Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Задача теплопровідності для сектора кільця»

«Thermal conductivity problem for the ring sector»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Семерня Нікіта Олександрович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, проф. Круглов В. Є. _____
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Таїрова М. С.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2023 р.

Завідувач кафедри

_____ _____

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2023 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

_____ _____

Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

Вступ 3

1 Постановка задачі 4

2 Розв'язування відповідного рівняння 5

2.1 Пошук ядра інтегрального перетворення 5

2.2 Розв'язування задачі Штурма-Ліувілля 6

2.3 Зведення задачі до одномірної 8

2.4 Розв'язок початкової задачі 10

3 Створення програми для чисельного розв'язування задачі 13

3.1 Створення допоміжного файлу strings.py 13

3.2 Створення класу RingSector 14

3.3 Створення віконного додатку 14

4 Проведення обчислювальних експериментів та аналіз отриманих результатів 18

4.1 Аналіз впливу параметра a 18

4.2 Аналіз впливу параметра b 20

4.3 Аналіз впливу параметра β 22

4.4 Аналіз впливу параметра h 24

Висновки 26

Список літератури 27

Додаток A. Файл strings.py 28

Додаток B. Файл ringsector.py 30

Додаток C. Файл main.py 35

ВСТУП

Теплопровідність - це фізична величина, що характеризує здатність тіла чи речовини проводити та передавати тепло. Теплопровідність має велику роль в багатьох фізичних процесах, її вплив може бути критичним у вирішенні багатьох технологічних проблем та задач теплоізоляції, відведення тепла, ефективного нагрівання або теплопередачі тощо.

Об'єктом дослідження є стаціонарна задача теплопровідності для сектора кільця.

Предметом дослідження є розв'язування задачі теплопровідності для сектора кільця методом інтегральних перетворень [1, 2], яка є крайовою задачею для рівняння еліптичного типу [3].

Метою дослідження є вдосконалення вміння розв'язувати стаціонарні задачі теплопровідності для сектора кільця методом інтегральних перетворень, набуття досвіду розробки програм для чисельного розв'язку задач, поглиблення розуміння впливу характеристик сектора кільця на розподіл тепла в ньому.

Дана мета дослідження означає, що робота полягатиме в розв'язуванні задачі теплопровідності для сектору кільця, заданого певними геометричними та фізичними параметрами, розробці програми для обчислення чисельного розв'язку задачі для конкретних параметрів, проведення серії обчислювальних експериментів з розробленою програмою для дослідження її роботи та впливу кожного з параметрів, що задають сектор кільця.

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається задача теплопровідності для сектора кільця, заданого параметрами $0 < a \leqslant r \leqslant b$, $-\beta \leqslant \theta \leqslant \beta$ та коефіцієнтом теплопровідності h. Його прямолінійна грань $\theta = -\beta$ підтримується при температурі рівній нулю, а $\theta = \beta$ теплоізольована. Криволінійна грань $r = b$ теплоізольована, а на грані $r = a$ відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона з температурою $T(\theta) = \theta(\theta + \beta)$. Відсутні внутрішні джерела тепла. Потрібно знайти розподіл температури всередині області та побудувати графіки для заданих a, b, β, h.

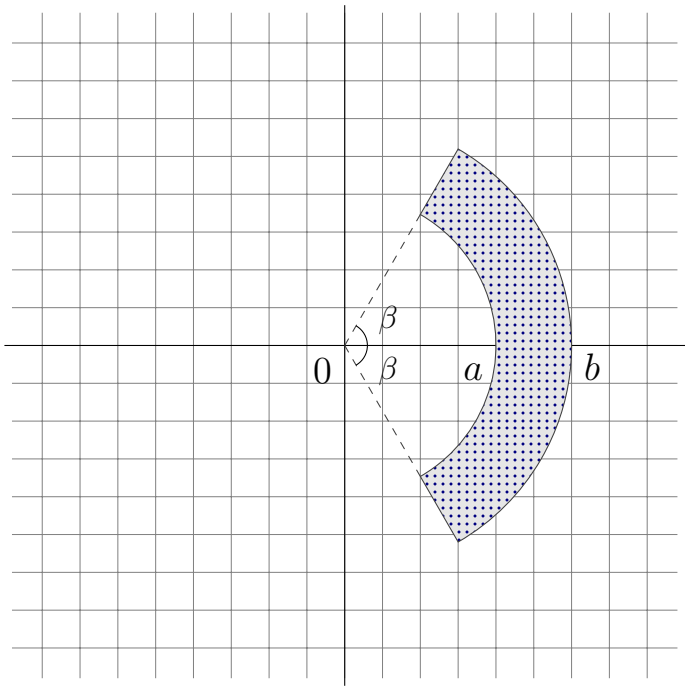

Рис. 1.1. Графічне зображення сектора кільця, заданого параметрами a, b, β

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ВІДПОВІДНОГО РІВНЯННЯ

З математичної точки зору задача зводиться до пошуку розв'язку гармонічного рівняння в полярній системі координат

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0, \tag{2.1}$$

$$0 < a \le r \le b,$$

$$-\beta \le \theta \le \beta,$$

неперервно диференційована до границь області включно і задовольняюче граничним умовам

$$w|_{\theta=-\beta} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\beta} = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} - hw\right)\bigg|_{r=a} = T(\theta), \qquad \frac{\partial w}{\partial r}\bigg|_{r=b} = 0. \tag{2.3}$$

Тут $w(r,\theta)$ – шукана температура, $h > 0$ - заданий коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем.

2.1 Пошук ядра інтегрального перетворення

Підберемо інтегральне перетворення по змінній θ. Для цього перепишемо рівняння (2.1) у вигляді

$$r^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \tag{2.4}$$

та будемо шукати ядро інтегрального перетворення

$$w_\lambda(r) = \int_{-\beta}^{\beta} w(r,\theta) K(\lambda,\theta) d\theta, \tag{2.5}$$

де $K(\lambda,\theta)$ – невідоме ядро інтегрального перетворення.

