

УДК 517.946

П. В. Керекеша, Н. Я. Тихоненко
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
“Загальна теорія наближених методів” ОНУ 24.10.2002 р.

Проводиться аналітичне дослідження та обґрунтовується метод наближеного розв’язання змішаної граничної задачі для рівняння Лапласа в односвязній області, обмеженій двома простими гладкими кривими.

Производится аналитическое исследование и обосновывается метод приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в односвязной области, ограниченной двумя простыми гладкими кривыми.

The paper investigates the analytical research and substantiates the method of approximated solution of mixed boundary problem for Laplas’s equation in 1-connected domain bounded plan smooth curves.

1. Введение и постановка задачи. Пусть D – односвязная область, ограниченная контуром $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1, Γ_2 – простые гладкие кривые; $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{z_1; z_2\}$. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

в области D , которое на границе Γ удовлетворяет условию

$$A \frac{\partial u}{\partial n} + Bu = \varphi, \tag{1.2}$$

где A, B и φ – известные функции точек контура Γ .

Как известно [1], в общей постановке задача (1.1), (1.2) является весьма сложной и в общем случае она еще не решена. Известны ее решения лишь для некоторых канонических областей, в частности для полосы, полуплоскости [2] и других, и то лишь в том случае, когда функции A и B являются константами.

В настоящей работе рассмотрим два важных с практической точки зрения случая задачи (1.1), (1.2).

Случай 1: $B = 1, A = 0$ на Γ_1 .

Случай 2: $A = 1, B = 0$ на Γ_1 .

В обоих случаях A и B – непрерывные и отличные от нуля на Γ_2 функции, такие, что $A^{-1}B > 0$ на Γ_2 . Для определенности в случае 1 задачу (1.1), (1.2) будем называть первой смешанной краевой задачей, а в случае 2 – второй смешанной краевой задачей для уравнения Лапласа.

Известно, что существует функция

$$z = z(w) = x(\alpha, \beta) + iy(\alpha, \beta), \quad (z(-\infty) = z_1, z(+\infty) = z_2),$$

конформно отображающая полосу $-\infty < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < h$ в область D . При помощи этого отображения смешанные задачи для уравнения Лапласа в односвязной области сводятся к соответствующим смешанным задачам для уравнения Лапласа в полосе. Этот факт базируется на инвариантности оператора Лапласа при конформном отображении [3], гладкости контуров Γ_1 и Γ_2 и известной [3] формулы

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = |z'(w)| \frac{\partial u}{\partial n}.$$

В связи с этим обстоятельством рассматриваемая проблема приводится к решению двух смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в полосе. Для определенности рассмотрим сначала вторую смешанную задачу Лапласа в полосе.

2. Исследование второй смешанной задачи для уравнения Лапласа в полосе.

Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0, \quad -\infty < \alpha < +\infty, \quad 0 < \beta < h, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha, 0) = g_1(\alpha), \quad -\infty < \alpha < +\infty, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta}(\alpha, h) + b(\alpha)u(\alpha, h) = g_2(\alpha), \quad -\infty < \alpha < +\infty, \quad (2.3)$$

где $b(\alpha) > 0$ – известная непрерывная функция на вещественной оси R , а $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) \in L_2(R)$ – известные функции.

Решение $u(\alpha, \beta)$ задачи (2.1)–(2.3) ищем в пространстве функций, непрерывных вместе с частными производными до второго порядка включительно в полосе $-\infty < \alpha < +\infty$, $0 < \beta < h$, и таких, что

$$\int_R |u(\alpha, \beta)|^2 d\alpha \leq \text{const},$$

$$\int_R |u_\beta(\alpha, \beta)|^2 d\alpha \leq \text{const}, \quad \beta \in [0; h]. \quad (2.4)$$

Теорема 1. Если функция $b(\alpha) > 0$, то решение задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющее условиям (2.4), единственно.

