

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: «Асимптотична поведінка розв'язків
нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку»

«Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear differential equations»

Виконала: студентка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Дмитрашко Діана Ігорівна

Керівник: д. ф.-м. н., проф. Євтухов В. М.

Рецензент: к. ф.-м. н., доц. Шарай Н. В.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ____ від «_____» _____ р.
Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____
Протокол № ____ від «_____» ____ р.
Оцінка _____ / _____ / _____
Голова ЕК

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Основні поняття та властивості правильно змінних функцій	6
2 Попередні результати	11
3 Асимптотичні властивості правильно змінних розв'язків диференціального рівняння другого порядку у випадку, коли f та ϕ - правильно змінні функції	26
4 Випадок, коли f та ϕ - швидко змінні функції	41
5 Практична частина	52
Висновки	56
Список літератури	58

ВСТУП

Темою даної роботи є "Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку".

Дослідження даної теми займають важливе місце в розвитку якісної теорії диференціальних рівнянь. Такого типу рівняння виникають у багатьох галузях природознавства. Наприклад, у другій половині ХІХ століття в астрофізичних дослідженнях Лейна та Емдена вперше з'явилося рівняння, яке в подальшому отримало назву Емдена-Фаулера. Це рівняння зіграло важливу роль у подальшому розвитку теорії нелінійних неавтономних звичайних диференціальних рівнянь. Виявлення багатьох типів розв'язків у рівняння Емдена-Фаулера привело дослідників до вивчення асимптотичних властивостей узагальнених рівнянь типу Емдена-Фаулера другого порядку, а потім до вивчення асимптотичних властивостей узагальнених двочленних рівнянь типу Емдена-Фаулера n -го порядку та неавтономних рівнянь n -го порядку загального виду. Основні результати про поведінку розв'язків таких рівнянь були отримані в роботах Р. Емдена, Р. Фаулера, Ф. Аткінсона, І. Т. Кігурадзе, Т. А. Чантурія, О.В.Костіна, В. М. Євтухова та його учнів, та багатьох інших авторів.

Потім разом з розвитком створеної у 1930 році І. Карамата теорії правильно змінних функцій, стала актуальною задача про дослідження асимптотичної поведінки розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з правильно змінною нелінійністю. Такому виду рівнянь присвячені роботи V. Marić, M. Tomić, S. D. Taliaferro, S. CanoCasanova, T. Kusano, J. Manojlović, В. М. Євтухова, Л. А. Кирилової, М.О. Белозьорової, В. М. Харькова. Найбільш важливі результати для такого виду рівнянь n -го порядку були отримані в роботі А. М. Самойленка та В. М. Євтухова і в подальшому в роботах В.М. Євтухова та О.М. Клопота. У цей же період досліджувалися також диференціальні рівняння, що містять у правій частині суми доданків з правильно змінними нелінійностями, яким присвячені роботи В. М. Євтухова, В. А. Касьянової, О. О. Козьми, О. М. Клопота. Окрім того, в роботах В. Маріча, В. М. Євтухова, В. М. Харькова й А. Г. Черникової досліджувались двочленні диференціальні рівняння другого

порядку зі швидко змінною нелінійністю.

Основною мотивацією міркувань в даній роботі є знаменита атомна модель Томаса-Фермі, яка описується наступною нелінійною сингулярною граничною задачею

$$y''(x) = x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}(x), \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0. \quad (0.1)$$

Наведене вище рівняння фактично є безрозмірною формою радіально-симетричного рівняння Пуассона $\Delta V(r) = \text{const} \cdot \rho(r)$, де $V(r)$ - потенціал електронів, що розглядаються як вироджений газ навколо ядра атома з великим атомним номером та $\rho(r)$ - щільність газу, обчислена статистично, r - відстань від ядра атома (прийнято вважати в стані спокою).

Більш загальним рівнянням, яке є цінним у фізиці, є рівняння Емдена-Фаулера

$$\frac{d}{dt} \left(t^\rho \frac{du}{dt} \right) \pm t^\sigma u^\lambda = 0, \quad (0.2)$$

де ρ, σ, λ дійсні числа.

Моею задачею було дослідити асимптотичну поведінку розв'язків, що прямують до 0, наступного нелінійного диференціального рівняння

$$y'' = f(x)\phi(y), \quad (0.3)$$

де $f(x)$ та $\phi(y)$ неперевні додатні функції при $x > 0$ та $y > 0$ відповідно.

