Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

« Асимптотична поведінка розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією »

«Asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations with interaction»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Добров Олег Ігорович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Білозерова М.О.
Рецензент: канд. фіз-мат. наук, доц. Шарай Н.В.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2023 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № _____________

Протокол № ____ від ______________ 2023 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ _________________________

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Останніми сторіччами істотниий інтерес викликають дослідження поведінки розв'язків різноманітних хаотичних систем. Зокрема, увагу привертають моделі поведінки частинок у різноманітних потоках, зокрема стохастичних. Поведінка таких об'єктів описується динамічними системами. Поведінка детермінованої системи, на яку діють всілякі так звані "шуми описуються стохастичними диференціальними рівняннями. У багатьох практичних застосуваннях шумами можуть слугувати дія вітру, турбулентні потоки та інший вплив навколишнього середовища, який добре моделюється броунівським рухом.

При розгляді моделей поведінки частинок у потоці виникають ситуації, коли частинки підчас руху чинять істотний вплив одна на одну, а також змінюють закони руху одна одної. У цих випадках коефіцієнти відповідних стохастичних диференіальних рівнянь залежать від деяких характеристик позиції інших частинок. Такі стохастичні диференціальні рівняння називаються стохастичними диверенціальним рівняннями зі взаємодією та були введені А.А. Дороговцевим [1]. Отже, тема даної роботи є актуальною. Об'єктом дослідження є деякі класи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. Предметом дослідження є асимптотичні властивості розв'язків таких рівнянь. Метою роботи є вивчення поняття стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, детальние дослідження конкретних моделей з використанням таких рівнянь. Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі вводиться поняття стохастичного диференціального рівняння зі взаємодією та розглядаються деякі моделі із застосуванням відповідних рівнянь. У другому розділі доводиться теорема існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. У третьому розділі розглядяаються найпростіші приклади аналізу поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією у залежності від початкові міри. У четвертому розділі розглядається поняття зсув-компактості, яке було введено А.А. Дороговцевим та М.П. Карліковою [3], що є модифікацією поняття стійкості для мірозначних процесів, що відповідають рівнянням зі взаємодією.

РОЗДІЛ 1

СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ. ПРИКЛАДИ. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ.

Нехай $\{w_k; k \geqslant 1\}$ – послідовність незалежних $\mathbb{R}^d$-значних вінеровських процесів, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Процеси $\{w_k; k \geqslant 1\}$ відіграватимуть роль випадкового середовища, в якому рухаються частинки, що утворюють стохастичний потік. Відповідне стохастичне диференціальне рівняння виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t), \mu_t, t)dt + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x(u,t), \mu_t, t)dw_k(t) \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1} \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут μ_0 – певна ймовірнісна міра на $\mathbb{R}^d$, що відіграє роль початкового розподілу маси частинок, $\{x(u,t); t \geqslant 0\}$ – траєкторія частинки, що вийшла з точки $u \in \mathbb{R}^d$, $\mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}$ – образ міри μ_0 при відображенні $x(\cdot,t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, інакше кажучи, розподіл маси частинок у час t. Коефіцієнти a та $\{b_k; k \geqslant 1\}$ набувають значення $\mathbb{R}^d$ та $\mathbb{R}^{d\times d}$ відповідно і залежить від $x(u,t)$, тобто від положення що стартувала з u частинки, а також від μ_t, тобто, від певної характеристики становища інших частинок. Рівняння (1.1) формально, і є як зазвичай, скороченим записом відповідного інтегрального рівняння. Перед тим як перейти до розв'язання (1.1), розглянемо деякі окремі випадки та приклади, а також наведемо іншу форму запису для нескінченної суми стохастичних інтегралів у правій частині (1.1).

Приклад 1.1. Детерміноване рівняння для опису руху системи частинок, зі взаємодією. Покладемо в (1.1) все b_k рівними 0, а коефіцієнт a задамо наступним чином:

$$a(r,\mu,t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(r,v)\mu(dv),$$

де f - обмежена безперервна функція на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Нехай міра μ_0 має вигляд

$$\mu_t \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{u_k},$$

де $p_k > 0, k = 1, ..., N, u_k; k = 1,..., N$ - різні елементи $\mathbb{R}^d$. В цьому випадку для довільного t міра μ_t матиме вигляд

$$\mu_t \sum_{k=1}^{N} p_k \delta_{x(u_k,t)}.$$

Тому (1.1) зараз запишеться так:

$$\begin{cases} dx(u,t) = \sum_{k=1}^{N} p_k f(x(u,t),x(u_k,t))dt \\ x(u,0) = u, u \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.2}$$

Позначимо для $k = 1, ..., N \quad y_k(t) = x(u_k, t)$. Тоді для $y_k, k = 1, ..., N$ виходить звичайна система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} dy_k(t) = \sum_{j=1}^{N} p_i f(y_k(t),y_i(t))dt \\ y_k(0)u_k, k = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.3}$$

У (1.3) функції y_k можна розглядати як траєкторії частинок, що мають масу p_k та взаємодіючих один з одним (функція f описує взаємодію). З фізичної точки зору (1.3) має недоліки. По-перше, у правій частині немає маси p_k k-ої частинки, по-друге, (1.3) включає тільки парні взаємодії між частинками. Остання обставина легко виправити розглядаючи коефіцієнт a більш складного виду

$$a(r,\mu,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \int \underset{\mathbb{R}^d}{\overset{j}{\cdots}} \int f_i(r,v_1,...,v_j)\mu(dv_1)...\mu(dv_j)$$

відповідними обмеженнями на ядра f_j, $j \geqslant 1$ та угодою, що за $j = 0$ доданок має вигляд $f_0(r)$. Після такого ускладнення (1.3) перетвориться на систему звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} dy_k(t) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(y_k(t); y_1(t),...,y_N(t))dt \\ y_k(0)u_k, k = 1, ..., N. \end{cases} \tag{1.4}$$

Припускаючи, що функція задовольняє умові Липшица за сукупністю змінних, можна зробити висновок про існування та єдиність рішення (1.4) (або, в окремому випадку (1.3)). Проте вихідне рівняння (1.1) містить інформацію не тільки про рух важких частинок, а й про переміщення частинок, що стартували з довільної точки простору. Тому для повного вирішення (1.1) у цьому випадку до (1.4) потрібно додати ще наступне завдання Коші

$$\begin{cases} dx(u,t) = \varphi(x(u,t); y_1(t),...,y_N(t))dt \\ x(u,0) = u, u \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{1.5}$$

у якій $y_1, ..., y_N$ вважаються вже відомими. Зазначимо, що через єдиність рішення (1.4) та (1.5) при $u = u_k x(u_k,\cdot)$ збігаються з y_k. Розглянемо числові приклади. Нехай $d = 1$,

$$a(r,\mu,t) = \int_{\mathbb{R}} (r - v)\mu(dv) = r - \int_{\mathbb{R}} v\mu(dv).$$

Такий вибір коефіцієнта відповідає ситуації, коли всі частинки відштовхуються від загального центру мас. Нехай

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1.$$

Поступая вищеописаним чином, розглянемо $y_1(t) = x(-1, t)$ та $y_2(t) = x(1, t)$. Для них зараз виходить наступне завдання Коші

$$\begin{cases} dy_1(t) = (y_1(t) - \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)))dt, \\ dy_2(t) = (y_2(t) - \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)))dt, \\ y_1(0) = -1, y_2(0) = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Розв'язанням цього завдання є функції $y_1(t) = -e^t, y_2(t) = e^t$. Тепер, для довільної початкової умови u траєкторія частки, що стартувала з u, описується рівнянням

$$dx(u,t) = x(u,t)dt.$$

Таким чином, зараз $\forall t \geqslant$: $\forall u \in \mathbb{R} : x(u,t) = ue^t$,

$$\mu_t = \frac{1}{2}\delta_{e^t} + \frac{1}{2}\delta_{-e^t}.$$

Змінюючи початкову міру μ_0 отримаємо інші траєкторії руху частинок. Нехай

$$\mu_0 = p\delta_{-1} + p\delta_1,$$

де $p, q > 0, p + q = 1$.