Доказательство. Допустим противное. Пусть $u_1(\alpha, \beta) \neq u_2(\alpha, \beta)$ – различные решения задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяющие условиям (2.4). Рассмотрим функцию $v = u_1 - u_2$ и применим формулу Дирихле [4] для функции $u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta)$ в неограниченной области. Поскольку функция $v(\alpha, \beta)$ является решением однородной задачи (2.1)–(2.3), то применительно к полосе из формулы Дирихле получим

$$\iint_{R \times [0; h]} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right] d\alpha d\beta + \int_R b(\alpha)v^2(\alpha, h) d\alpha = 0. \quad (2.5)$$

Если функция $b(\alpha) > 0$, то равенство (2.5) будет справедливым лишь при условии, что каждый из интегралов в его левой части равен нулю. Откуда следует, что градиент функции $v(\alpha, \beta)$ равен нулю в каждой точке полосы, т.е. $v(\alpha, \beta) = \text{const}$. Однако

функция $v(\alpha, \beta)$, как разность двух функций из $L_2(R)$, должна принадлежать $L_2(R)$. Это возможно, если $v(\alpha, \beta) = 0$, т.е. $u_1(\alpha, \beta) = u_2(\alpha, \beta)$.

Применим теперь к уравнению (2.1) интегральное преобразование Фурье по переменной α . В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно образа Фурье $U(x, \beta)$ функции $u(x, \beta)$. Его решение имеет вид

$$U(x, \beta) = A(x) \operatorname{ch} x\beta + B(x) \operatorname{sh} x(h - \beta), \quad x \in R, \quad \beta \in [0; h], \quad (2.6)$$

где $A(x)$, $B(x)$ – произвольные функции параметра x . Используя условие (2.2), из (2.6) получим

$$U(x, \beta) = A(x) \operatorname{ch} x\beta + G_1(x) \operatorname{sh} x(h - \beta) / x \operatorname{ch} xh, \quad (2.7)$$

где

$$G_1(x) = (Vg_1)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R g_1(x) e^{ix\alpha} dx, \quad x \in R.$$

Из (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} U(x, h) &= A(x) \operatorname{ch} xh, \\ U_\beta(x, h) &= xA(x) \operatorname{sh} xh - \frac{G_1(x)}{\operatorname{ch} xh}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из условий (2.4) и представлений (2.8) следует, что функции

$$A(x) \operatorname{ch} xh, \quad xA(x) \operatorname{sh} xh \in L_2(R).$$

К равенствам (2.8) применим обратное преобразование Фурье. Соответственно получим

$$\begin{aligned} u(\alpha, h) &= 0,5[a(\alpha + ih) + a(\alpha - ih)], \\ u_\beta(\alpha, h) &= 0,5i[a(\alpha + ih) - a(\alpha - ih)]' - g_3(\alpha), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= (V^{-1}A)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R A(x) e^{-ix\alpha} dx, \\ g_3(\alpha) &= \left(V^{-1} \frac{G_1(x)}{\operatorname{ch} xh} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя теперь (2.9) в краевое условие (2.3) для определения функции $a(\alpha)$, получим дифференциальную задачу Карлемана (ДЗК)

$$i[a(\alpha + ih) - a(\alpha - ih)]' + b(\alpha)[a(\alpha + ih) + a(\alpha - ih)] = 2[g_2(\alpha) + g_3(\alpha)]. \quad (2.11)$$

Решение ДЗК (2.11) будем искать в виде [5]

$$a(\alpha) = \frac{1}{4h} \int_R \frac{\varphi(t)}{\operatorname{ch}(2h)^{-1} \pi(t - \alpha)} dt, \quad -h < \operatorname{Im} \alpha < h. \quad (2.12)$$

При этом будем предполагать, что неизвестная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси R , а $\varphi'(t) \in L_2(R)$.