Помножимо рівняння (2.4) на $K(\lambda,\theta)$, проінтегруємо по змінній θ у межах від $-\beta$ до β та отримаємо після інтегрування по частинам та використання граничних умов (2.2) по змінній θ:

$$0 = r^2\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial r^2} + r\frac{\partial w_\lambda}{\partial r} - \lambda w_\lambda(r) - K(\lambda,\theta)\frac{\partial w}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=-\beta} - \\ - \frac{\partial K}{\partial\theta}w(r,\theta)\bigg|_{\theta=\beta} + \int_{-\beta}^{\beta}\left(\frac{d^2K}{d\theta^2} + \lambda K\right)w(r,\theta)d\theta.$$

Таким чином, для того, щоб крайова задача (2.1) трансформувалася до одномірної крайової задачі для $w_\lambda(r)$ необхідно, щоб ядро $K(\lambda,\theta)$ було розв'язком наступної задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2K}{d\theta^2} + \lambda K = 0, \quad -\beta \le \theta \le \beta, \\ &K|_{\theta=-\beta} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=\beta} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2 Розв'язування задачі Штурма-Ліувілля

Зробимо в задачі (2.6) заміну: $\varphi = \theta + \beta$. Тоді матимемо задачу:

$$\frac{d^2K}{d\varphi^2} + \lambda K = 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\beta, \tag{2.7}$$

$$K|_{\varphi=0} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=2\beta} = 0. \tag{2.8}$$

Запишемо відповіде характеристичне рівняння:

$$\mu^2 + \lambda = 0. \tag{2.9}$$

Розглянемо три випадки значень λ:

1) Для випадку $\lambda < 0$ зробимо в характеристичному рівнянні (2.9) заміну

$\lambda = -\alpha^2$, $\alpha > 0$ і розв'яжемо його:

$$\mu^2 - \alpha^2 = 0;$$
$$\mu = \pm\alpha.$$

Розв'язок рівняння (2.7) має вигляд

$$K(\lambda,\varphi) = C_0 e^{\alpha\varphi} + C_1 e^{-\alpha\varphi}.$$

Задовольняючи граничні умови (2.8), отримаємо

$$K(\lambda,0) = 0;$$
$$C_0 + C_1 = 0;$$
$$C_0 = -C_1.$$
$$\left.\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\beta} = 0;$$
$$\alpha\left(C_0 e^{\alpha\varphi} - C_1 e^{-\alpha\varphi}\right) = 0;$$
$$C_0 = C_1 = 0.$$

Нетривіальні розв'язки відсутні.

2) Для випадку $\lambda = 0$ розв'язок рівняння (2.7) має вигляд

$$K(\lambda,\varphi) = C_0\varphi + C_1.$$

Задовольняючи граничні умови (2.8), отримаємо

$$K(\lambda,0) = 0;$$
$$C_1 = 0;$$
$$\left.\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\beta} = 0;$$
$$C_0 = 0.$$

Нетривіальні розв'язки відсутні.

3) Для випадку $\lambda > 0$ зробимо в характеристичному рівнянні (2.9) заміну

$\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$ і розв'яжемо його:

$$\mu^2 + \alpha^2 = 0;$$
$$\mu = \pm i\alpha.$$

Розв'язок рівняння (2.7) має вигляд

$$K(\lambda,\varphi) = C_0 \cos\alpha\varphi - C_1 \sin\alpha\varphi.$$

Задовольняючи граничні умови (2.8), отримаємо

$$\begin{aligned}
&K(\lambda,0) = 0;\\
&C_0 \cos 0 - C_1 \sin 0 = 0;\\
&C_0 = 0.\\
&\left.\frac{\partial K}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\beta} = 0;\\
&C_1 \cos(2\alpha\beta) = 0;\\
&\alpha = \frac{\pi}{4\beta}(2m-1), \quad m = \overline{1,\infty}.
\end{aligned}$$

Маємо розв'язок

$$\begin{aligned}
&K(\lambda_m,\theta) = \sin\alpha_m(\theta+\beta),\\
&\lambda_m = \alpha_m^2, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{4\beta}(2m-1),\\
&m = \overline{1,\infty}, \quad ||k||^2 = \beta.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 Зведення задачі до одномірної

Підставивши (2.10) до (2.5), маємо:

$$w_\alpha(r) = \int_{-\beta}^{\beta} w(r,\theta) \sin\alpha(\theta+\beta) d\theta.$$

Отримали систему

$$\begin{cases} 0 = r^2 \frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial r^2} + r \frac{\partial w_\alpha}{\partial r} - \alpha^2 w_\alpha, \\ (w'_\alpha - h w_\alpha)|_{r=a} = T_\alpha, \\ w'_\alpha|_{r=b} = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши перше рівняння системи, маємо

$$\begin{aligned} w_\alpha(r) &= C_0 \mathrm{sh}(\alpha \ln \frac{r}{b}) + C_1 \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{r}{b}), \\ w'_\alpha(r) &= C_0 \frac{\alpha}{r} \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{r}{b}) + C_1 \frac{\alpha}{r} \mathrm{sh}(\alpha \ln \frac{r}{b}). \end{aligned}$$

Задовольняючи граничні умови з системи (2.3) для $r = b$, маємо

$$\begin{aligned} & w'_\alpha(r)|_{r=b} = 0; \\ & C_0 \mathrm{sh}0 + C_1 \mathrm{ch}0 = 0; \\ & C_0 = 0. \end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} w_\alpha(r) &= C_1 \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{r}{b}), \\ w'_\alpha(r) &= C_1 \frac{\alpha}{r} \mathrm{sh}(\alpha \ln \frac{r}{b}). \end{aligned}$$

Задовольняючи граничні умови з системи (2.3) для $r = a$, маємо

$$\begin{aligned} & (w'_\alpha - h w_\alpha)|_{r=a} = T_\alpha; \\ & C_1 \frac{\alpha}{a} \mathrm{sh}(\alpha \ln \frac{a}{b}) - h C_1 \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{a}{b}) = T_\alpha; \\ & C_1 = \frac{T_\alpha}{\frac{\alpha}{a} \mathrm{sh}(\alpha \ln \frac{a}{b}) - h \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{a}{b})}. \end{aligned}$$

Тоді маємо

$$w_\alpha(r) = \frac{T_\alpha \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{r}{b})}{\frac{\alpha}{a} \mathrm{sh}(\alpha \ln \frac{a}{b}) - h \mathrm{ch}(\alpha \ln \frac{a}{b})}.$$

2.4 Розв'язок початкової задачі

Завершуючи розв'язання поставленної крайової задачі, застосуємо обернене перетворення для рівняння (2.5) і матимемо

$$\begin{aligned} w(r,\theta) &= \frac{1}{\beta}\sum_{m=1}^{\infty} w_{\alpha_m}(r)\sin\alpha_m(\theta+\beta) = \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{T_{\alpha_m}\sin\alpha_m(\theta+\beta)\mathrm{ch}(\alpha_m\ln\frac{r}{b})}{\frac{\alpha_m}{a}\mathrm{sh}(\alpha_m\ln\frac{a}{b}) - h\mathrm{ch}(\alpha_m\ln\frac{a}{b})}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