В цьому випадку замість (1.6) отримуємо

$$\begin{cases} dy_1(t) = (qy_1(t) - qy_2(t))dt, \\ dy_2(t) = (-py_2(t) + py_2(t))dt, \\ y_1(0) = -1, y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Звідси

$$y_1(t) = -2qe^{-t} + (q - p),$$

$$y_2(t) = 2qe^t + (q - p).$$

Отже, $\forall t \geqslant 0 \forall u \in \mathbb{R}$:

$$x(u,t) = (u + q - p)e^t + (p - q).$$

Приклад 1.2. Взаємодіючі частки, що здійснюють броунівський

рух. Нехай у (1.1) коефіцієнт a тотожно дорівнює 0, а коефіцієнти $\{b_k; k \geqslant 1\}$ задані таким чином:

$$b_1(r,\mu,t) = cos(\int_{\mathbb{R}} f(r,u)\mu(du))$$

$$b_2(r,\mu,t) = sin(\int_{\mathbb{R}} f(r,u)\mu(du)), b_k = 0, k > 2.$$

Припустимо, що початковий захід $\mu 0 = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Вступаючи як і в попередньому прикладі, для випадкових процесів $y_1(t) = x(-1,t)$ та $y_2(t) = x(1,t)$ отримаємо завдання Коші для системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} dy_1(t) = cos(\frac{1}{2}f(y_1(t),y_1(t)) + \frac{1}{2}f(y_1(t),y_2(t)))dw_1(t) \\ +sin(\frac{1}{2}f(y_1(t), y_1(t)) + \frac{1}{2}f(y_1(t),y_2(t)))dw_2(t), \\ dy_2(t) = cos(\frac{1}{2}f(y_2(t),y_2(t)) + \frac{1}{2}f(y_2(t),y_1(t)))dw_1(t) \\ +sin(\frac{1}{2}f(y_2(t), y_2(t)) + \frac{1}{2}f(y_2(t),y_1(t)))dw_2(t), \\ y_1(0) = -1, y_2(0) = 1. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Якщо функція f відповідає умові Липшица за сукупністю змінних, то (1.7) має єдине рішення. Тепер рішення вихідного рівняння зводиться до вирішення наступного завдання Коші:

$$\begin{gathered} dx(u,t) = cos(\frac{1}{2}f(x(u,t),y_1(t)) + \frac{1}{2}f(u,t), y_2(t)))dw_1(t) \\ +sin(\frac{1}{2}f(x,t),y_1(t)) + \frac{1}{2}f(x(u,t),y_2(t)))dw_2(t), \\ x(u,0) = u. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Зазначимо такі дві обставини, що стосуються (1.8). По-перше, за наявності f обмеженої похідної x має модифікацію (як випадкове поле, залежить від двох аргументів u і t), що є диффеоморфізм $\mathbb{R}$ на себе при кожному t. Таким чином траєкторії частинок, що стартували з різних точок простору, що не перетинаються. По-друге, при кожному фіксованому і випадковому процес $\{x(u,t), t \geqslant 0\}$ є безперервним мартингалом з характеристикою

$$\langle x(u,\cdot)\rangle_t = t,$$

тобто вінерівським процесом.

Таким чином, у даному прикладі рівняння (1.1) описує систему взаємодіючих частинок (з них дві важкі), що здійснюють броунівський рух кожна.

Перейдемо тепер до іншої форми опису нескінченної суми стохастичних інтегралів, що виникають за формального запису (1.1). Припустимо спочатку, що вінеровські процеси $\{w_k; k \geqslant 1\}$ одновимірні. Розглянемо простір $L_2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$ квадратично інтегрованих у міру Лебега λ_d функцій на $\mathbb{R}^d$. Це речове сепарабельний гільбертовий простір. Нехай $\{e_k; k \geqslant 1\}$ – ортонормований базис у $L_2(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$. Для борелівського $\Delta \subset \mathbb{R}^d \times [0; +\infty)$, що має кінцевий захід Лебега, за теоремою Фубіні для багатьох $t \in [0; +\infty)$ переріз

$$\Delta_t = \{u \in \mathbb{R}^d : (u,t) \in \Delta\}$$

таке, що $\mathbb{I}\Delta_t \in L_2(\mathbb{R}^d$. Розглянемо розкладання $\mathbb{I}\Delta_t$ у базисі $\{e_k; k \geqslant 1\}$:

$$\mathbb{I}\Delta_t = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot e_k.$$

У цьому розкладі $\{f_k; k \geqslant 1\}$ – вимірні функції такі, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_k^2(t)dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}\Delta_t(u)\lambda_d(du)dt =$$

$$\lambda_{d+1}(\Delta) < +\infty.$$

Означення 1.1. Розв'язком задачі Коші (сильним розв'язком), що відповідає заданим коефіцієнтам a і b і початковою мірою μ_0 називається випадкове $\mathbb{R}^d$ -значне поле $x(u,t), u \in \mathbb{R}^d, t \in [0; +\infty)$ таке, що

1) при кожному $t \geqslant 0$ звуження x на інтервал $[0;t] \in \mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_{[0;t]} \otimes \mathcal{F}_t$ вимірним (тут $\mathcal{B}_d$ і $\mathcal{B}_{[0;t]}$ - борелівські σ-алгебри в $\mathbb{R}^d$ і $[0;t]$ відповідно),

2) при фіксованому $u \in \mathbb{R}^d$ з ймовірністю 1 за кожного $t \geqslant 0$ справедливий інтегральний аналог (1.1)
3) з ймовірністю 1 виконано умову Коші $x(u,0) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}^d$

Наступна теорема містить достатні умови для існування та єдиності розв'язку (1.1)

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t),\mu_t,t)dt + \int_{\mathbb{R}^d} b(x(u,t),\mu_t,t,q)W(dt,dq) \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Теорема 1. *Пусть коефіцієнти a і b в (1.9) задовольняють наступну умову Липшиця щодо просторової і мірозначної змінних*

$$\exists C > 0 : \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d, \nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{M} : \forall_t \geqslant 0 :$$

$$||a(u_1,\nu_1,t) - a(u_2,\nu_2,t)||+$$
$$+(\int_{\mathbb{R}^d} ||b(u_1,\nu_1,t,q) - b(u_2,\nu_2,t,q)||^2 dq)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant C(||u_1 - u_2|| + \gamma(\nu_1,\nu_2)).$$

Крім того, нехай функції a і b неперервні за змінними x, μ і t (у нормі простору L_2 на $\mathbb{R}^d$.

Тоді (1.9) має розв'язок, визначений $[0; +\infty)$, який є единим.

Доведення. Скористаємося методом послідовних наближень. Визначимо $x_0(u,t) = u$ для всіх $u \in \mathbb{R}^d, t \geqslant 0$. Відповідно μ_t^0 виявиться тотожно рівної μ_0. Розглянемо тепер рівняння

$$x_1(u,t) = u + \int_0^t a(x_1(u,s),\mu_s^0,s)ds+$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(x_1(u,s),\mu_s^0,s,q)W(ds,dq).$$

Перевіримо, що x_1 має вимірну u,t модифікацію. Для $u_1,u_2\in\mathbb{R}^d$ розглянемо

$$\|x_1(u_1,t)-x_1(u_2,t)\|^2\leqslant$$

$$\leqslant \|u_1-u_2\|^2+3(\int_0^t \|a(x_1(u_1,s),\mu_0,s)-a(x_1(u_2,s),\mu_0,s)\|ds)^2+$$

$$+3\|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(b(x_1(u_1,s),\mu_0,s,q)-b(x_1(u_2,s),\mu_0,s,q))W(ds,dq)\|^2.$$

Отже,

$$M\sup_{[0;T]}\|x_1(u_1,s)-x_1(u_2,s)\|^2\leqslant C_1\|u_1-u_2\|^2. \tag{1.10}$$

Тому x_1 має безперервну за сукупністю змінних модифікацію в силу теореми Колмогорова. Розглянемо тепер $\mu_t^1=\mu_0\circ x_1(\cdot,t)^{-1}, t\geqslant 0$. μ_t^1 – випадковий міра при кожному $t\geqslant 0$. Визначимо тепер x_2 як рішення рівняння

$$x_2(u,t)=u+\int_0^t a(x_2(u,s),\mu_s^1,s)ds+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} b(x_2(u,s),\mu_s^1,s,q)W(ds,dq).$$

Поступаючи аналогічним чином, отримаємо послідовність випадкових процесів $\{x_n,\mu^n;n\geqslant 1\}$ таких, що за кожного $n\geqslant 1$

$$\mu_t^1=\mu_0\circ x_1(\cdot,t)^{-1}, t\geqslant 0,$$

$$dx_{n+1}(u,t)=a(x_{n+1}(u,t),\mu_t^n,t)dt+$$

$$+\int_{\mathbb{R}^d} b(x_{n+1}(u,t),\mu_t^n,t,q)W(ds,dq).$$

Перевіримо коректність такої побудови, тобто. що за кожного $n\geqslant 1 x_n$ виміряємо по сукупності змінних, а також що рівняння для x_{n+1} дозволено єдиним чином. І тому доведемо з допомогою методу математичної індукції таку оцінку. При кожному $n\geqslant 1$

$$M \sup_{[0;T]} ||x_n(u_1,s) - x_n(u_2,s)||^2 \leqslant C_2||u_1 - u_2||^2. \tag{1.11}$$

Припустимо, що це справедливо для деякого n. За припущенням x_n має модифікацію, безперервну за сукупністю змінних із ймовірністю 1. Отже, випадковий мірозначний процес $\{\mu_t^n, t \in [0;T]\}$ є безперервним з ймовірністю 1. Тому коефіцієнти рівняння для x_{n+1} задовольняють умові Ліпшиця у відповідній нормі та вимірні. Отже, x_{n+1} визначено єдиним чином. Тепер справедливість (1.11) виходить стандартно за допомогою леми Гронуолла–Беллмана.