Необхідно було розглянути випадки, коли функції $f(x)$ та $\phi(y)$ є правильно та швидко змінними. Для проведення такого дослідження була вивчена відповідна література про властивості таких функцій, в тому числі монографія Маріча та Томича "Asymptotic properties of solutions of the equation $y - f(x)\phi(y)$ " [2] та книга Сенети "Правильно змінні функції" [4]. Було досліджено вже досягнуті результати, знайдено прогалини і намічено напрямки, в яких можна рухатися.

Метою данної роботи є детальне дослідження асимптотичних властивостей розв'язків нелінійного диференціального рівняння (0.3). Для того щоб реалізувати поставлену ціль для випадку, який розглядається, необхідно виконати наступні задачі:

- Ввести основні поняття та властивості змінних функцій
- Розглянути попередні результати у роботах відомих науковців для більш глибокого вивчення питання
- Сформулювати та довести основні теореми про асимптотичну поведінку розв'язків рівняння (0.3)
- Розглянути практичне застосування проведеного дослідження

У першому розділі даної роботи перш за все вводяться необхідні означення та описуються основні властивості правильно змінних функцій у виді лем [1], які знадобляться протягом наступних розділів та стануть важливим інструментом у доведенні асимптотичних властивостей розв'язків рівнянь досліджуваного типу.

Другий розділ присвячено попереднім результатам відомих науковців щодо цієї теми. Тут приведені теореми, доведені Авакумовичем [3], Гелюком [12], Маричем [2],[13],[14] та Вонгом [22]. Цей розділ розглянуто у даній роботі для того, щоб якомога глибше зрозуміти історію та обсяг уже досягнутого у досліджуваній темі.

Третій розділ є основним у моїй роботі, тут розглядається вже конкретний випадок, який і є темою дослідження, а саме асимптотичні властивості правильно змінних розв'язків диференціального рівняння другого порядку (0.3) у випадку, коли f та ϕ - правильно змінні функції. Доведення теореми приведено у монографії Маріча та Томича, але воно не є очевидним, тому виникало багато питань щодо правильності деяких пунктів, що ставило результат під сумнів. Моєю задачею було провести повне детальне доведення теореми з усіма розрахунками, що приведені в даній роботі. Було перевірено усі сумнівні моменти та отримано результат, що відповідає результату з монографії.

Четвертий розділ містить теорему аналогічну до попередньої, але тут функції $f(x)$ та $\phi(y)$ є швидко змінними.

П'ятий розділ є останнім у даній роботі і він присвячений питанню використання на практиці асимптотичних властивостей правильно змінних розв'язків диференціального рівняння другого порядку (0.3) у випадку, коли f та ϕ - правильно та швидко змінні функції. У цьому розділі наведено вісім прикладів застосування отриманих результатів у різних сферах науки.

ВИСНОВКИ

Данна дипломна робота присвячена вивченню нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку та дослідженню асимптотичної поведінки їх розв'язків. Основною мотивацією роботи є рівняння Томаса-Фермі, а також більш загальне рівняння Емдена-Фаулера. Дослідження проводилось на базі рівняння більш загального ніж вище згадані, а саме

$$y'' = f(x)\phi(y), \quad (5.6)$$

де $f(x)$ та $\phi(y)$ неперервні додатні функції при $x > 0$ та $y > 0$ відповідно.

У роботі розглядаються два конкретні випадки, коли f та ϕ - правильно змінні функції та коли ці функції є швидко змінними.

Перший розділ роботи є допоміжним. У ньому вводяться необхідні означення та описуються основні властивості правильно змінних функцій у виді лем. Цей розділ є важливим та необхідним для повного розуміння теоретичного матеріалу з даної теми.

Другий розділ також має допоміжний характер. Він присвячений попереднім результатам відомих науковців з тематики роботи. Тут наводяться дуже важливі факти, такі як теореми Авакумовича, Гелюка, Вонга, що накладають на досліджуване рівняння певні обмеження, завдяки чому у роботі розглядається певний клас рівнянь та їх розв'язків. Також цей розділ містить важливу теорему 2.7, яка відображає деякі оцінки розв'язків рівняння (5.6) для великих x у вигляді нерівностей та є необхідною для отримання подальших результатів даної роботи.

Третій розділ містить у собі основну теорему даної роботи у випадку, коли розв'язки (5.6) є правильно змінними функціями, і дає асимптотичне уявлення про поведінку таких розв'язків при $x \rightarrow \infty$.

Четвертий розділ присвячено теоремі аналогічній до попередньої, але у випадку коли розв'язки (5.6) є швидко змінними функціями.