де

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4\beta}(2m-1), \quad m = \overline{1,\infty},$$

$$T_{\alpha_m} = \int_{-\beta}^{\beta} T(\theta)\sin\alpha_m(\theta+\beta)d\theta,$$

$$T(\theta) = \theta(\theta+\beta).$$

Обчислимо інтеграл T_{α_m}:

$$T_{\alpha_m} = \int_{-\beta}^{\beta} T(\theta)\sin\alpha_m(\theta+\beta)d\theta = \int_{-\beta}^{\beta}\theta(\theta+\beta)\sin\alpha_m(\theta+\beta)d\theta = \dots$$

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\dots = \begin{bmatrix} u = \theta(\theta+\beta) & dv = \sin\alpha_m(\theta+\beta)d\theta \\ du = (2\theta+\beta)d\theta & v = -\dfrac{\cos\alpha_m(\theta+\beta)}{\alpha_m} \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(\frac{\theta(\theta+\beta)}{\alpha_m}\cos\alpha_m(\theta+\beta)\right)\Bigg|_{-\beta}^{\beta} - \frac{1}{\alpha_m}\int_{-\beta}^{\beta}(2\theta+\beta)\cos\alpha_m(\theta+\beta)d\theta = \dots$$

Повторно застосуємо метод інтегрування частинами:

$$= \begin{bmatrix} u = 2\theta + \beta & dv = \cos\alpha_m(\theta+\beta)d\theta \\ du = 2d\theta & v = \dfrac{\sin\alpha_m(\theta+\beta)}{\alpha_m} \end{bmatrix} =$$

$$= -\left(\frac{\theta(\theta+\beta)}{\alpha_m}\cos\alpha_m(\theta+\beta)\right)\Bigg|_{-\beta}^{\beta} - \left(\frac{2\theta+\beta}{\alpha_m^2}\sin\alpha_m(\theta+\beta)\right)\Bigg|_{-\beta}^{\beta} -$$

$$- \frac{2}{\alpha_m^2}\int_{-\beta}^{\beta}\sin\alpha_m(\theta+\beta)d\theta = \ldots$$

Проінтегрувавши останній інтеграл, маємо:

$$\cdots = -\left(\frac{\theta(\theta+\beta)}{\alpha_m}\cos\alpha_m(\theta+\beta)\right)\Bigg|_{-\beta}^{\beta} - \left(\frac{2\theta+\beta}{\alpha_m^2}\sin\alpha_m(\theta+\beta)\right)\Bigg|_{-\beta}^{\beta} +$$

$$+ \left(\frac{2}{\alpha_m^3}\cos\alpha_m(\theta+\beta)\right)\Bigg|_{-\beta}^{\beta} = \ldots$$

Обчислимо значення визначених інтегралу за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\cdots = -\frac{2\beta^2}{\alpha_m}\cos(2\alpha_m\beta) - \frac{3\beta}{\alpha_m^2}\sin(2\alpha_m\beta) + \frac{2}{\alpha_m^3}\cos(2\alpha_m\beta) - \frac{2}{\alpha_m^3}.$$

Розглянемо $\cos(2\alpha_m\beta)$ та $\sin(2\alpha_m\beta)$. Підставивши α_m, можемо записати їх як $\cos\frac{\pi}{2}(2m-1)$ та $\sin\frac{\pi}{2}(2m-1)$, $m = \overline{1,\infty}$. Вираз $\frac{\pi}{2}(2m-1)$ для $m = \overline{1,\infty}$ прийматиме значення $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ і т.д. Тоді не важко обчислити

$$\cos(2\alpha_m\beta) = \cos\frac{\pi}{2}(2m-1) = 0,$$

$$\sin(2\alpha_m\beta) = \sin\frac{\pi}{2}(2m-1) = (-1)^{m-1},$$

$$m = \overline{1,\infty}.$$

Тоді, завершуючи обчислення, маємо

$$T_{\alpha_m} = (-1)^m\frac{3\beta}{\alpha_m^2} - \frac{2}{\alpha_m^3}.$$

Повертаючись до функції розподілу температури (2.11), підставимо T_{α_m} та

в підсумку отримаємо функцію розподілу температури наступного вигляду:

$$w(r,\theta) = \frac{1}{\beta}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left((-1)^m \dfrac{3\beta}{\alpha_m^2} - \dfrac{2}{\alpha_m^3}\right) \sin\alpha_m(\theta+\beta)\mathrm{ch}(\alpha_m \ln\dfrac{r}{b})}{\dfrac{\alpha_m}{a}\mathrm{sh}(\alpha_m \ln\dfrac{a}{b}) - h\mathrm{ch}(\alpha_m \ln\dfrac{a}{b})},$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4\beta}(2m-1), \quad m = \overline{1,\infty}.$$

РОЗДІЛ 3

СТВОРЕННЯ ПРОГРАМИ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Для аналізу розподілу тепла на секторі кільця напишемо програму, що будуватиме зображення чисельного розв'язку задачі теплопровідності для сектора кільця методом тріангуляції.

Для аналізу розподілу тепла на поперечних або повздовжних перерізах сектора кільця додамо до програми можливість побудувати графік температури вздовж цих перерізів і зберегти дані обчислень в файлі Excel.

Для спрощення користування програмою, створимо її у вигляді віконного додатку.

Для розробки програми використовуватимемо PyCharm - інтегроване середовище розробки для мови програмування Python. Виберемо версію Python 3.9. Для обчислень використовуватимемо бібліотеки `numpy`, `pandas`. Для побудови графіків використовуватимемо бібліотеку `matplotlib.plt`. Для побудови тріангуляції використовуватимемо бібліотеку `matplotlib.tri`. Для створення віконного додатку використовуватимемо бібліотеку `tkinter`.

3.1 Створення допоміжного файлу strings.py

В файлі `strings.py`:

- Виокремимо в словник `LABELS` текстові константи програми.
- Для спрощення набору грецьких літер виокремимо їх в словник `LETTERS` як константи в Unicode-форматі.
- В цьому ж файлі опишемо функції `toRad()` та `toTexRad()` для спрощення конвертації числового значення радіанної міри кута у рядок з текстовим представленням відповідного дробу.