В силу этого, согласно [5],

$$a'(\alpha) = \frac{1}{4h} \int_R \frac{\varphi'(t)}{\operatorname{ch}(2h)^{-1} \pi(t-\alpha)} dt, \quad -h < \operatorname{Im} \alpha < h. \quad (2.13)$$

Согласно работе [5], для предельных значений функций $a(\alpha)$ и $a'(\alpha)$ имеют место соответственно следующие представления

$$a(\alpha \pm ih) = \frac{\varphi(\alpha)}{2} \pm \frac{i}{4h} \int_R \frac{\varphi(t)}{\operatorname{sh}(2h)^{-1} \pi(t-\alpha)} dt,$$

$$a'(\alpha \pm ih) = \frac{\varphi'(\alpha)}{2} \pm \frac{i}{4h} \int_R \frac{\varphi'(t)}{\operatorname{sh}(2h)^{-1} \pi(t-\alpha)} dt.$$

Подставив эти равенства в (2.11), получим следующее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение (СИДУ)

$$\int_R \frac{\varphi'(t)}{\operatorname{sh}(2h)^{-1} \pi(t-\alpha)} dt + b(\alpha)\varphi(\alpha) = 2h g(\alpha), \quad (2.14)$$

где

$$g(\alpha) = g_2(\alpha) + g_3(\alpha).$$

Теперь решение СИДУ (2.14) сведем к решению СИДУ на отрезке, сделав замену переменной

$$\alpha = \frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, \quad t = \frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

Тогда СИДУ (2.14) примет вид

$$Kw = \gamma(\xi)w(\xi) - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2h} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2} w'(\tau)}{\tau-\xi} d\tau = f(\xi), \quad (2.15)$$

где

$$w(\xi) = \varphi\left(\frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}\right), \quad \gamma(\xi) = b\left(\frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}\right), \quad f(\xi) = g\left(\frac{h}{\pi} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}\right). \quad (2.16)$$

В силу тождественных преобразований смешанная краевая задача (2.1)–(2.3) и СИДУ (2.15) эквивалентны в том смысле, что они одновременно разрешимы или нет, и решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) выражаются через решения СИДУ (2.15) по формулам (2.16), (2.12), $A(x) = (Va)(x)$, (2.7) и $u(\alpha, \beta) = (V^{-1}U)(\alpha, \beta)$. Отметим также, что в силу тождественных преобразований функции $\gamma(\xi) \in C[-1:1] = C$, $\gamma(\xi) \in L_2[-1:1] = L_2$ и в условиях теоремы 1 СИДУ (2.15) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $L_{2\rho}[-1:1] = L_{2\rho}$, $\rho = (1-\xi^2)^{-0.5}$.

Следует отметить, что первые исследования, посвященные решению задачи (2.1)–(2.3), принадлежат одному из соавторов [6]. Там же был намечен путь ее приближенного решения. При этом вопросы обоснования метода ее приближенного решения и сходимости ее приближенных решений к точным не рассматривались. В работе [7] при рассмотрении конкретной прикладной задачи, сводящейся к решению задачи (2.1)–(2.3), вопросы обоснования метода приближенного ее решения были затронуты, но с довольно жесткими ограничениями, накладываемыми на заданные функции. В предлагаемой работе обоснование метода приближенного решения задачи (2.1)–(2.3) производится с общих

позиций, что дает возможность установить его осуществимость, сходимость и оценки скорости сходимости приближенных решений задачи (2.1)–(2.3) к ее точному решению в зависимости от конструктивных свойств известных функций, входящих в ее условия.

3. Приближенное решение смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3). Пусть $X = L_{2\rho}$ ($Y = L_{2\rho}$) – пространство решений (правых частей) СИДУ (2.15). Его приближенное решение ищем в виде

$$w_n(\xi) = \sum_{k=0}^n w_k T_k(\xi), \quad (3.1)$$

где $T_k(\xi)$ – многочлены Чебышева первого рода. Тогда, подставив (3.1) в уравнение (2.15) и исходя из известных соотношений

$$T_l'(\xi) = l U_{l-1}(\xi), \quad \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2} U_{l-1}(\tau)}{\tau-\xi} d\tau = -\pi T_l(\xi), \quad l = 1, 2, \dots,$$