Розглянемо для $n \geqslant 1, t \in [0;T]$

$$M \sup_{[0;t]} ||x_{n+1}(u,s) - x_n(u_2,s)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int_0^t M \sup_{[0;s]} ||x_{n+1}(u) - x_n(u)||^2 ds +$$

$$+C_2 \int_0^t \{M \sup_{[0;s]} ||x_{n+1}(u,s) - x_n(u,s)||^2 + M \sup_{[0;s]} \gamma(\mu^n,\mu^{n-1})^2\} ds$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана

$$M \sup_{[0;t]} ||x_{n+1}(u,s) - x_n(u_2,s)||^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int_0^t M \sup_{[0;s]} \gamma(\mu_\tau^n,\mu_\tau^{n-1})^2 ds.$$

Відмітимо, що

$$\gamma(\mu_\tau^n,\mu_\tau^{n-1}) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(||x_n(u,t) - x_{n-1}(u,t)||)\mu_0(du),$$

де через φ позначено функцію

$$\varphi(r) = \frac{r}{1+r}, r \geqslant 0.$$

Тому

$$M\sup_{[0;t]}\gamma(\mu_s^n,\mu_s^{n-1})^2\leqslant$$

$$\leqslant M\sup_{[0;s]}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)\mu_0(du)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant M\sup_{[0;s]}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)^2\mu_0(du)\leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}M\sup_{[0;s]}\varphi(||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||)^2\mu_0(du)\leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}M\sup_{[0;s]}||x_n(u,t)-x_{n-1}(u,t)||^2\mu_0(du)\leqslant$$

$$\leqslant C_3\int_0^t M\sup_{[0;s]}\gamma(\mu_\tau^{n-1},\mu_\tau^{n-2})^2 ds.$$

Тепер перевірка збіжності x_n та μ^n при $n\to\infty$ до єдиного рішення вихідного рівняння завершується стандартним чином. Теорему доведено. □

Лема 1.2. *Нехай x та $\{y_n; n\geqslant 1\}$ – розв'язання задачі Коші, що відповідають заходам μ_0 та $\{\nu_n; n\geqslant 1\}$. Якщо $\nu^n\to\mu_0, n\to\infty$ у $\mathfrak{M}$, то* $\forall u\in$: $\mathbb{R}^d$

$$M\sup_{[0;T]}-y_n(u,t)||^2\to 0, n\to\infty,$$

$$M\sup_{[0;T]}\gamma(\mu_t,\nu_t^n)\to 0, n\to\infty$$

.

РОЗДІЛ 2

ЗСУВ-КОМПАКТНІСТЬ ВИПАДКОВИХ МІР ТА ЇЇ ЗВЯ'ЗОК З ПОВЕДІНКОЮ ПОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ.

Цей розділ присвячений модифікації поняття стійкості для мірозначних процесів, що відповідають рівнянням із взаємодією. Необхідність у такій модифікації можна побачити, зауваживши, що за умов, що забезпечують стійкість розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь, мірозначне рішення зі зростанням часу стає близьким до випадкової δ-функції, тобто, вся маса зосереджується в одній точці, що випадково рухається у просторі. Для опису менш тривіальної граничної поведінки нам знадобляться нові визначення.

Означення 2.1. Безліч мір$\{\mu_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}\subset\mathfrak{M}_n$ називається зсув-компактним, якщо для кожного про $\alpha\in\mathfrak{A}$ існує вектор $u_\alpha\in\mathbb{R}^d$ такий, що безліч мір $\{\mu_\alpha-u_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}$ компактно в $\mathfrak{M}_n$ (тут $\mu_\alpha-u_\alpha$ – зсув міри μ_α на вектор u_α).

Лема 2.2. *Нехай сімейство мір $\{\mu_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}\subset\mathfrak{M}_n$ та сімейство векторів $\{u_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}\subset\mathbb{R}^d$ такі, що сімейство $\{\mu_\alpha-u_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}$ компактно у $\mathfrak{M}_n$. Припустимо, що для множини векторів $\{v_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}$ справедлива нерівність*

Означення 2.3. Вектор u називається центром ймовірнісної міри μ на $\mathbb{R}^d$, якщо

$$\gamma(\delta_u,\mu)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{||u-v||}{1+||u-v||}u(du)=$$
$$\min_{p\in\mathbb{R}^d}\gamma(\delta_p,\mu).$$

Лема 2.4. *Нехай сімейство $\{\mu_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}$ зсув-компактно $\mathfrak{M}_0$. Тоді сімейство $\{\mu_\alpha;\alpha\in\mathfrak{A}\}$ (c_α – центр міри μ_α) компактно в $\mathfrak{M}_0$.*

Доведення. Розглянемо набір векторів $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$, разом з яким $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ задовольняє означенням 4.1. Тоді

$$\varepsilon(r) = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mu_\alpha(\{u : ||u - u_\alpha|| > r\}) \to 0, r \to \infty.$$

Зазначимо, що, згідно з визначенням центру,

$\forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall r > 0 :$

$$\gamma(\delta_{c_\alpha},\mu_\alpha) \leqslant \frac{r}{r+1}(1 - \varepsilon(r)) + \varepsilon(r).$$

З іншого боку, для довільного такого, що $||v - u_\alpha|| \geqslant a \cdot r$, де $a > 1$ справедливо

$$\gamma(\delta_v,\mu_\alpha) \geqslant \frac{(a-1)r}{1+(a-1)r}(1 - \varepsilon(r)).$$

Отже, вибравши r_1, r_2 та а так, щоб

$$\frac{(a-1)r_2}{1+(a-1)r_2}(1 - \varepsilon(r_2)) > \frac{r_1}{1+r_1}(1 - \epsilon(r_1)) + \varepsilon(r_1),$$

отримаємо, що

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} ||u_\alpha - c_\alpha|| \leqslant a \cdot r_2.$$

Звідси з урахуванням леми 4.2 отримуємо необхідне затвердження. □

Наступний приклад показує, що поняття зрушення-компактності корисне при обговоренні рівнянь із взаємодією.

Приклад 2.1. Нехай $d = 1$. Розглянемо рівняння

$$\begin{cases} dx(u,t) = \pi dt - \int_{\mathbb{R}} \operatorname{arctg}(x(u,t) - v)\mu_t(dv)dt \\ x(u,0) = u, \mu_t = \mu \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases}$$

Для довільної міри $\mu \in \mathfrak{M}$, це рівняння має єдине рішення. Очевидно, що

$$\forall u \in \mathbb{R} : \quad x(u,t) \to +\infty, t \to +\infty.$$

Тому сімейство мір $\{\mu_t; t \geqslant 0\}$ не може бути передкомпактним в $\mathfrak{M}$. Зауважимо, однак, що для довільних $u_1 < u_2$

$$d(x(u_1,t)-x(u_2,t))^2 = 2(x(u_1,t)-$$

$$-x(u_2,t))\int \mathbb{R}[\operatorname{arctg}(x(u_2,t)-v)-\operatorname{arctg}(x(u_1,t)-v)]\mu_0(dv)dt \leqslant 0.$$

Отже, відстань між $x(u_1,t)$ та $x(u_2,t)$ з часом не зростає. Покладемо для кожного $u \in \mathbb{R}$

$$f(u) = \lim_{t\to+\infty}(x(u,t)-x(0,t)).$$

Тоді заходи $\mu_t - x(0,t)$ слабо сходяться при $t \to +\infty$ до міри

$$\nu = \mu_0 \circ f^{-1}.$$

Розглянемо тепер випадкові міри.