3.2 Створення класу RingSector

В файлі `ringsector.py` опишемо клас `RingSector`:

- Створимо конструктор класу, який при створенні нового об'єкту присвоїть відповідним змінним задані геометричні параметри кільця a, b та β, параметр теплопровідності кільця h та кількість точок розбиття проміжку обчислень, або присвоїть їм значення за замовчуванням, якщо таких не буде задано.
- Створимо метод класу `w`, який для заданої аргументами `r` та `theta` точки на секторі кільця та заданої кількості значущих цифр після коми `dec` обчислюватиме температуру в цій точці з точністю `10^(-dec)`. Для легшого розуміння коду цього метода, створимо також допоміжні методи класу `alpha`, `T_alpha` та `w_`.
- Створимо метод класу `build`, який будуватиме зображення розв'язку задачі теплопровідності для даного сектора кільця з тріангуляцією Делоне та зберігатиме його в форматі `.png`, якщо вказати шлях його зберігання параметром `plot_dir`.
- Створимо методи класу `build_r` та `build_theta`, які для заданого аргументом `r_0` або `theta_0` відповідно побудують графік температури вздовж перерізу на секторі кільця, утвореної фіксацією відповідної змінної функції w, обчисливши значення температури в `n` точках, розподілених рівномірно вздовж цього перерізу. Також цей метод зберігає побудований графік в форматі `.png` та таблицю обчислень в форматі `.xlsx`, якщо вказати шляхи їх зберігання параметрами `plot_dir` та `data_dir`.

3.3 Створення віконного додатку

Створимо віконний додаток "Програма для обчислень теплопровідності сектору кільця". Для цього в файлі `main.py`:

- Створимо вікно та створимо в ньому рамку, всередині якої будуть розміщені всі інші об'єкти вікна.
- Створимо рамку, всередині якої будуть розміщені поля введення гео-

метричних параметрів a, b та β сектора кільця, їх назви та описи. Для введення радіанної міри кута β імпортуємо константу `pi` з бібліотеки `numpy` та використаємо функцію `eval()`, що обчислить значення виразу, заданого текстовим рядком цього поля. Наприклад, для введеного рядку `pi/4` обчислить десятичне значення радіанної мири кута $\frac{\pi}{4}$.

- Створимо рамку, всередині якої буде розміщено поле введення параметру теплопровідності сектора кільця h, його назва та опис.
- Створимо рамку, всередині якої будуть розміщені кнопки вибору типу графіку, біля кнопок вибору побудови графіків перерізу - поля введення значень для фіксації відповідного аргументу, поля введення кількості точок розбиття проміжку обчислень та кількості значущих цифр після коми. Зробимо також так, щоб поля введення параметрів фіксації та кнопка збереження обчислень блокувалися чи активувалися при виборі відповідного типу графіку.
- Створимо рамку, всередині якої будуть розміщені кнопка вибору шляху для збереження побудованого графіка, кнопка вибору шляху для збереження таблиці обчислень, використаних для побудови графіка, та кнопка запуску. Під кнопками вибору шляхів розмістимо написи, які відображатимуть обрані шляхи. Якщо шлях зберігання графіку чи таблиці не буде обраний, відповідний напис відображатиме повідомлення про те, що шлях не обрано, а програма виконає роботу, не зберігаючи відповідний файл. Якщо обраний режим побудови тріангуляції сектора кільця, кнопка вибору шляху збереження обчислень деактивується.

