ОБОБЩЁННАЯ СХЕМА МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ДЕФЕКТА

Реут В., Реут Е.

Украина

Одним из высокоэффективных методов решения задач механики разрушения и выявления концентрации напряжений около дефектов является разработанный Г.Я. Поповым метод разрывных решений [1,2]. С его помощью за счёт построенных заранее разрывных решений легко свести задачи к решению сингулярных уравнений. Этот метод базируется на обобщённой схеме метода интегральных преобразований [1,3], которая представляет собой обобщение классического метода интегральных преобразований [4] на случай наличия разрывов у искомой функции и её нормальной производной по переменной преобразования. Однако, при этом предполагалось, что дефект вписывается в координатную сетку. В настоящей работе излагается обобщённая схема метода интегральных преобразований для случая криволинейного дефекта

1. Рассмотрим разрывную краевую задачу. Отыскивается функция $u(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая в области $\Omega\{x\in(a_0,a_1), y\in(b_0,\varphi(x))\cup(\varphi(x),b)\}$ и непрерывная вместе со своей производной вплоть до границы. Здесь $y=\varphi(x)$ – некоторая заданная гладкая функция, причём $b_0<\varphi(x)<b_1$ при $x\in(a_0,a_1)$. Предполагается, что функция $u(x,y)$ является решением дифференциального уравнения

$$Lu(x,y)\equiv L_x u+L_y u=0,\quad (x,y)\in\Omega, \tag{1}$$

$$L_x u=\rho_1^{-1}(x)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q_1(x)u\right\},$$

$$L_y u=\rho_2^{-1}(y)\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(p_2(y)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q_2(y)u\right\},$$

удовлетворяет граничным условиям

$$U_j[u]\equiv\left(\alpha_{j0}u_x+\alpha_{j1}u\right)\Big|_{x=a_j}=0,\quad y\in(b_0,b_1),\quad x=a_j,\quad j=0,1,$$

$$V_m[u]\equiv\beta_{m0}u_y+\beta_{m1}u=0,\quad x\in(a_0,a_1),\ y=b_m,\quad m=0,1 \tag{2}$$

и терпит заданные скачки при переходе через кривую $y=\varphi(x)$

$$\left\langle \partial u/\partial v\right\rangle \equiv \partial u/\partial v\left(x,\varphi(x)-0\right)-\partial u/\partial v\left(x,\varphi(x)+0\right)=\chi(x), \tag{3}$$

$$\langle u\rangle\equiv u\left(x,\varphi(x)-0\right)-u\left(x,\varphi(x)+0\right)=\mu(x). \tag{4}$$

Здесь $\rho_j, p_j, q_j, g_j, \chi, \mu$ – заданные функции, α_{jm} и β_{jm} – заданные числа, причём $\alpha_{j0}^2+\alpha_{j1}^2>0$ и $\beta_{m0}^2+\beta_{m1}^2>0$, a_j и b_j – произвольные числа, которые могут принимать и бесконечные значения; v – направление нормальное к кривой $y=\varphi(x)$.

2. Применим интегральное преобразование

$$u_\lambda(x)=\int_{b_0}^{b_1}u(x,y)\mathrm{K}(y,\lambda)\rho_2(y)dy \tag{5}$$

к дифференциальному уравнению (1) и, воспользовавшись абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, разобьём промежуток интегрирования, следуя [1,2] на две части $(b_0,b_1)=(b_0,\varphi(x)-0)\cup(\varphi(x)+0,b_1)$, после интегрирования по частям получим:

$$\int_{b_0}^{b_1}L_y u(x,y)\mathrm{K}(y,\lambda)\rho_2(y)dy= \tag{6}$$

$$=\left(\int_{b_0}^{\varphi(x)-0}+\int_{\varphi(x)+0}^{b_1}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[p_2(y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]\mathrm{K}(y,\lambda)dy-\int_{b_2}^{b_1}q_2(y)u(x,y)\mathrm{K}(y,\lambda)dy=$$

$$=p_2(\varphi(x))\left[\left\langle\frac{\partial u}{\partial y}\right\rangle\mathrm{K}(\varphi(x),\lambda)-\langle u\rangle\frac{d\mathrm{K}}{dy}\bigg|_{y=\varphi(x)}\right]-\lambda^2u_\lambda(x).$$

Для преобразования второго слагаемого $L_x u$ необходимо вынести производные из-под интеграла с переменным пределом

$$\left(\int_{b_0}^{\varphi(x)-0}+\int_{\varphi(x)+0}^{b_1}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)\mathrm{K}(y,\lambda)\rho_2(y)dy. \tag{7}$$

Когда Г.Я.Попов предложил этот метод, он считал $\varphi(x)=const$ (т.е. дефект вписывается в систему координат), и тогда этой проблемы не возникает.

Правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} \Phi(x,y)\,dy = \varphi'(x)\,\Phi(x,\varphi(x)-0)+\int\limits_a^{\varphi(x)}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\,dy$$

или

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{b} \Phi(x,y)\,dy = -\varphi'(x)\,\Phi(x,\varphi(x)+0)+\int\limits_{\varphi(x)}^{b}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\,dy,$$

откуда вытекает, что если $\Phi(x,y)$ терпит скачок при переходе через кривую $y=\varphi(x)$, $a<x<b$, то

$$\int\limits_a^b \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\,dy = -\varphi'(x)\big[\Phi(x,\varphi(x)-0)-\Phi(x,\varphi(x)+0)\big]+ \frac{d}{dx}\int\limits_a^b\Phi(x,y)\,dy \qquad (8)$$

Применим формулу (8) к интегралу (7)

$$\int\limits_{b_0}^{b_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{K}(y,\lambda)\rho_2(y)\,dy = -p_1(x)\left\langle\frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle\varphi'(x)\,\mathrm{K}(\varphi(x),\lambda)\,\rho_2(\varphi(x)) - \frac{d}{dx}\big[p_1(x)\langle u\rangle\varphi'(x)\,\mathrm{K}(\varphi(x),\lambda)\,\rho_2(\varphi(x))\big]+\frac{d}{dx}\left[p_1(x)\frac{du_\lambda}{dx}\right]. \qquad (9)$$

Таким образом, после применения интегрального преобразования (5) к краевой задаче (1) – (4) получим одномерную краевую задачу:

$$\frac{d}{dx}\left[p_1(x)\frac{du_\lambda}{dx}\right]\big[q_1(x)-\lambda^2\rho_1(x)\big]u_\lambda(x)=F_\lambda(x),\quad a_0<x<a_1, \qquad (10)$$

$$U_j[u_\lambda]=\alpha_{j0}\,\varphi'(a_j)\,\rho_2(\varphi(a_j))\,\mathrm{K}(\varphi(a_j),\lambda)\,\mu(a_j),\ + U_j[u_\lambda]$$

$$F_\lambda(x)=-p_2(\varphi(x))\left[\left\langle\frac{\partial u}{\partial y}\right\rangle\mathrm{K}(\varphi(x),\lambda)-\langle u\rangle\frac{d\mathrm{K}}{dy}\bigg|_{y=\varphi(x)}\right]\rho_1(x)+ \qquad (11)$$

$$+p_1(x)\left\langle\frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle\varphi'(x)\,\mathrm{K}(\varphi(x),\lambda)\,\rho_2(\varphi(x))+$$

$$+\frac{d}{dx}\big[p_1(x)\langle u\rangle\varphi'(x)\,\mathrm{K}(\varphi(x),\lambda)\,\rho_2(\varphi(x))\big]$$

В выражении (11) фигурируют скачки производных функции $u(x,y)$ по переменным x и y. Выразим производные $\partial u/\partial x$ и $\partial u/\partial y$ через производные по касательному и нормальному направлению к кривой $y=\varphi(x)$.

Тогда

$$\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial v}\varphi'(x),\quad \sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x)\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial v}$$

Подставив полученные выражения в (11), учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial s}\langle u\rangle=\left(1+\varphi'(x)^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\langle u\rangle,$$

$$F_\lambda(x)=\chi(x)\Big(\rho_1(x)\,p_2(\varphi(x))+\rho_2(\varphi(x))\,p_1(x)\big(\varphi'(x)^2\big)\Big)\frac{\mathrm{K}(\varphi,\lambda)}{\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}}-$$

$$-\mu'(x)\left[\begin{gathered}\rho_2(\varphi(x))\,p_1(x)-\rho_1(x)\,p_2(\varphi(x))\frac{\varphi(x)}{1+(\varphi'(x))^2}+\\ +\varphi'(x)\,\rho_2(\varphi(x))\,p_1(x)\end{gathered}\right]\mathrm{K}(x,\lambda)-$$

$$-\mu(x)\left[\frac{d}{dx}\Big(\varphi'(x)\,p_1(x)\,\rho_2(\varphi(x))\,\mathrm{K}(\varphi(x,\lambda))-\rho_1(x)\,p_2(\varphi)\frac{d\mathrm{K}}{dy}\bigg|_{y=\varphi(x)}\right]$$

Если известна функция $u_\lambda(x)$ - решение самосопряженной краевой задачи (10), то обращая интегральное преобразование (5),

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{\lambda_n}(x)\frac{\mathrm{K}(y,\lambda_n)}{\|\mathrm{K}(y,\lambda_n)\|^2}$$

получим разрывное решение краевой задачи (1) – (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 982. 392с.
2. Попов Г.Я. Точные решения некоторых задач механики деформированного твёрдого тела. Одесса: «Астропринт», 2013. 421с.
3. Попов Г.Я. Избранные труды: 2 т. Одесса: Полигрдом ВМВ, 2007. 411с.
4. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень Одесса: «Астропринт», 2011. 116с.

Сведения об авторах:

Реут Виктор
К.ф.-м.н., доц., зав. каф. вычислительной математики Одесского национального университета имени И.И. Мечникова
E–mail: reut@onu.edu.ua

Реут Елена
Ст. преп. каф. методов математической физики Одесского национального университета имени И.И. Мечникова