Означення 2.5. Безліч випадкових мір $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}_n$ називається зсув-компактним, якщо для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$ випадковий вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ такий, що сімейство $\{\mu_\alpha - u_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо компактне у $\mathfrak{M}_n$

Оскільки мірозначні процеси, пов'язані з рівняннями із взаємодією, влаштовані як образи мір при випадкових відображеннях, то корисною буде наступна лема.

Лема 2.6. *Припустимо, що сімейство випадкових мір $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$, побудовано так*

$$\mu_\alpha = \mu_0 \circ x_\alpha^{-1}, \alpha \in \mathfrak{A}$$

а випадкові відображення x_α задовольняють умові

$\exists A > 0 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall u, \quad v \in \mathbb{R}^d :$

$$M||x_\alpha(u)-x_\alpha(v)||^{n+1} \geqslant A||u-v||^{n+1}.$$

Тоді для $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{n+1}$ сімейство $\{\mu_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ зсув-компактно в $\mathfrak{M}_n$.

Доведення. За умовою

$$M\int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u)-x_\alpha(0)||\mu 0(du) \leqslant$$

$$\leqslant A^{\frac{1}{n+1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} ||u||^{n+1} \mu_0(du) \right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Тому майже напевно визначено наступний інтеграл

$$m_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} x_\alpha(u) \mu_0(du).$$

Для довільного L>0

$$P\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - m_\alpha||^{n+1} \mu_0(du) > L \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{L} M \int_{\mathbb{R}^d} \int ||x_\alpha(u) - x_\alpha(v)||^{n+1} \mu_0(du) \mu_0(dv) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{L} \int_{\mathbb{R}^d} \int ||u - v||^{n+1} \mu_0(du) \mu_0(dv).$$

Зазначимо, що останній інтеграл є кінцевим. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $L > 0$ таке, що

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} P\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} ||u||^{n+1} (\mu_\alpha - m_\alpha)(du) > L \right\} < \varepsilon.$$

Покладемо

$$K_\varepsilon = \{\nu \in \mathfrak{M}_n : \int_{\mathbb{R}^d} ||u||^n \mathbb{I}_{\{||u||>c\}} \nu(du) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L_\varepsilon}{c} \quad \forall c > 0\}.$$

K_ε компакт в $\mathfrak{M}_n$.При цьому для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$

$$P\{\mu_\alpha - m_\alpha \in K_\varepsilon\} = P\{\int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - m_\alpha||^n \cdot$$

$$\cdot \mathbb{I}_{\{||x_\alpha(u) - m_\alpha|| > c\}} \mu_0(du) \leqslant \frac{L_\varepsilon}{c} \quad \forall c >\} \geqslant$$

$$\geqslant P\{\int_{\mathbb{R}^d} ||x_\alpha(u) - m_\alpha||^{n+1} \mu_0(du) \leqslant L_\varepsilon\} > 1 - \varepsilon.$$

Отже, сімейство розподілів $\mu_\alpha - m_\alpha ; \alpha \in A$ щільно, а тим самим, відносно компактно $\mathfrak{M}_n$. Лемма доведена. $\square$

Наступна теорема є прикладом використання наведеного вище твердження для рівнянь із взаємодією. Розглянемо рівняння

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x(u,t)-v)\mu_t(dv)dt + b(x(u,t),\mu_t)dw(t),$$

$$\mu_t = \mu + 0 \circ x(\cdot,t)^{-1}, t \geqslant 0, x(u,0) = u, u \in \mathbb{R}^d,$$

з одномірним, для простоти, винеровским процесом w.

Теорема 2. *Припустимо, що* $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{2n+2}$, φ *задовольняє умові* $(u - v, \varphi(u) - \varphi(v)) \leqslant -\alpha||u-v||^2, u, v \in \mathbb{R}^d$, b *задовольняє умові Липшица по* x *і* μ *з постійною* B, *та*

$$\alpha - \frac{1}{2}B^2(2n+1) \geqslant 0.$$

Тоді безліч $\{\mu_t; t \geqslant 0\}$ *зсув-компактно в* $\mathfrak{M}_{2n}$.

Доведення. Для довільних $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^d$

$$M||x(u_1,t) - x(u_2,t)||^{2n+2} = ||u_1 - u_2||^{2n+2} +$$

$$+ \int_0^t (2n+2)||x(u_1,s) - x(u_2,s)||^{2n} \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x(u_1,s)-v) -$$

$$-\varphi(x(u_2,s)-v), x(u_1,s) - x(u_2,s))\mu_s(dv)ds +$$

$$+2(n+1)n \int_0^t ||x(u_1,s) - x(u_2,s)||^{2n-2}(x(u_1,s) - x(u_2,s)$$

$$b(x(u_1,s),\mu_s) - b(x(u_2,s),\mu_s))^2 ds +$$

$$+(n+1)\int_0^t ||x(u_1,s) - x(u_2,s)||^{2n} ||b(x(u_1,s),\mu_s) - b(x(u_2,s),\mu_s)||^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant ||u_1 - u_2||^{2n+2} + (-\alpha(2n+2) + B^2 n(n+1)) \int_0^t M||x(u_1,s) - x(u_2,s)||^{2n+2} ds \leqslant$$

$$\leqslant ||u_1 - u_2||^{2n+2}.$$

Тепер затвердження теореми випливає з леми 4.6. $\square$

РОЗДІЛ 3

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ВЗАЄМОДІЄЮ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ДРЕЙФОВОЇ ЧАСТИНИ

Розглянемо одновимірне стохастичне диференціальне рівняння зі взаємодією

$$\begin{cases} dx(u,t) = \sigma(x(u,t), \mu_t)dw(t) \\ x(u,0) = u, u \in \mathbb{R} \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}, t \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Такі рівняння та керовані ними стохастичні потоки були введені А.А. Дороговцевим [1]. Виявляється, що властивості розв'язків таких рівнянь відрізняються від відповідних властивостей розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь. Тому представляє інтерес порівняння їх асимптотичної поведінки з поведінкою дифузійних процесів. У роботі [7] отримано аналог закону повторного логарифма для траєкторій (3.1).

Нехай $\mathfrak{M}_1$ — простір усіх імовірнісних мір на $\mathbb{R}$, що мають скінченний перший момент із Метрика Вассерштейна. Розглянемо рівняння (3.1) з $\sigma : \mathbb{R} \times \mathfrak{M}_1 \to R$, що задовольняє глобальну умову Ліпшиця, і $\mu_0 \in \mathfrak{M}_1$. За таких умов існує єдиний сильний розв'язок (3.1) такий, що x — потік гомеоморфізмів. Наступний результат показує, що для рівняння без дрейфу (3.1) траєкторії різних частинок залишаються недалеко одна від одної на нескінченності.

Лема 3.1. *Для всіх $u, v \in \mathbb{R}$ існує майже всюди*

$$\lim_{t\to\infty}(x(u,t) - x(v,t)).$$

Доведення. Зафіксуйте $u > v \in \mathbb{R}$. Тоді за теоремою 18.4 з [19],

$$x(u,t) - x(v,t) = u - v + \int_0^t (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))dw(s) =$$

$$= u - v + w_{u,v}\left(\int_0^t (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds\right)$$

для деякого вінерського процесу $w_{u,v}$. Оскільки $x(u,t) - x(v,t) > 0$ для всіх $t \geqslant 0$ і

$$\int_0^t (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds$$

є безперервним випадковим процесом,

$$\int_0^\infty (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds \leqslant \tau_{u,v} < +\infty.$$

Тут $\tau_{u,v}$ – це час першого удару $-(u-v)$ за допомогою $w_{u,v}$. Отже, з ймовірністю 1

$$\lim_{t\to\infty}(x(u,t) - x(v,t)) = w_{u,v}\left(\int_0^\infty (\sigma(x(u,s),\mu_s) - \sigma(x(v,s),\mu_s))^2 ds\right).$$

Доведення завершено. □

Звичайно, різниця $x(u,t) - x(v,t)$ є мартингалом, який не змінює знак. Отже, за загальною теорією він має межу на нескінченності. Але ми представляємо пряме доведення, оскільки нам потрібна точна формула для характеристик $x(u,t) - x(v,t)$. Наслідком цієї леми є те, що закон повторного логарифма виконується (або ні) для всіх $u \in \mathbb{R}$ одночасно. Дійсно, оскільки $x(u,\cdot) - x(v,\cdot)$ обмежена,

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{x(u,t)}{\sqrt{2t\ln t}} - \frac{x(v,t)}{\sqrt{2t\ln t}}\right) = 0.$$

Отже, ми можемо отримати закон повторного логарифма лише для деякого фіксованого u, наприклад, $u = 0$. Позначимо $z(u,t) = x(u,t) - x(0,t)$. Нам потрібен наступний результат.