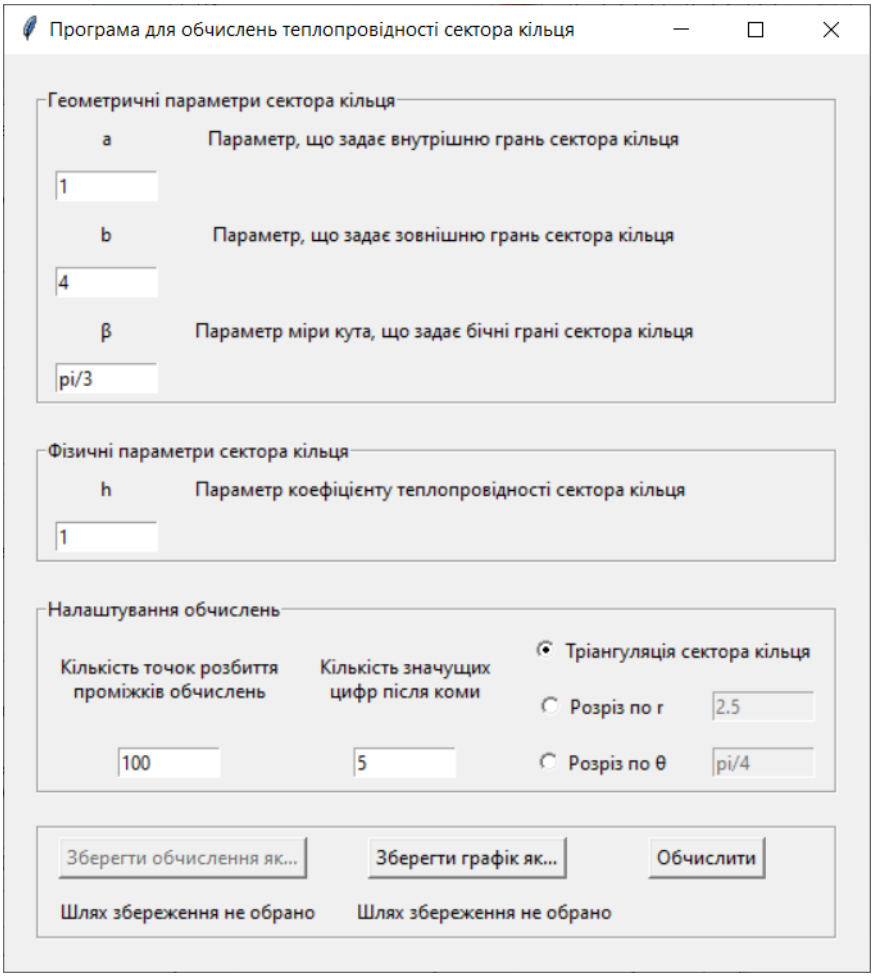

Рис. 3.1. Вікно програми

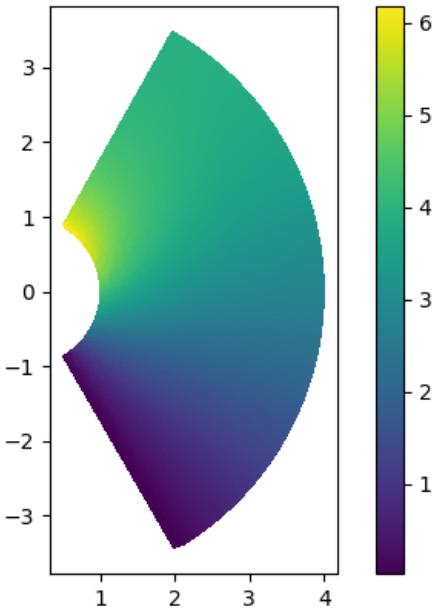

Рис. 3.2. Зображення розв'язку задачі теплопровідності для сектора кільця

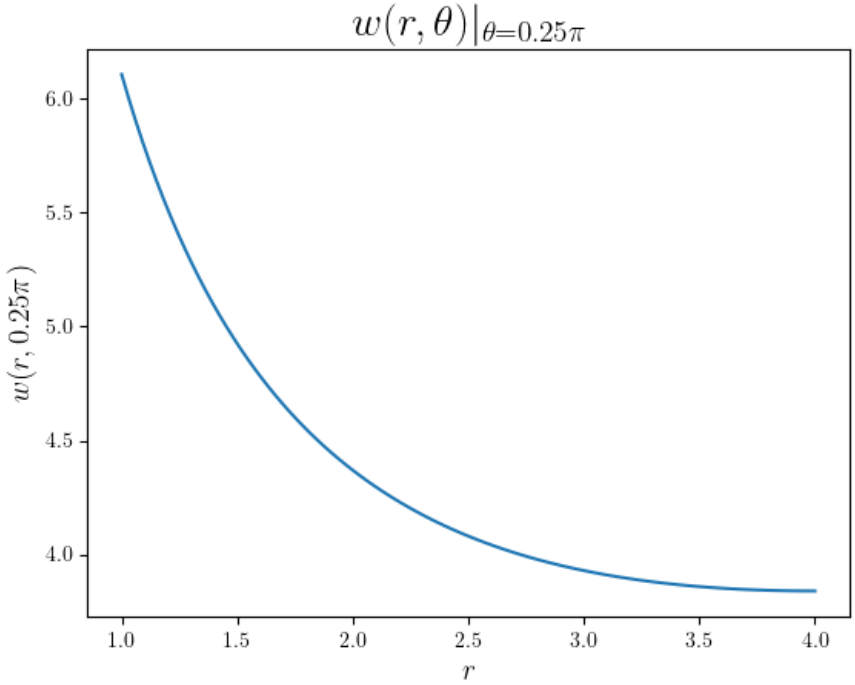

Рис. 3.3. Графік температури на поперечному перерізі сектора кільця

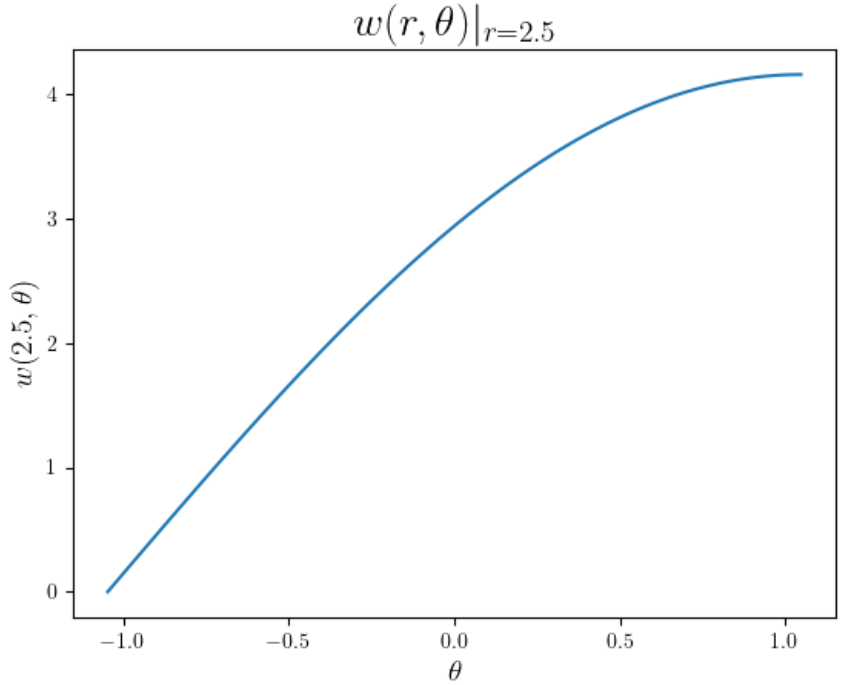

Рис. 3.4. Графік температури на повздовжному перерізі сектора кільця

РОЗДІЛ 4

ПРОВЕДЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ ТА АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Проведемо серію обчислювальних експериментів для дослідження параметрів a, b, β та h сектора кільця. Для цього запускатимемо обчислення для декількох значень одного з параметрів при інших незмінних та аналізуватимемо отримані дані з точки зору впливу зміни параметра на розподіл температури на секторі кільця. Спробуємо також пояснити вплив параметрів з точки зору їх геометричного та фізичного сенсу.

4.1 Аналіз впливу параметра a

Поклавши $b = 4, \beta = \frac{\pi}{3}, h = 0$, розглянемо вплив параметра a на розподіл температури на секторі кільця:

- При $a = 1$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 16.90356.

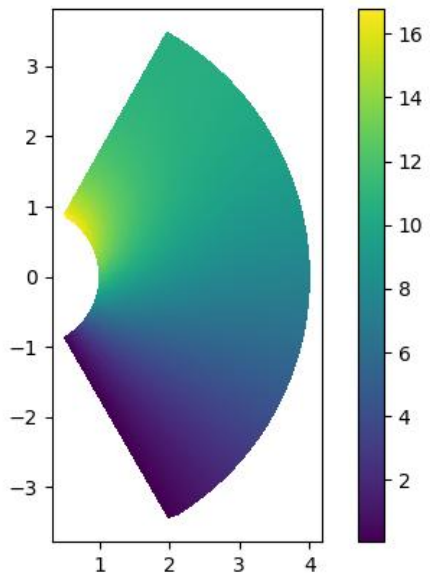

Рис. 4.1. $a = 1$

- Якщо задати $a = 2$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 55.05621.

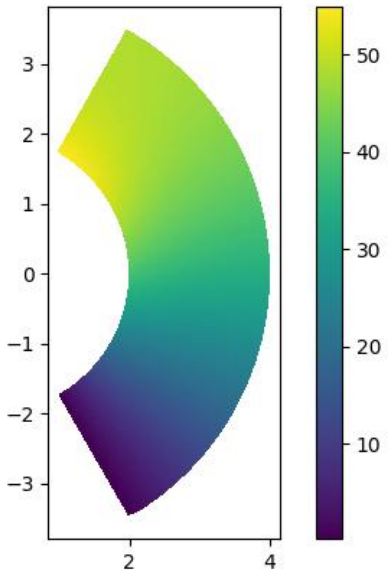

Рис. 4.2. $a = 2$

- Якщо задати $a = 3$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 185.62983.