где $U_l(\xi)$ – многочлены Чебышева второго рода, получим

$$Kw_n = \sum_{k=0}^n \gamma(\xi) T_k(\xi) w_k + \frac{\pi}{2h} \sqrt{1-\xi^2} \sum_{k=1}^n k T_k(\xi) w_k = f(\xi). \quad (3.2)$$

Из (3.2) для определения неизвестных w_k получим систему уравнений

$$\sum_{k=0}^n A_{jk} w_k + \frac{\pi}{2h} \sum_{k=1}^n k B_{jk} w_k = f_j, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.3)$$

где

$$A_{jk} = \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-0,5} \gamma(\xi) T_j(\xi) T_k(\xi) d\xi, \quad f_j = \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-0,5} f(\xi) T_j(\xi) d\xi,$$

$$B_{jk} = \int_{-1}^1 T_j(\xi) T_k(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & k+j - \text{нечетно}, \\ \frac{4jk}{[j^2 - (k+1)^2][j^2 - (k-1)^2]}, & k+j - \text{четно}. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть функция $b(\alpha) > 0$ и $\gamma(\xi) \in C$. Если функция $f(\xi) \in L_{2\rho}$, то система уравнений (3.3) однозначно разрешима при достаточно больших n , а приближенные решения $w_n(\xi)$ СИДУ (2.15) сходятся в пространстве $L_{2\rho}$ к его точному решению $w(\xi)$, т.е.

$$\|w(\xi) - w_n(\xi)\|_{L_{2\rho}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Если к тому же функции $\gamma(\xi) \in C^{(r)}$, $f(\xi) \in L_{2\rho}^{(r)}$, $r \geq 1$, то приближенные решения СИДУ (2.15) сходятся к его точному решению со скоростью

$$\|w(\xi) - w_n(\xi)\|_{L_{2\rho}} = O(n^{-r}). \quad (3.5)$$

Если же функции $\gamma(\xi)$, $f(\xi) \in H_a^{(r)}$, то приближенные решения СИДУ (2.15) сходятся к его точному решению со скоростью

$$\|w(\xi) - w_n(\xi)\|_{L_{2\rho}} = O(n^{-r-\alpha}). \quad (3.6)$$

Доказательство. В условиях теоремы в силу теоремы 1 определенной формулой (2.15) оператор $K : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим. Обозначим $X_n = Y_n$ – множество агрегатов вида (3.1). Тогда $X_n \subset X_{n+1} \subset X$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$, $\dim X_n = \dim Y_n = n + 1$. Пусть P_n – оператор, который ставит в соответствие каждой функции $f(\xi) \in Y$ отрезок ее ряда Фурье вида [4]

$$(P_n f)(\xi) = \sum_{k=0}^n f_k T_k(\xi), \quad f_k = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{-0,5} f(\xi) T_k(\xi) d\xi.$$

Ясно, что $P_n : Y \rightarrow Y_n$ и обладает [4] свойствами $P_n^2 = P_n$, $\|P_n\| = 1$. Тогда на основании представления (3.2) систему уравнений (3.3) можно [5] записать в виде $K_n = P_n K w_n = P_n f$, где $K_n = P_n K$ – приближенный оператор. Теперь для завершения доказательства теоремы 2 на основании результатов работы [8] достаточно проверить выполнимость условий теорем 1 и 7 работы [9, стр. 10–19].

Построим теперь приближенное решение смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3). Пусть w_k^* , $k = \overline{0, n}$, – решения системы уравнений (3.3). Тогда приближенное решение

СИДУ (2.15) имеет вид $w_n^*(\xi) = \sum_{k=0}^n w_k^* T_k(\xi)$. Значит, приближенное решение

СИДУ (2.14) будет таким $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n w_k^* T_k[\text{th}(2h)^{-1} \pi t]$. При этом для приближенных

решений СИДУ (2.14) имеют место оценки скорости сходимости в пространстве $L_2(R)$ к его точным решениям, аналогичные соответственно оценкам (3.4)–(3.6).