Лема 3.2. *Нехай $\beta > 0$ — додатне число. Тоді*

$$\overline{\lim}_{|u|\to\infty} \frac{\sup_{t\geqslant 0}|z(u,t)|}{1+|u|^{1+\beta}} < \infty. \tag{3.2}$$

Доведення. Розглянемо тільки $u > 0$, доведення для $u < 0$ бути схожим. Розглянемо деякі послідовність $\uparrow +\infty$. Ми маємо

$$z(u_n,t) = u_n + w_{u_n,0}\left(\int^{t_0} \sigma^2(x(u,s),\mu_s)ds\right).$$

Отже,

$$P\{\sup_{t\geqslant 0} z(u_n,t) > u_n^{1+\beta}\} \leqslant P\{\sup_{0\geqslant s\geqslant \tau_{u_n,0}} w_{u_n,0}(s) > u_n^{1+\beta} - u_n\} =$$

$$= \frac{u_n}{u_n^{1+\beta}} = u_n^{-\beta}.$$

Поставимо $u_n = n^{2/\beta}$. Тоді маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\sup_{t\geqslant 0} z(u_n,t) > u_n^{1+\beta}\} < +\infty,$$

і за лемою Бореля–Кантеллі з ймовірністю 1 існує $N \in \mathbb{N}$ такий, що

$$\sup_{t\geqslant 0} z(u_n,t) > u_n^{1+\beta} \quad \forall n \geqslant N.$$

Оскільки x є гомеоморфізмом, для $u > u_N, u \in [u_n, u_{n+1}]$,

$$\sup_{t\geqslant 0} z(u,t) < \sup_{t\geqslant 0} z(u_{n+},t) < 2^{\frac{2}{\beta}+2} u^{1+\beta},$$

тому виконується (3.2) Доведення завершено. $\square$

Розглянемо тепер рівняння (3.1) з $\sigma(u,\mu) = \int_{\mathbb{R}} b(u-v)\mu(dv)$ для деякої дійсної функції b. Потім рівння (3.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}} b(x(u,t) - x(v,t))\mu_0(dv)dw(t) \\ x(u,0) = u. \end{cases} \tag{3.3}$$

Тепер взаємодія частинок у випадковому середовищі залежить від відстаней між ними їх. Рівняння (3.3) можна розглядати як стохастичний аналог моделі Курамото для взаємодіючі осцилятори.

Теорема 3. *Нехай коефіцієнти* (3.3) *задовольняють наступним умовам:*

1) b *— глобальний Ліпшиц з деякою константою* L

2) $\sup_{(-\infty;0]} b < +\infty; \inf_{[0;\infty)} b > -\infty,$

3) $\mu_0 \in \mathfrak{M}_{1+\alpha}$ *для деяких* $\alpha > 0$.

Потім

$$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} \in D\right\} = P\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} \in -D\right\} = 1,$$

де $D = \{|u| : u \in [\inf_{[0;+\infty)} b; \sup_{(-\infty;0]} b]\}$.

Доведення. Для кожного $u \in \mathbb{R}$ позначимо

$$\zeta_u = \lim_{t\to\infty} z(u,t).$$

Для кожного $u \in \mathbb{R}$ ця межа існує майже скрізь. Тепер нехай S — (зліченна) множина всі раціональні числа і всі атоми міри μ_0. Тоді, з ймовірністю 1,

$$z(u,t) \to \zeta_u, t \to \infty \quad \forall u \in S.$$

хай

$$\xi_u = \begin{cases} \zeta_u, u \in S \\ \lim_{S\ni v\to u-\zeta_v}, u \notin S \end{cases}$$

(межа існує, оскільки ζ_v не спадає). ξ_u також не спадна, і вона неперервна за винятком зліченної кількості стрибків. отже,

$$\mu_0\{u : \xi_u \neq \zeta_u\} = 0,$$

і

$$\mu_0\{u : z(u,t) \to \xi_u, t \to \infty\} = 1.$$

Щодо доведення леми 5.1, то маємо

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} (b(z(u,s) - z(v,s)) - b(-z(v,s)))\mu_0(dv) \right)^2 ds < \infty. \tag{3.4}$$

Застосовуючи лему 5.2 з $\beta = \alpha$, маємо для всіх $s \geqslant 0$

$$|b(z(u,s) - z(v,s)) - b(-z(v,s))| \leqslant L|z(u,s)| \leqslant LC(\omega)(1 + |u|^{1+\alpha}).$$

Таким чином, за теоремою Лебега,

$$\int_{\mathbb{R}} (b(z(u,s) - z(v,s)) - b(-z(v,s)))\mu_0(dv) \to \tag{3.5}$$
$$\to \int_{\mathbb{R}} (\xi_u - \xi_v) - b(-\xi_v))\mu_0, \quad s \to \infty(dv)$$

З (3.4) і (3.5) маємо, з імовірністю 1,

$$\int_{\mathbb{R}} (\xi_u - \xi_v)\mu_0(dv) = \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv), u \in \mathbb{R}.$$

Тепер нехай $\uparrow +\infty, n \to \infty$. Застосування леми Фату до функцій $b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mathbb{I}_{\{v<u_n\}}$ (які обмежені знизу константою за умовою 2) теореми), маємо

$$\int_{\mathbb{R}} \underline{\lim}_{n\to\infty}(b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mathbb{I}_{\{v<u_n\}})\mu_0(dv) \leqslant$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{u_n} (b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mu_0(dv) \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) -$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_{u_n}^{+\infty} (b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mu_0(dv) - \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv)$$

(ми використано лему 5.2 та умову $mu_0 \in M_{1+\alpha}$).

Тепер ми маємо

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(b(\xi_{u_n} - \xi_v)\mathbb{I}_{\{v<u_n\}} \geqslant \inf_{z\geqslant 0} b(z),$$

і, таким чином,

$$\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \geqslant \inf_{[0;+\infty)} b. \tag{3.6}$$

Аналогічно,

$$\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \leqslant \sup_{(-\infty;0]} b. \tag{3.7}$$

Тепер, повертаючись до процесу x, ми маємо для деякого вінерівського процесу w_0,

$$x(0,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv)dw(s) =$$

$$w_0 = \left(\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv) \right)^2 ds \right)$$

Позначимо

$$T(t) = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv) \right)^2 ds.$$

Потім

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} b(-z(v,s))\mu_0(dv) \right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \right)^2.$$

Якщо $T(t) \to \infty, t \to \infty$,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{x(0,t)}{\sqrt{2t \ln t}} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{w_0(T(t))}{\sqrt{2T(t)\ln T(t)}} \cdot \sqrt{\lim_{t\to\infty} \frac{T(t)}{t}} =$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \right|.$$

інакше,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{x(0,t)}{\sqrt{2t \ln t}} = \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{w_0(T(\infty))}{\sqrt{2t\ln t}} = 0 = \left| \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \right|.$$

Аналогічно,

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{x(0,t)}{\sqrt{2t \ln t}} = -\left| \int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) \right|.$$

Разом з (3.6) та (3.7) це доводить теорему. □

Наслідок. За умов теореми, якщо b таке, що

$$u(b(u)-b(0)) \geqslant 0(\leqslant 0), u \in \mathbb{R},$$

потім

$$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = |b(0)|\right\} = P\left\{\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = -|b(0)|\right\} = 1.$$

Хай

Приклад 3.1.

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_{\frac{\pi}{2}},$$

$$b(u) = 1 + \cos u + \sin u \mathbb{I}_{\{u\geqslant 0\}}.$$

Потім

$$dx(0,t) = (\frac{1}{2}b(0) + \frac{1}{2}b(x(0,t) - x(\frac{\pi}{2},t)))dw(t)$$

$$dx(\frac{\pi}{2},t) = (\frac{1}{2}b(0) + \frac{1}{2}b(x(\frac{\pi}{2},t) - x(0,t)))dw(t)$$

Тепер

$$dz(\frac{\pi}{2},t) = \frac{1}{2}\sin z(\frac{\pi}{2},t)dw(t).$$

Межа

$$\xi_{\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to\infty} z(\frac{\pi}{2},t),$$

приймає тільки значення 0 і π. Завдяки симетрії,

$$P(\xi_{\frac{\pi}{2}} = 0) = P(\xi_{\frac{\pi}{2}} = \pi) = \frac{1}{2}$$

$$P\left\{\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) = 2\right\} = P\left\{\int_{\mathbb{R}} b(-\xi_v)\mu_0(dv) = 1\right\} = \frac{1}{2}.$$

Отже, маємо

$$P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = 2\right\} = P\left\{\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{x(0,t)}{\sqrt{2t\ln t}} = 1\right\} = \frac{1}{2}.$$

РОЗДІЛ 4

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВЗАЄМОДІЄЮ.

Інтерес до стохастичних диференціальних рівнянь із взаємодією викликаний, зокрема, явищами переривчастості. Коротко переривчастість - це контраст між реалізацією та середньою характеристикою швидкості або щільності турбулентний потік. Однією з перших статей, присвячених цьому феномену,[22] стаття Зельдовича і Молчанова. Одним із важливих випадків переривчастості є поведінка пасивного індикатора, що переноситься випадковим полем [23]. А стохастичне диференціальне рівняння для випадкового потоку F на основі броунівського руху U є наступним

$$\begin{cases} F_{st}(x) = x + \int\limits_s^t U\left(F_{sr}, dr\right), \quad t \geq s, \\ \mu_t(D) = \mu_0\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ F_{0t}(x) \in D\}\right), \ D \subseteq \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

$x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}_+$, U є Гаусовим випадковим векторним полем $\mathbb{R}^d$,

$$EU^i(x,t) = \int\limits_0^t u^i(x,r)dr, \qquad u^i(x,t) \in \mathbb{R}, \quad i = 1,...,d,$$

$$Cov\left(U^i(x,s), U^j(y,t)\right) = a^{ij}(x,y)\min\{s,t\}, i,j = 1,...,d; \ x,y \in \mathbb{R}^d,$$

μ_0 це деяка кінцева міра, яка характеризує розподіл маси в момент часу 0. Припустимо, що

$$|u(x,t)| \leq K_1(1+|x|), \quad |u(x,t)-u(y,t)| \leq K_2|x-y|, \quad |a^{ij}(x,y)| \leq K_3(1+|x|)(1+|y|),$$

$$|a^{ij}(x,y) - a^{ij}(x',y) - a^{ij}(x,y') + a^{ij}(x',y')| \leq K_4|x-x'||y-y'|$$

for all $x,x',y,y' \in \mathbb{R}^d$ and $t \in \mathbb{R}^+$, де K_1, K_2, K_3, K_4 є скінченними константами. Тоді за теоремою 4.2.5 з монографії [20] існує потік $F = \{F_{st}; \ 0 \leq$

$s \le t < \infty\}$ гомеоморфізмів задовольняє (4.1), таке, що відображення $(x,t) \to F_t(x)$ is безперервний майже напевно і $F_{t_1 t_2},...,F_{t_{n-1} t_n}$ незалежні для всіх $t_1 \le t_2, \le ... \le t_n$. Через останній висновок F називається броунівським потоком.

Клас задач для такого рівняння (див., наприклад, [9]-[12],[17], [18], [23]-[26]) є дослідження переходу маси в ізотропних броунівських потоках. Броунівський потік F на основі броунівського руху U з дрейфом u і коваріація a є ізотропним тоді і тільки тоді, коли

$$u \equiv 0 \quad a(x,y) = b(x-y); \quad x,y \in R^d,$$

де b такий ізотропний коваріаційний тензор, що $O^T b(Oz)O = b(z)$ для кожної ортогональної матриці O і кожного $z \in \mathbb{R}^d$. Поведінка відстані між частинками в такому потоці, що починається з двох різних точок, була отримана в [9].

Концентрацію маси та її поширення можна описати в термінах центроїда $C_t = (C_t^i)$ і дисперсійна матриця $D_t = (D_t^{ij})$ які визначаються

$$C_t^i = \frac{1}{\mu_0(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} x^i \mu_t(dx),$$

$$D_t^{ij} = \frac{1}{\mu_0(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (x^i - C_t^i)(x^j - C_t^j)\mu_t(dx).$$

Для ізотрипних броунівських потоків гранична поведінка на нескінченності $Cov(C_t^i,C_t^j)$, D_t^{ij}, $Var(C_t)$ можна знайти в [25, 26].

Корисно вивчити граничну поведінку μ_t на нескінченності, щоб описати еволюцію розподілу маси в броунівському потоці. У теоремах 4.3.9 і 4.3.10 від [20] отримуємо, що у випадку, коли матриця $a(x,x)$ є строго додатно визначеною і одноточковий рух під F має інваріантний розподіл π з $\pi(\mathbb{R}^d) = 1$ наступне граничне співвідношення має місце для кожної борелівської підмножини $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^d$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mu_s(R)ds = \pi(R) \quad \text{almost surely}$$

і у випадку, коли одноточковий рух не має скінченної інваріантної міри

$$\lim_{t\to\infty} E\mu_t(R) = 0.$$

Також корисно розглянути процес $M_t f = \int f(x)\mu_t(dx)$, $t \geq 0$ для різних f. Вираз для спільної квадратичної варіації $M_t f$ та $M_t g$ було описано в [23]. У випадку, коли μ_0 має компактний носій і $a(x,x)$ рівномірно еліптичний з обмеженими другими частковими похідними, у статті [24] було доведено, що μ_t має щільність $m_t \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^d \times (0,\infty)\right)$. Рівняння адвекції-дифузії для m_t також було отримано в тій же статті.

Частинки можуть рухатися і водночас взаємодіяти одна з одною. У цьому випадку коефіцієнти відповідного стохастичного диференціального рівняння (СДР) залежать від деякої характеристики положення інших частинок. Наступне стохастичне диференціальне рівняння із взаємодією описує таку ситуацію [13]

$$\begin{cases} dx(u,t) = a(x(u,t),\mu_t,t)dt + \int\limits_{R^d} b(x(u,t),\mu_t, t, q)W(dt,dq) \\ x(u,0) = u,\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тут W є броунівським листом, μ_0 є ймовірнісна міра, яка відіграє роль розподілу маси частинок, $x(u,\cdot)$ є траєкторія частинки, що вилетіла з точки u в нульовий момент часу, μ_t характеризують розподіл маси частинки в момент часу t.

Означення 4.0.1. Випадковий $\mathbb{R}^d$-значний $x(u,t)$, $u \in R^d$, $t \in [0,+\infty)$ називається (сильним) розв'язком рівняння (4.2) відповідно до коефіцієнтів a, b і початкової міри μ_0, якщо виконуються такі умови:

- для всіх $t \geq 0$ обмеження x на інтервал $[0;t]$ дорівнює $\mathcal{B}_d \bigotimes \mathcal{B}_{[0,t]} \bigotimes \mathcal{F}_t$-вимірна, де $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W(s,\Delta)\right)$, $\Delta \in \mathcal{B}_d$, $s \leq t$;
- для фіксованого $u \in \mathbb{R}^d$ для всіх $t \geq 0$ інтегральна форма (4.2) має місце з імовірністю 1;
- $x(u,0) = u$ з імовірністю 1 для всіх $u \in \mathbb{R}^d$.

У монографії [15] отримано умови існування та єдиності розв'язків рівняння (4.2), встановлено властивості розв'язків.

Граничну поведінку розв'язків СДР із взаємодією в одновимірному випадку досліджено в [21]. Метою статті є дослідження двовимірного випадку.

Таким чином, основним об'єктом дослідження в роботі є двовимірне стохастичне диференціальне рівняння (СДР) із взаємодією

$$\begin{cases} dx(u,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x(u,t) - v)\mu_t(dv)dt + b(x(u,t),\mu_t)dw(t) \\ x(u,0) = u, \\ \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot,t)^{-1}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Існування а. с. ненульової межі, коли t прагне до нескінченності функції, яка характеризує відстань між $x(u,t)$ і $x(v,t)$ для всіх $u,v \in \mathbb{R}^2$, доведено. Також отримано аналог нерівності трикутника для граничного відображення.

Нехай $\mathfrak{M}_2$ — простір усіх ймовірнісних мір на $\mathbb{R}^2$, норма якого має кінцевий другий момент. Для $\mu,\nu \in \mathfrak{M}_2$ відстань Вассерштейна $\gamma_2(\mu,\nu)$ [14] визначається формулою

$$\gamma_2(\mu,\nu) = \sqrt{\inf_{Q \in C(\mu,\nu)} \int\int\limits_{\mathbb{R}^2} ||u - v||^2 Q(du,dv)},$$

де $C(\mu,\nu)$ — множина всіх ймовірнісних мір на $\mathbb{R}^2$, які мають μ і ν як граничні проекції.