П'ятий розділ роботи присвячено питанню використання асимптотичних властивостей правильно змінних розв'язків диференціального рівняння другого порядку (5.6) у випадку, коли f та ϕ - правильно та швидко змінні

функції, на практиці. У цьому розділі наведено вісім прикладів застосування отриманих результатів у різних сферах науки.

Загалом, робота несе важливий теоретичний та практичний характер. В ній досліджено питання, які входять до найактуальніших у теорії диференціальних рівнянь, бо нелінійні диференціальні рівняння мають прикладне значення у багатьох сферах науки, зокрема у фізиці (багато нелінійних рівнянь описують реальні фізичні процеси і тим самим призводять до нових фізичних ефектів) та економіці (деякі економічні моделі будуються на основі диференціальних рівнянь). У роботі не тільки глибоко вивчені питання теорії, а й заповнені деякі прогалини та неточності у доведеннях.

Результати роботи є актуальними та були представлені на міжнародній науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана [23].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. V. Maric, Regular variation and differential equations, (LNM1726, Springer, 2000)(T)(ISBN 354067160).
2. V. Maric, M. Tomic, Asymptotic properties of solutions of the equation $y - f(x)\phi(y)$, Math. Z. 149 (1976), 261-266.
3. V.G. Avakumovic, Sur l'equation differentielle de Thomas-Fermi, Publ. Inst. Math. (Beograd) 1 (1947), 101-113.
4. E. Seneta, Regularly varying functions, Lecture Notes in Mathematics 508, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
5. В.И.Коляда, А.А.Кореновский, Курс лекций по математическому анализу, часть 1, Одесса, "Астропринт, 2009
6. Евтухов В.М. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АНГССР. -1982. - Т. 106, N 3. - С. 473-476.
7. Евтухов В.М. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. - 1984. - V. 115. - S. 215-236.
8. Евтухов В.М, Дрик Н.Г. Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. - 1989. - Т. 133, N 1. - С. 29-32.
9. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 5. С. 628–650.
10. R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1953.
11. E. Fermi, Un metodo statistico per la determinazione di alcune proprieta dell atomo, Rend. Acad. Naz. Lincei, CI. sci. fis. mat. nat. F) 6 (1927), 602-607.
12. J.L. Geluk, Note on a theorem of Avakumovic, PAMS 112 (1991), 429- 431.
13. V. Maric, M. Tomic, Regularly variation and asymptotic properties of

- solutions of nonlinear differential equations, Publ. Inst. Math. (Beograd) 21(35), (1977), 119-129.
14. V. Maric, M. Tomic, Asymptotics of solutions of a generalized Thomas-Fermi equation, J. Differential Equations 35 (1980), 36-44.
 15. V. Maric, Z. Radasin, Asymptotics of solutions of a class of second order nonlinear differential equations, Review of Research, Faculty of Sci. Univ. Novi Sad, Ser. Math. 51 1 (1985), 155-168.
 16. V. Maric, Z. Radasin, On asymptotic-behaviour of solutions of the equations $y - f(x)\phi(\psi(y))$, Glasnik Mat. Fiz. Astr. 23(43) (1988), 27-34.
 17. V. Maric, Z. Radasin, On a method in asymptotics of solutions of a class of second order nonlinear differential equations, Bull. T.CIX Acad. Serbe Sci. et Arts, Classe Sci. math, nat, Sci. math. 20(1995), 1-11.
 18. M.V. Sataric, R.B. Zakula, J.A. Tuszynski, Z.Y. Shemsidini, The role of domain walls in energy transfer mechanisms between two connected onedimensional ferroelectrics, Physica Scripta, 43 (1991), 340-346.
 19. S.D. Taliaferro, Asymptotic behavior of solutions of $y - \phi(t)f(y)$, SIAM J. Math. Anal. 12 (1981), 853-865.
 20. S.D. Taliaferro, Asymptotic behavior of positive decreasing solutions of $y - F(t,y,y')$, Geometric analysis and nonlinear PDE. Lecture notes in pure and appl. math. M. Dekker New York, 1993, 105-127.
 21. L.H. Thomas, The calculation of atomic fields, Proc. Cambridge Phil. Soc. 23 (1927), 542-548.
 22. P.K. Wong, Existence and asymptotic behaviour of proper solutions of a class of second-order non-linear differential equations, Pacific J. Math. 13 (1963), 737-760.
 23. Дмитрашко Д.І., Євтухов В.М. Асимптотична поведінка розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Тез. доп. міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана «Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування» (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 16 - 19 вересня 2020) — Чернівці, 2020. — С. 126-127.