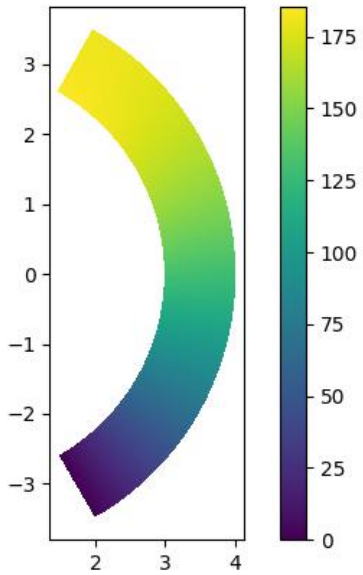

Рис. 4.3. $a = 3$

Бачимо, що при незмінних інших параметрах, збільшення параметра a означає збільшення максимальної температури на секторі кільця. Можна

пояснити це тим, що його збільшення означає збільшення довжини внутрішньої грані, вздовж якої відбувається теплообмін з середовищем, а також зменшення нижньої бічної грані, вздовж якої підтримується нульова температура.

4.2 Аналіз впливу параметра b

Поклавши $a = 1, \beta = \frac{\pi}{3}, h = 0$, розглянемо вплив параметра b на розподіл температури на секторі кільця:

- При $b = 6$ функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 15.06694.

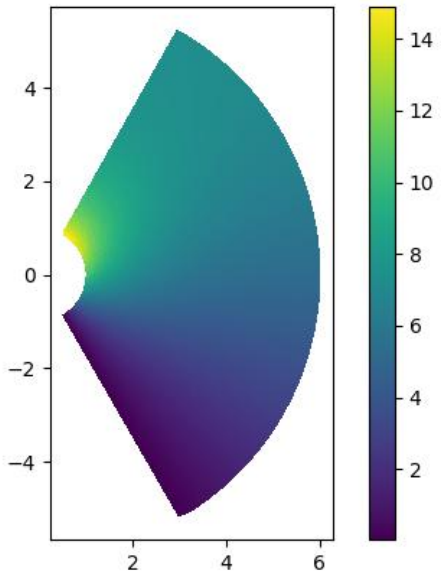

Рис. 4.4. $b = 6$

- Якщо задати $b = 8$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 14.363.

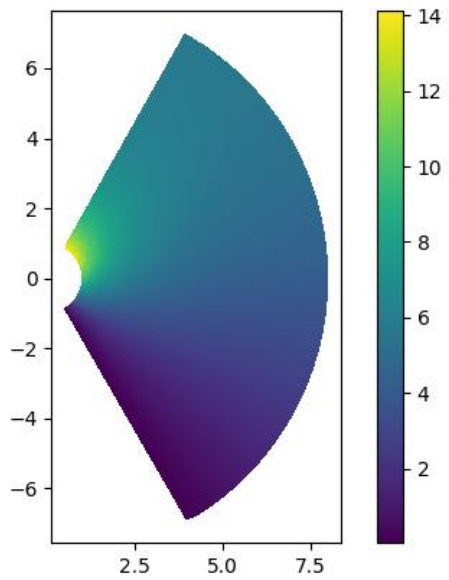

Рис. 4.5. $b = 8$

- Якщо задати $b = 10$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 14.00587.

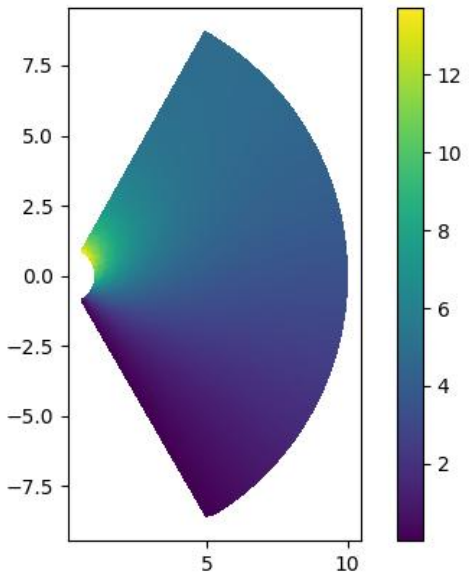

Рис. 4.6. $b = 10$

Бачимо, що при незмінних інших параметрах, збільшення параметра b означає зменшення максимальної температури на секторі кільця. Можна пояснити це тим, що його збільшення означає збільшення довжини нижньої

бічної грані, вздовж якої підтримується нульова температура, при цьому довжина внутрішньої грані залишається незмінною.

4.3 Аналіз впливу параметра β

Поклавши $a = 1, b = 4, h = 0$, розглянемо вплив параметра β на розподіл температури на секторі кільця:

- При $\beta = \frac{\pi}{2}$ функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 73.95305.

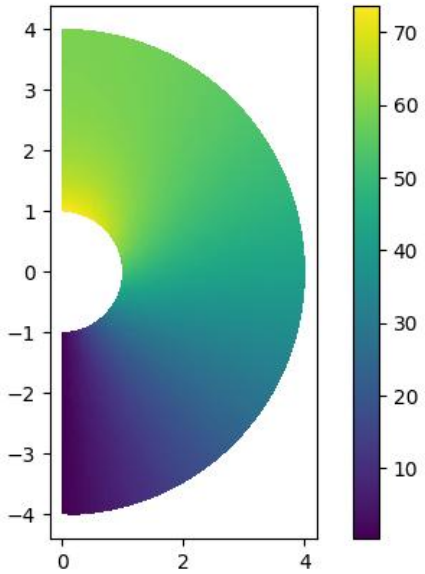

Рис. 4.7. $\beta = \frac{\pi}{2}$

- Якщо задати $\frac{3\pi}{4}$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 346.82137.

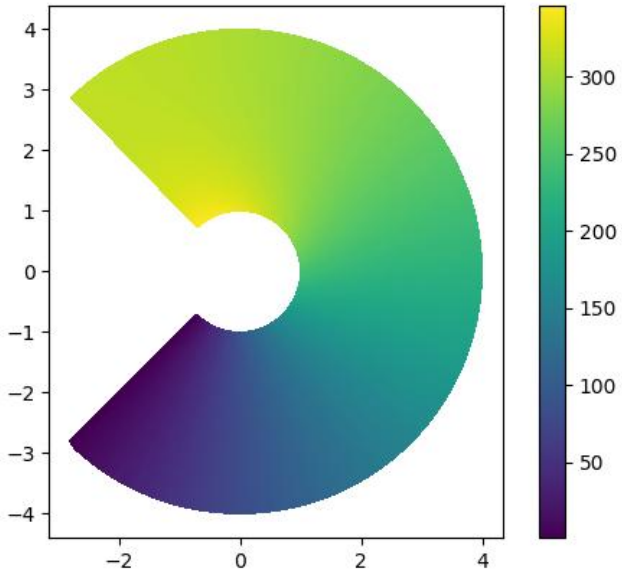

Рис. 4.8. $\beta = \frac{3\pi}{4}$

- Якщо задати $\beta = \frac{\pi}{4}$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 6.28601.

