_1(t)} \\ \begin{matrix} -\dfrac{q(t)}{p_0(t)}\delta_2(t) * \\ * \Big(1+3\delta_2(t)\big(1+o(1)\big)\Big) \end{matrix} & \begin{matrix} \dfrac{q(t)}{p_0(t)}(1+6\delta_1(t) - \\ -3\delta_2(t)+o(\delta_1)+o(\delta_2)) \end{matrix} & -\dfrac{q(t)}{p_0(t)}\Big(1+2\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)\Big) \\ \dfrac{1}{2}+o(\delta_2) & \begin{matrix} \dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\delta_1(t) - \\ -2\delta_2(t)+o(\delta_1)+o(\delta_2) \end{matrix} & -\dfrac{1}{2}\delta_1(t)+o(\delta_1) \end{pmatrix}.$$

У силу $(2.4.13)$ та $(2.3.14)$ стовпцями C_j $(j = 1,2,3\ )$ матриці T_1 є вектор-функції:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_j(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)-\frac{\alpha_j(t)}{\sigma}}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)} \\ \dfrac{-\sigma-\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-}{1+\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)} \\ \dfrac{-\Big[\sigma-\frac{1}{2}\omega+\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\frac{1}{2}\omega\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)\Big]*}{1+\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{2}\omega\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)} \\ * \left(\dfrac{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)-\frac{\alpha_j(t)}{\sigma}}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}\right) \end{pmatrix} (j = 2,3.)$$

Значить, стовпцями матриці TT_1 є вектор – функції

$$\Gamma_j(t) = T(t)\ C_j(t) \qquad (j = 1,2,3)$$

У силу виду функції α_2 з **§4** маємо:

$$\frac{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)+1+\varphi(t)+\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2\delta}-\sqrt{1+2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1)}}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}=$$

$$=\frac{2+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)+\varphi(t)+\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2\delta}-1-\frac{1}{2}(2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1))}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}+$$

$$+\frac{o(2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1))}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}=\frac{1+\varphi(t)+\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2\delta}+o(\varphi)+o(\delta_1)}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}$$

та

$$\frac{-\sigma-\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\left(\sigma-\frac{1}{2}\omega+\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\frac{1}{2}\omega\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)\right)}{1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)}*$$

$$*\left(\frac{1+\varphi(t)+\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2\delta}+o(\varphi)+o(\delta_1)}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}\right)=$$

$$=\frac{-\sigma-\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\frac{\left(\sigma-\frac{1}{2}w\right)+\left(2\sigma-\frac{1}{2}w\right)\varphi(t)+\left(2\sigma-w-\frac{1}{2}+\frac{w}{4\delta}\right)\delta_1(t)-\frac{1}{2}w\psi(t)+o(\delta_1)+o(\varphi)}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}}{1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\big(\psi(t)+\delta_1+o(\delta_1)\big)}.$$

Аналогічно з урахуванням виду функції α_3 з **§4** знаходимо:

$$\frac{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)+1+\varphi(t)+\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2\delta}+\sqrt{1+2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1)}}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}=$$

$$=\frac{2+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)+\varphi(t)+\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2\delta}+1+\frac{1}{2}(2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1))}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}+$$

$$+\frac{o(2\varphi(t)+2\delta_1(y)+\varphi^2(t)+o(\delta_1))}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}=$$

$$=\frac{3+3\varphi(t)+3\delta_1(t)-\dfrac{\delta_1(t)}{2\delta}+o(\varphi)+o(\delta_1)}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}$$

та

$$\frac{-\sigma-\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\left(\sigma-\frac{1}{2}\omega+\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\frac{1}{2}\omega\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)\right)}{1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)}*$$

$$*\frac{\dfrac{3+3\varphi(t)+3\delta_1(t)-\dfrac{\delta_1(t)}{2\delta}+o(\varphi)+o(\delta_1)}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}}{1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)}=$$

$$=\frac{-\sigma-\sigma\big(\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)-\dfrac{3\sigma+6\sigma\varphi(t)+6\sigma\delta_1(t)-\frac{\delta_1(t)}{2}-\frac{3}{2}w-\frac{3}{2}w\varphi(t)-3w\delta_1(t)+\frac{w\delta_1(t)}{4\sigma}}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}}{1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)}$$

$-$

$$-\frac{\dfrac{\frac{3}{2}w\psi(t)+o(\delta_1)+o(\varphi)}{1+\varphi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)}}{1+\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}w\big(\psi(t)+\delta_1(t)+o(\delta_1)\big)}.$$

Використовуючи тепер дані асимптотичні співвідношення отримаємо наступні асимптотичні при $t\to+\infty$ уявлення для стовпців $\Gamma_j(t)\ (t)\ (j=1,2,3)$ матриці TT_1.