Розглянемо систему (4.3) з $\mu_0 \in \mathfrak{M}_2$,

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

де w_k — одновимірні незалежні вінерівські процеси,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

$b_k : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{M}_2 \to \mathbb{R}$ $(k = 1,2)$ задовольняє глобальній умові Ліпшиця і для деяких $\alpha_1, \alpha_2, B_1, B_2 > 0$ та для всіх $u, v \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, $\mu_t \in \mathfrak{M}_2$

$$-\alpha_1 \|u - v\|^2 \leq (u - v, \varphi(u) - \varphi(v)) \leq -\alpha_2 \|u - v\|^2; \tag{4.4}$$

$$B_1 \|u-v\|^2 \leq (u-v, b(u,\mu_t) - b(v,\mu_t)); \quad \|b(u,\mu_t) - b(v,\mu_t)\| \leq B_2 \|u-v\|; \tag{4.5}$$

де

$$\alpha_k - B_j^2 \geq 0 \ \ (k,j = 1,2). \tag{4.6}$$

Тоді згідно з теоремами 2.1.1 і 2.1.2 з [15] існує єдиний сильний розв'язок (4.3) такий, що x є потоком гомеоморфізмів. Крім того, ми маємо від (4.3) наступне представлення

$$\begin{gathered} ||x(u,t) - x(v,t)|| = ||u - v|| + \int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s), x(u,s), \mu_s\right) ds + \\ + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_0^t P_k\left(x(v,s), x(u,s), \mu_s\right) dw_k(s), \end{gathered} \tag{4.7}$$

де

$$\Phi\left(r, q, \mu_s\right) = \frac{1}{||q - r||} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(q - r, \varphi(q - v) - \varphi(r - v)\right) \mu_s(dv) +$$

$$+ \frac{||b(q,\mu_s) - b(r,\mu_s)||^2}{2||q - r||} - \frac{\left(q - r, b(q,\mu_s) - b(r,\mu_s)\right)^2}{2||q - r||^3},$$

$$P_k(r,q,\mu_s) = \frac{(q_k - r_k)(b_k(q,\mu_s) - b_k(r,\mu_s))}{||q - r||}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, k = 1,2.$$

Завдяки лемі 1 з [21] отримуємо, що мартингальна частина в рівностях типу (4.7) може мати межу.

Наступний результат також характеризує відстань між траєкторіями різних частинок на нескінченності

Теорема 4.1. *Для всіх* $u,v \in \mathbb{R}^2$ *існує*

$$\lim_{t\to\infty}\left(||x(u,t)-x(v,t)|| - \int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds\right) \tag{4.8}$$

Доведення. На початку знайдемо квадратичну варіацію мартингала

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^t P_k\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)dw_k(s).$$

Якщо поставити

$$I_k(t) = \int\limits_0^t P_k\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)dw_k(s), \quad k \in \{1,2\},$$

то маємо від взаємної незалежності о w_1 and w_2

$$\langle I_1(t)+I_2(t)\rangle_t = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_0^t P_k^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds.$$

Отже, за теоремою 18.4 від [19]

$$I_1(t)+I_2(t) = w_{u,v}\left(\int\limits_0^t\left(P_1^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)+P_2^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)\right)ds\right), \tag{4.9}$$

де $w_{u,v}$ — деякий вінерівський процес. За умовами (4.4) and (4.5) маємо для всіх $t \geq 0$ наступну нерівність

$$\int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds \leq \left(-\alpha_2 + \frac{1}{2}\left(B_2^2 - B_1^2\right)\right)\int\limits_0^t ||x(u,s)-x(v,s)||ds; \tag{4.10}$$

Використовуючи нерівність Коші-Шварца, за (4.5) отримуємо нерівності

$$B_2\|u-v\|^2 \geq |(u-v,b(u,\mu_t)-b(v,\mu_t))|; \quad \|b(u,\mu_t)-b(v,\mu_t)\| \geq B_1\|u-v\|.$$

З цих нерівностей і (4.5) випливає, що для всіх $t \geq 0$

$$\int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right) ds \geq \left(-\alpha_1 + \frac{1}{2}\left(B_1^2 - B_2^2\right)\right) \int\limits_0^t ||x(u,s) - x(v,s)|| ds. \tag{4.11}$$

Оскільки константи $\alpha_1,\alpha_2, B_1, B_2$ задовольняють умову (4.6), маємо, що

$$-\alpha_k + \frac{1}{2}\left(B_2^2 - B_1^2\right) < 0, \quad k = 1,2$$

а потім за (4.10) і (4.11) наступна нерівність має місце для всіх $t \geq 0$

$$||x(u,t) - x(v,t)|| - \int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right) ds \geq 0. \tag{4.12}$$

Функції $x(u,\cdot)$ і $x(v,\cdot)$ неперервні, і для $u \neq v$ ми маємо, що $||x(u,t) - x(v,t)) > 0||$ для малих t. Отже, для $t > 0$, $u,v \in \mathbb{R}^2$, $u \neq v$, $\int\limits_0^t ||x(u,s) - x(v,s)|| ds > 0$ і враховуючи (4.10), (4.11) та (4.12) маємо, що для всіх $t \geq 0$

$$||x(u,t) - x(v,t)|| - \int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right) ds > 0. \tag{4.13}$$

Тоді через (4.9) ми маємо цю рівність

$$||x(u,t) - x(v,t)|| - \int\limits_0^t \Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right) ds = ||u - v|| + I_1(t) + I_2(t) =$$

$$= ||u - v|| + w_{u,v}\left(\int\limits_0^t \left(P_1^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right) + P_2^2\left(x(0,s),x(u,s),\mu_s\right)\right) ds\right),$$

і наступна нерівність

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(P_1^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right) + P_2^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)\right) ds \leq \tau_{u,v} < +\infty, \tag{4.14}$$

де $\tau_{u,v}$ — час першого удару $||u-v||$ $w_{u,v}$. Отже, з ймовірністю 1 справедлива наступна рівність

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty}\left(||x(u,t)-x(v,t)||-\int\limits_0^t\Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds\right)=||u-v||+\\+w_{u,v}\left(\int\limits_0^{+\infty}\left(P_1^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)+P_2^2\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)\right)ds\right).\end{gathered}\tag{4.15}$$

Лему доведено. □

Лема 4.0.1. *Для усіх $u,v\in\mathbb{R}^2$, $u\neq v$*

$$\lim_{t\to\infty}\left(||x(u,t)-x(v,t)||-\int\limits_0^t\Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds\right)>0\tag{4.16}$$

Доведення. Згідно з доказом леми 1, ми маємо, що для всіх $u,v\in\mathbb{R}^2$, $u\neq v$

$$\lim_{t\to\infty}\left(||x(u,t)-x(v,t)||-\int\limits_0^t\Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds\right)\geq 0\quad a.e.\tag{4.17}$$

Припустімо тепер, що існує суперечність (4.16), для деякого $u,v\in\mathbb{R}^2$, $u\neq v$ існує якийсь набір $A\in\mathfrak{F}$, $P(A)>0$ такий як

$$\forall\omega\in A:\ \lim_{t\to\infty}\left(||x(u,t)-x(v,t)||-\int\limits_0^t\Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds\right)=0.\tag{4.18}$$

By (4.10), (4.11) і (4.6) обидва члени у наведеній вище межі є невід'ємними, тому з (4.18) випливає, що

$$\forall\omega\in A:\ \lim_{t\to\infty}||x(u,t)-x(v,t)||=0\text{ and }\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t\Phi\left(x(v,s),x(u,s),\mu_s\right)ds=0.\tag{4.19}$$

Але тоді, з другої рівності (4.19), (4.10) and (4.11), we have, that

$$\forall\omega\in A:\ \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t||x(u,s)-x(v,s)||ds=0.$$

Тут маємо протиріччя, оскільки $u \neq v$, $x(u{,}0) = u$ і $x(v{,}0) = v$. Лему доведено. □

Тепер розглянемо функцію

$$F(u{,}v) = \lim_{t\to\infty}\left(||x(u{,}t) - x(v{,}t)|| - \int\limits_0^t \Phi\left(x(v{,}s){,}x(u{,}s){,}\mu_s\right) ds\right). \tag{4.20}$$

З леми 2 випливає, що для всіх $u{,}v \in \mathbb{R}^2$ $u \neq v$

$$F(u{,}v) > 0.$$

Наступний результат дає нам аналог нерівності трикутника.