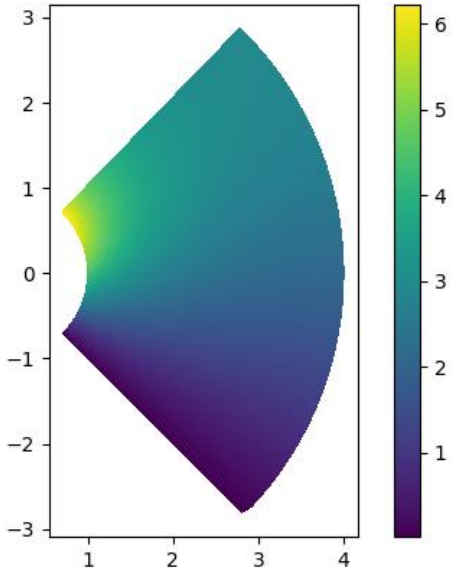

Рис. 4.9. $\beta = \frac{\pi}{4}$

Бачимо, що при незмінних інших параметрах, збільшення параметра β означає збільшення максимальної температури на секторі кільця, при чому значно більше, ніж збільшення параметра a. Можна пояснити це тим, що його збільшення означає збільшення довжини внутрішньої грані, при

цьому довжина нижньої бічної грані залишається незмінною. Окрім того, β є параметром функції температури навколишнього середовища $T(\theta) = \theta(\theta + \beta)$.

4.4 Аналіз впливу параметра h

Поклавши $a = 1, b = 4, \beta = \frac{\pi}{3}$, розглянемо вплив параметра h на розподіл температури на секторі кільця:

- При $h = 1$, функція $w(r,\theta)$ при $r = \frac{a+b}{2}$ на проміжку $\theta \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$ монотонно зростає і приймає значення від 0 до 6.28601.

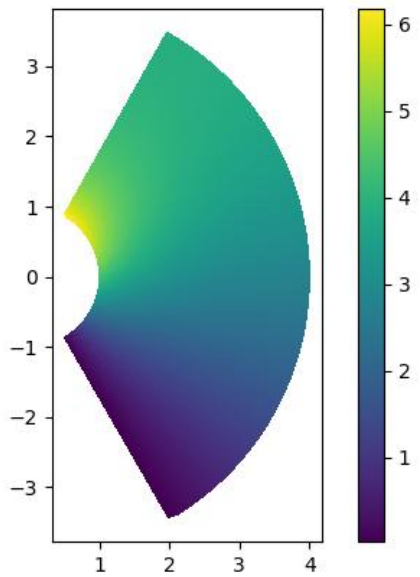

Рис. 4.10. $h = 1$

- Якщо задати $h = 2$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 3.81693.

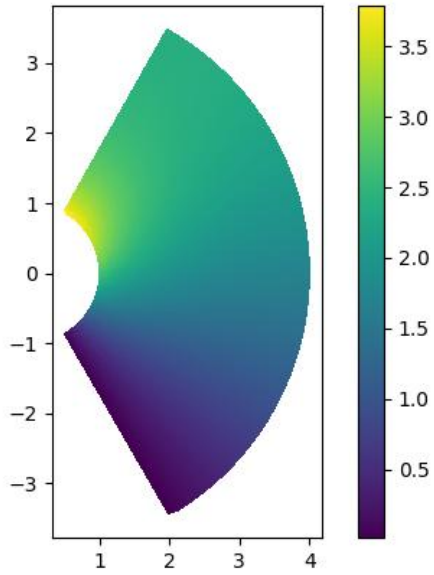

Рис. 4.11. $h = 2$

- Якщо задати $h = 5$, функція $w(r,\theta)$ приймає значення від 0 до 1.76604.

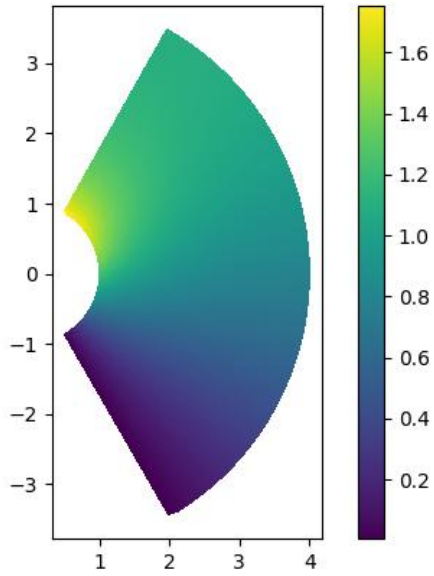

Рис. 4.12. $h = 5$

Бачимо, що при незмінних інших параметрах, збільшення параметра h означає зменшення максимальної температури на секторі кільця. Це зрозуміло, адже h є заданим коефіцієнтом теплообміну з навколишнім середовищем.

ВИСНОВКИ

В роботі над розв'язуванням задачі теплопровідності для сектора кільця, шляхом розв'язування відповідного гармонічного рівняння в полярній системі координат методом інтегральних перетворень, побудовано функцію розподілу температури всередині області сектора кільця, заданої параметрами $0 < a \leq r \leq b$, $-\beta \leq \theta \leq \beta$.

Розроблено програму на мові Python для чисельного розв'язування задачі при заданих параметрах сектора кільця. Програма дозволяє розв'язувати задачу як для сектора кільця, так і для поперечних та повздовжних його перерізів.

За допомогою розробленної програми проведено аналіз впливу кожного з параметрів, що задають сектор кільця. З'ясовано, що збільшення параметрів a та β означає збільшення максимальної температури на секторі кільця. Збільшення ж параметрів b та h означає зменшення максимальної температури на секторі кільця. Отримані результати узгоджуються з геометричним та фізичним сенсом зміни цих параметрів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вайсфельд Н. Д. Навчальний посібник з курсу “Рівняння математичної фізики” : (для студ. спец. "Прикладна математика"і "Механіка"/ Н. Д. Вайсфельд, Г. Я. Попов, В. В. Реут. – Електрон. кн. – Одеса, 2013. – 215 с.
2. Попов Г. Я. Навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень": для студ. техн. спец. вузів / Г. Я. Попов, В. В. Реут, Н. Д. Вайсфельд ; відп. ред.: В. Є. Круглов ; ОНУ ім. І.І. Мечникова. – Одеса : Астропринт, 2005. – 183 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
4. Duncan M. McGreggor. Mastering matplotlib – Packt Publishing, 2015. - 292 с.
5. John E. Grayson. Python and Tkinter Programming – Manning; First Edition, 2000. - 688 с.