$$\Gamma_1(t) = T(t)C_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{q^2(t)}{p_0^2(t)}\Big(1 + 3\delta_1(t)\big(1 + o(1)\big)\Big) \\ -\dfrac{q(t)}{p_0(t)}\Big(1 + 2\delta_1(t)\big(1 + o(1)\big)\Big) \\ -\dfrac{1}{2}\delta_1(t) + o(\delta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{q^2(t)}{p_0^2(t)}\big(1 + o(1)\big) \\ -\dfrac{q(t)}{p_0(t)}\big(1 + o(1)\big) \\ -\dfrac{1}{2}\delta_1(t)\big(1 + o(1)\big) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2(t) = T(t)C_2(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_1(t)}{q(t)}\Big(\dfrac{10 + 6w - 4\sigma}{2 + w}\Big)\big(1 + o(1)\big) + \dfrac{4}{q(t)}\delta_2(t)\big(1 + o(1)\big) \\ \dfrac{q(t)}{p_0(t)}\Big(\dfrac{2 + 4\sigma}{2 + w}\Big)\big(1 + o(1)\big) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3(t) = T(t)C_3(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{q_1(t)}\big(1 + o(1)\big) \\ \dfrac{q(t)}{p_0(t)}\Big(\dfrac{6 + 8\sigma}{2 + w}\Big)\big(1 + o(1)\big) \\ 2 + o(1) \end{pmatrix}.$$

Далі, з урахуванням виду функції $\alpha_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ та формул $(1.3.9), (1.3.13), (1.3.17), (1.4.1), (1.4.2)$ та умовами (*I*)-(*III*) помічаємо, що

$$\lambda_3(t)\alpha_1(t) = -\frac{p_0(t)}{q^2(t)}\big(1 - \delta_1(t)\big)\big(1 + o(1)\big) *$$

$$* \left(1 + \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w\big(\psi(t) + \delta_1(t) + o(\delta_1)\big)\right) = -\frac{p_0}{q^2}\left(1 + \frac{1}{2}w + o(1)\right) + d_1(t),$$

де $\int_{t_0}^{+\infty} |d_1(t)|\, dt < +\infty$,

$$\lambda_3(t)\alpha_2(t) = -\frac{p_0(t)}{q^2(t)}\big(1-\delta_1(t)\big)\big(1+o(1)\big)(-\sigma - \sigma\varphi(t) - \sigma\delta_1(t) - \frac{\delta_1(t)}{2} +$$

$$+\sigma\sqrt{1+2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1)} + o(\delta_1) = d_2(t),$$

де $\int_{t_0}^{+\infty}|d_2(t)|\, dt < +\infty$,

$$\lambda_3(t)\alpha_3(t) = -\frac{p_0(t)}{q^2(t)}\big(1-\delta_1(t)\big)\big(1+o(1)\big)(-\sigma - \sigma\varphi(t) - \sigma\delta_1(t) + \frac{\delta_1(t)}{2} -$$

$$-\sigma\sqrt{1+2\varphi(t)+2\delta_1(t)+\varphi^2(t)+o(\delta_1)} + o(\delta_1)) = 2\sigma\frac{p_0(t)}{q^2(t)} + d_3(t),$$

де $\int_{t_0}^{+\infty} |d_3(t)|\, dt < +\infty$.

Звідси слідує, що

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_3(\tau)\alpha_1(\tau)\, d\tau = -\left(1+\tfrac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t} \frac{p_0}{q^2} d\tau + c_1 + o(1) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_3(t)\alpha_2(t)\, d\tau = c_2 + o(1) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

$$\lambda_3(t)\alpha_3(t) d\tau = 2\sigma\int_{t_0}^{t} \frac{p_0}{q^2} d\tau + c_3 + o(1) \qquad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

де c_j $(j = 1,2,3)$ – деякі сталі.

У силу цих уявлень та уявлень для стовпців $\Gamma_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ матриці TT_1 з формул $(2.5.4)$, отримаємо наступні асимптотичні уявлення при $t \to$

$+\infty$ для лінійно незалежних розв'язків $Y_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ системи диференціальних рівнянь (2.2.2):

$$Y_1(t) = e^{c_1}\begin{pmatrix} \frac{q^2(t)}{p_0^2(t)}\big(1+o(1)\big)exp\left(-\left(1+\frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right) \\ -\frac{q(t)}{p_0(t)}\big(1+o(1)\big)exp\left(-\left(1+\frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right) \\ -\frac{1}{2}\delta_1(t)\big(1+o(1)\big)exp\left(-\left(1+\frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{c_1}\begin{pmatrix} \frac{q^2(t)}{p_0^2(t)}\big(1+o(1)\big) \\ -\frac{q(t)}{p_0(t)}\big(1+o(1)\big) \\ -\frac{1}{2}\delta_1(t)\big(1+o(1)\big) \end{pmatrix} exp\left(-\left(1+\frac{1}{2}w\right)\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right),$$