Лема 4.0.2. *Для усіх* $u_1{,}u_2{,}u_3 \in \mathbb{R}^2$

$$F(u_1{,}u_2) + F(u_2{,}u_3) \geq \frac{2\alpha_2 - B_2^2 + B_1^2}{2\alpha_1 - B_1^2 + B_2^2} F(u_1{,}u_3) \quad a.e. \tag{4.21}$$

Доведення. Беручи до уваги (4.20), (4.10) та (4.11) маємо, що для усіх $u_1{,}u_2{,}u_3 \in \mathbb{R}^2$ для всіх $t > 0$

$$F(u_1{,}u_2) + F(u_2{,}u_3) \geq ||x(u_1{,}t) - x(u_2{,}t)||+$$

$$+\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\left(B_2^2 - B_1^2\right)\right)\int\limits_0^t ||x(u_1{,}s) - x(u_2{,}s)||ds+$$

$$+||x(u_2{,}t) - x(u_3{,}t)|| + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\left(B_2^2 - B_1^2\right)\right)\int\limits_0^t ||x(u_2{,}s) - x(u_3{,}s)||ds.$$

Тоді використовуємо нерівність трикутника для норми і (4.11)

$$F(u_1{,}u_2) + F(u_2{,}u_3) \geq ||x(u_1{,}t) - x(u_3{,}t)||+$$

$$+\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\left(B_2^2 - B_1^2\right)\right)\int\limits_0^t ||x(u_1{,}s) - x(u_3{,}s)||ds \geq$$

$$\geq ||x(u_1,t) - x(u_3,t)|| - \frac{2\alpha_2 - B_2^2 + B_1^2}{2\alpha_1 - B_1^2 + B_2^2} \int\limits_0^t \Phi\left(x(u_1,s),x(u_3,s),\mu_s\right) ds.$$

З цього випливає (4.16). Лему доведено. □

Наступний приклад показує ситуацію для лінійного випадку.

Приклад 4.0.1. Припустимо

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} q & q_{12} \\ -q_{12} & q \end{pmatrix} \int\limits_{R^2} (u-v)\mu_t(dv), \quad b(u,\mu_t) = \begin{pmatrix} p & -p \\ p & p \end{pmatrix} \int\limits_{R^2} (u-v)\mu_t(dv),$$

$$p > 0, \quad 2q + p^2 \leq 0.$$

Потім, $(u - v,\varphi(u) - \varphi(v)) = q||u - v||^2$, $(u - v,b(u,\mu_t) - b(v,\mu_t)) = p||u-v||$, $\|b(u,\mu_t)-b(v,\mu_t)\|p\sqrt{2}\|u-v\|$ і таким чином $\alpha_1 = \alpha_2 = -q$, $B_1 = p$, $B_2 = \sqrt{2}p$. Отже, згідно з лемою 3, у цьому випадку має вигляд нерівність (4.16).

$$F(u_1,u_2) + F(u_2,u_3) \geq \frac{-2q - p^2}{-2q + p^2} F(u_1,u_3).$$

ВИСНОВКИ

Об'єктом дослідження є деякі класи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. Метою роботи є вивчення поняття стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією, детальние дослідження конкретних моделей з використанням таких рівнянь.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. У першому розділі введено поняття стохастичного диференціального рівняння зі взаємодією. Крім того, розглянуто детерміноване рівняння для опису руху систем зі взаємодією. Наведено приклад одномірного випадку таких рівнянь,що моделює рух двох частинок, які відштовхуються одна від одної. Виявляється, що у цьому випадку можна знайти розв'язок такого рівняння у явному вигляді. Доводиться теорема існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. У другому розділі розглядається поняття зсув-компактості, яке було введено А.А. Дороговцевим та М.П. Карліковою [3], що є модифікацією поняття стійкості для мірозначних процесів, що відповідають рівнянням із взаємодією. Необхідність у такій модифікації можна побачити, зауваживши, що за умов, що забезпечують стійкість розв'язків звичайних стохастичних диференціальних рівнянь, мірозначний розв'язок зі зростанням часу стає близьким до випадкової δ-функції, тобто, вся маса зосереджується в одній точці, що випадково рухається у просторі. У третьому розділі розглянуто одновимірне стохастичне диференціальне рівняння зі взаємодією, що не має дрейфової частини. Для одиничних траєкторій наведено результат, подібний до закону повтореного логарифму вінерівського процесу. Наведено конкретний приклад, який моделює застосування відповідного результату. У четвертому розділі наведенно результат, який характерізує відстань між розв'язками системи стохастичних диференціальних рівнянь зі взаємодією. Також наведенно результати, що харектерізують поведінку таких розв'язків на нескінченності данні результати проілюстрованно на більш конкретному прикладі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Dorogovtsev A. A. Stochastic flows with interactions and measure-valued processes. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, v.63, p. 3963-3977
2. A. A. Dorogovtsev, Measure-valued Markov processes and stochastic flows on abstract spaces, Stoch. Rep. 76 (2004), no.5, 395–407.
3. Dorogovtsev A.A., Karlikova M.P. Long-time behavior of measure-valued processes corresponded to stochastic flows with interaction. Theory of stochastic processes, 2004
4. G. L. Kulini˘c, On the law of iterated logarithm for one-dimensional diffusion processes, Teor. Veroyat. Primen. 29 (1984), 544–547.
5. L. Caramellino, Strassen's law of the iterated logarithm for diffusion processes for small time, Stoch. Process. Their Appl. 74 (1998), 1-19.
6. O. Kallenberg *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed. Springer Series in Statistics, 2002.
7. M. P. Karlikova, On a weak solution of an equation for an evolutionary flow with interaction, Ukr. Math. J. 57 (2005), no. 7, 1055–1065
8. S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. Bifurcations, patterns and symmetry, Phys. D 143 (2000), no. 1-4, 1-20.
9. Baxendale, Peter; Harris, Theodore E. *Isotropic Stochastic Flows*, Ann. Probab. **14** (1986), no. 4, pp. 1155–1179.
10. Cranston M., Le Jan Y. *Geometric evolution under isotropic stochastic flow*, Electronic journal of probability, **3** (1998), no.4, pp. 1-36.
11. Cranston M., Le Jan Y. *A Central Limit Theorem for isotropic flows*, Stochastic Processes and their Applications, **119** (2009), pp. 3767-3784.
12. Dimitroff G., Scheutzow M. *Dispersion of volume under the action of isitropic Brownian flows* , Stochastic Processes and their Applications, **119** no. 2, pp. 588-601.
13. Dorogovtsev A. A. *Stochastic flows with interactions and measure-valued processes*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,

63 (2003), pp. 3963-3977.

14. A. A. Dorogovtsev *Measure-valued Markov processes and stochastic flows on abstract spaces*, Stoc/h. Rep. **76**(2004), no. 5, 395-407.
15. A. A. Dorogovtsev *Meroznachnye protsessy i stokhasticheskie potoki (Russian) [Measure-valued processes and stochastic flows]*, Pratsī Īnstitutu Matematiki Natsīonal'noï Akademīï Nauk Ukraïni. Matematika ta ïï Zastosuvannya [Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its Applications], 66. Natsīonal'na Akademīya Nauk Ukraïni, Īnstitut Matematiki, Kiev, 2007.
16. Andrey A. Dorogovtsev and Maria P. Karlikova *Long-time behaviour of measure-valued processes correspondent to stochastic flows with interaction*, Theory of stochastic processes, **9 (25)** (2003), no. 1–2, pp. 52–59.
17. Ikeda N., Watanabe S. *Stochastic flows of diffeomorphisms*, Stochastic analysis and Applications, Dekker, New York, pp. 179-198.
18. Yves Le Jan *On isitropic Brownian Motions*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **70** (1985), pp. 609–620.
19. O. Kallenberg *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed. Springer Series in Statistics, 2002.
20. Kunita H. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations* , Cambridge University Press, 1990. - 361p.
21. M. P. Lagunova *Stochastic differential equations with interaction and the law of iterated logarithm*, Theory of stochastic Processes, V**18(34)** (2012), no. 2, pp. 54-58.
22. Ya. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov *Intremittency in random media*, Usp. Fiz. Nauk, **152** (1987), pp. 3-32.
23. Craig L. Zirbel *Random measures carried by Brownian flows on* R^d, 1995.
24. Craig L. Zirbel and Erhan Çinlar *Mass transport by Brownian flows*, Stochastic Models in Geosystems, **28** (1997), no. 1, pp. 53-74.
25. Craig L. Zirbel and Erhan Çinlar *Dispersion of Particle Systems in Brownian Flows*, Advances in Applied Probability, **28**(1996), no. 1, pp. 53-74.
26. Craig L. Zirbel *Translation and dispersion of mass by isotropic brownian flows*, Stochastic Processes and their Applications, V**70** (1997), no. 1, pp.

1-29.