Тогда приближенные решения ДЗК (2.11) строятся по формуле

$$a_n(\alpha) = \frac{1}{4h} \int_R \frac{\varphi_n[\text{th}(2h)^{-1} \pi t]}{\text{ch}(2h)^{-1} \pi(t - \alpha)} dt, \quad -h < \text{Im} \alpha < h. \quad (3.7)$$

Из представлений (2.12) и (3.7) легко получаются оценки, аналогичные соответственно оценкам (3.4)–(3.6), скорости сходимости в пространстве $L_2(R)$ приближенных решений ДЗК (2.11) к ее точному решению. Тогда в соответствии с (2.7) приближенные решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) строятся по формуле

$$u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R [A_n(x) \text{ch} x\beta + G_1(x) \text{sh} x(h - \beta) / x \text{ch} xh] e^{-ix\alpha} dx,$$

$$\alpha \in R, \quad \beta \in [0 : h],$$

где $A_n(x) = (V^{-1} a_n)(x)$.

Теперь из равенства

$$u(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R [A(x) - A_n(x)] \text{ch} x\beta e^{-ix\alpha} dx, \quad \alpha \in R, \quad \beta \in [0 : h]$$

на основании интегрального равенства Парсеваля и теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть функция $b(\alpha) > 0$; функции $b(\alpha) \in C(R)$, $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha) \in L_2(R)$. Тогда приближенные решения $u_n(\alpha, \beta)$ смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) сходятся к ее точному решению, т.е.

$$\|u(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta)\|_{L_2(R)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad \beta \in [0 : h].$$

Если к тому же функции $b(\alpha) \in C^{(r)}$, $g_1(\alpha), g_2(\alpha) \in L_2^{(r)}(R)$, $r \geq 1$, то приближенные решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) сходятся к ее точному решению со скоростью

$$\|u(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta)\|_{L_2(R)} = O(n^{-r}), \quad \beta \in [0 : h].$$

Если же функции $b(\alpha) \in H_{\alpha_1}^{(r)}(R)$, $g_1(\alpha), g_2(\alpha) \in L_2^{(r)}(R) \cap H_{\alpha_1}^{(r)}(R)$, то приближенные решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) сходятся к ее точному решению со скоростью

$$\|u(\alpha, \beta) - u_n(\alpha, \beta)\|_{L_2(R)} = O(n^{-r-\alpha_1}), \quad \beta \in [0 : h].$$

Замечание 1. По приведенной выше схеме производится аналитическое исследование и построение приближенного решения первой смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в полосе.

Замечание 2. Аналогичным образом с некоторыми дополнениями производится исследование первой и второй смешанных краевых задач для уравнения Пуассона в полосе.

Замечание 3. Метод приближенного решения СИДУ (2.15), изложенный в работе, является обобщением известного метода ортогональных многочленов [10] приближенного решения интегральных уравнений с П-ядрами.

1. **Миранда К.** Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957. – 446 с.
2. **Черский Ю. И.** Задачи математической функции, сводящиеся к задаче Римана // Труды Тбилисс. ин-та матем. АН ГрузССР. – 1968. – Т. 28. – С. 209–246.
3. **Михлин С. Г.** Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
4. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1979. – 709 с.
5. **Керекеша П. В.** Симметрическая задача Карлемана для полосы с параллельным сдвигом на вещественную ось // ДАН України. – 1998. – №6. – С. 29–33.
6. **Керекеша П. В.** Смешанные краевые гармонические задачи для полосы с граничными условиями, содержащими переменные коэффициенты / Одесск. ун-т. – Одесса, 1987. – Деп. в УкрНИИТИ 9.02.87, № 643–Ук87.
7. **Керекеша П. В.** Кручення підкріплених стержнів симетричного профілю // ДАН України. – 1998. – № 5. – С. 50–58.
8. **Даугавет И. К.** Введение в теорию приближения функций. – Л.: ЛГУ, 1977. – 184 с.
9. **Габдулхаев Б. Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: КГУ, 1980. – 232 с.
10. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 342 с.

Получено 15.11.2002 г.