$$Y_2(t) = e^{c_2}\begin{pmatrix} \frac{\delta_1(t)}{q(t)}\left(\frac{10+6w-4\sigma}{2+w}\right)\big(1+o(1)\big) + \frac{4}{q(t)}\delta_2(t)\big(1+o(1)\big) \\ \frac{q(t)}{p_0(t)}\left(\frac{2+4\sigma}{2+w}\right)\big(1+o(1)\big) \\ 1+o(1) \end{pmatrix},$$

$$Y_3(t) = e^{c_3}\begin{pmatrix} -\frac{2}{q_1(t)}\big(1+o(1)\big)\big(1+o(1)\big) \\ \frac{q(t)}{p_0(t)}\left(\frac{6+8\sigma}{2+w}\right)\big(1+o(1)\big) \\ 2+o(1) \end{pmatrix} exp\left(2\sigma\int_{t_0}^{t}\frac{p_0(\tau)}{q^2(\tau)}d\tau\right).$$

Помноживши ці вектор-функції на e^{-c_1}, e^{-c_2} та e^{-c_3} відповідно отримуємо три лінійно незалежних розв'язків системи диференціальних рівнянь $(2.2.2)$, яким в силу перетворення $(2.2.1)$, відповідають три лінійно незалежних розв'язків $y_j(t)$ $(j = 1,2,3)$ рівняння $(2.1.1)$, які допускають при $t \to +\infty$ асимптотичні подання $(2.5.1_i), (2.5.2_i), (2.5.3_i)$.

Теорема доведена. ■

Заключення

Друга глава написана на основі сатті A.S.A. Al-Hammadi, у якій для розглянутого дифференціального рівняння третього порядку отриман основний результат про асомптитоку його розв’язків, що містить достатньо грубий вид асимптотичних уяв.

В дійсній главі за рахунок використовування результатів з праці В.М. Євтухова уточнені корені характеристичного рівняння (2.2.3) та обгрунтовані їх гладкі властивості. Це дозволило уточнити вид матриць перетворення T та T_1. Використання цих уточненных даних дало можливість при збережені схеми дослідження отримати достатньо гарний вид для асимптотичних уявлень фундаментального сімейства розв’язків диференційного рівняння виду (2.1.1) у так названому випадку рівнянння типу Єйлера.

Отриманній результат ілюструється на прикладі одного класу диференціальних рівнянь виду (2.1.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Наука. - 1967. - 472с.

[2] *Евтухов В.М.* Некоторые вопросы асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений// Укр. Мат. Ж. - 2002.- 54, № 1. - С. 20-42.

[3] *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.

[4] *Кигурадзе И.Т.* Об асимптотическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений// Тр. Тбилис. ун-та. - 1964. - 102. -С. 149-167.

[5] *Привалов В.С.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука. - 1977. - 444с.

[6] *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, Киев. - 1954. - 290с.

[7] *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. - 1983. - 352с.

[8] *Devinatz A.* An asymptotic theorem for systems of linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. - 1971. - 160. - P. 353-363.

[9] *Devinatz A., Kaplan J.L.* Asymptotic estimates for solutions of linear systems of ordinary differential equations having multiple characteristic roots// Indiana Univ. Math. - 1972. - 22. - P. 355-366.

[10] *Devinatz A.* The asymptotic natur of the solutions of certain linear systems of differential equations // Pacific. J. Math. – 1965. – V. 15. – P. 75–83.

[11] *Eastham M.S.P.* The asymptotic solution of linear differential systems. Applications of the Levinson theorem. Clarendon Press. Oksford. - 1989. - 240p.

[12] *Eastham M.S.P.* On the eigevectors for a class of matrices arising from quasi-derivatives// Proc. Roy. Soc. Edin. - 1984. - 97A. - P. 73-78.

[13] *Al-Hammadi A.S.A.* Euler case for a class of third-order differential equation// Mem. Diff. Eq. Math. Phys. - 2010.- 51. - P. 5-15.

[14] *Harris J., Lutz D.A.* On the asymptotic integration of linear differential systems// J. Math. Anal. Appl. - 1974. - 48. - P. 1-16.

[15] *Harris J., Lutz D.A.* A unified theory of asymptotic integration // J. Math. Anal. Appl. - 1977. - 57. - P. 571-586.

[16] *Hartman P., Wintner A.* Asymptotic integrations of linear differential equations. // Am. J. Math. - 1955. - 77 - P. 48-86 and 932.

[17] *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations// Duke Math. J. - 1948.- 15. - P. 111-126.

[18] *Matell M.* Asymptotische Eigenschaften gewisser linearer Differentialgleichungen// Upsala; Applbergs Boktryckeri Aktiebolag. 1924.

[19] *Perron O.* Über lineare Differentialgleichungen bei denen die unabhangig Variable reell ist, 1 und 2 // J. Reine Angew. Math. – 1913. – Bd. 142. – S. 254–270. – 1914. – Bd. 143. – S. 25–50.