ДОДАТОК А. ФАЙЛ STRINGS.PY

```
from numpy import pi

LETTERS = {
    'BETA': u"\u03B2",
    'THETA': u"\u03B8",
    'PI': u"\u03C0"
}

LABELS = {
    'WINDOW TITLE': "Програма для обчислень теплопровідності
     ↪  сектора кільця",
    'GEOMETRY PARAMETERS FRAME': "Геометричні параметри сектора
     ↪  кільця",
    'ADD TO LEGEND': "Додати до легенди графіка",
    'DESCRIPTION OF A': "Параметр, що задає внутрішню грань
     ↪  сектора кільця",
    'DESCRIPTION OF B': "Параметр, що задає зовнішню грань
     ↪  сектора кільця",
    'DESCRIPTION OF BETA': "Параметр міри кута, що задає бічні
     ↪  грані сектора кільця",
    'PHYSICAL PARAMETERS FRAME': "Фізичні параметри сектора
     ↪  кільця",
    'DESCRIPTION OF H': "Параметр коефіцієнту теплопровідності
     ↪  сектора кільця",
    'EVALUATING PARAMETERS FRAME': "Налаштування обчислень",
    'NUMBER OF POINTS': "Кількість точок розбиття\nпроміжків
     ↪  обчислень",
    'SIGNIFICANT DIGITS': "Кількість значущих\nцифр після коми",
    "FULL GRAPH RADIOBUTTON": "Тріангуляція сектора кільця",
    'R SECTION RADIOBUTTON': "Розріз по r",
    'THETA SECTION RADIOBUTTON': "Розріз по " +
     ↪  LETTERS['THETA'],
```

```
    'SUBMIT BUTTON': "Обчислити",
    'SAVE PLOT BUTTON': "Зберегти графік як...",
    'SAVE DATA BUTTON': "Зберегти обчислення як...",
    'DIRECTORY IS NOT CHOSEN': "Шлях збереження не обрано",
    'TEMPERATURE': "Температура"
}


def toRad(angle=0.0, precision=0.00001):
    coefficient = angle / pi
    if abs(coefficient) < precision:
        return "0"
    if abs(coefficient - 1) < precision:
        return LETTERS['PI']
    return str(round(coefficient, 3)) + LETTERS['PI']


def toTexRad(angle=0.0, precision=0.00001):
    coefficient = angle / pi
    if abs(coefficient) < precision:
        return "0"
    if abs(coefficient - 1) < precision:
        return "\\pi"
    return str(round(coefficient, 3)) + "\\pi"
```

ДОДАТОК В. ФАЙЛ RINGSECTOR.PY

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.tri as tri
from numpy import sinh, cosh, sin, log, pi
from strings import LETTERS, LABELS, toRad, toTexRad
import pandas as pd


class RingSector:
    def __init__(self, a=1, b=4, beta=pi / 2, h=1, n=100):
        self.a = a
        self.b = b
        self.beta = beta
        self.h = h
        self.n = n

    def alpha(self, m):
        return pi * (2 * m - 1) / (4 * self.beta)

    def T_alpha(self, m):
        alpha = self.alpha(m)
        return -(2 / alpha - 3 * self.beta * (-1) ** m) / (alpha
        ↪  ** 2)

    def w_(self, r, theta, m):
        alpha = self.alpha(m)
        t_alpha = self.T_alpha(m)
        n = t_alpha * cosh(alpha * log(r / self.b)) * sin(alpha
        ↪  * (theta + self.beta))
        d = alpha / self.a * sinh(alpha * log(self.a / self.b))
        ↪  - self.h * cosh(alpha * log(self.a / self.b))
        return n / d
```

```
def w(self, r, theta, dig=5, m=1, w_prev=0):
    w_m = self.T_alpha(m) * sin(self.alpha(m) * (theta +
     ↪  self.beta)) * cosh(self.alpha(m) * log(r / self.b))
     ↪  \
          / (self.alpha(m) * sinh(self.alpha(m) * log(self.a
           ↪  / self.b)) / self.a - self.h *
           ↪  cosh(self.alpha(m) * log(self.a / self.b)))
    if abs(w_prev) < 10**(-dig):
        return (w_prev + w_m) / self.beta
    self.w(r, theta, m=m+1, w_prev = w_prev + w_m, dig=dig)

def build(self, plot_dir="", dig=5):
    r_array = np.linspace(self.a, self.b, self.n)
    theta_array = np.linspace(-self.beta, self.beta, self.n,
     ↪  endpoint=False)
    theta_array = np.repeat(theta_array[..., np.newaxis],
     ↪  self.n, axis=1)
    theta_array[:, 1::2] += np.pi / self.n
    x = (r_array * np.cos(theta_array)).flatten()
    y = (r_array * np.sin(theta_array)).flatten()
    z = np.asarray(
        [[self.w(r_array[i], theta_array[j, i], dig) for i
         ↪  in range(self.n)] for j in range(self.n)])
    z = z.flatten()
    triang = tri.Triangulation(x, y)

     ↪  triang.set_mask((np.hypot(x[triang.triangles].mean(axis=1)
     ↪  y[triang.triangles].mean(axis=1)) < self.a) |
                    (self.beta + np.pi / self.n <
                     ↪  abs(np.angle(x[triang.triangles].mean(axis
                     ↪  +
                     ↪  y[triang.triangles].mean(axis=1)*1j))))
    fig1, ax1 = plt.subplots()
```

```
        ax1.set_aspect('equal')
        tpc = ax1.tripcolor(triang, z, shading='flat')
        fig1.colorbar(tpc)
        if plot_dir != LABELS["DIRECTORY IS NOT CHOSEN"]:
            plt.savefig(
                plot_dir + "/a{0}-b{1}-beta{2}-h{3}-tri.jpg"
                .format(int(self.a), int(self.b),
                 ↪  toRad(self.beta), int(self.h)))
        plt.show()

    def build_r(self, r_0, plot_dir="", data_dir="", dig=5):
        theta_array = np.linspace(-self.beta, self.beta, self.n)
        w_array = [self.w(r_0, t, dig) for t in theta_array]
        plt.rcParams['text.usetex'] = True
        plt.title(r"$w(r, \theta)|_{{r={0}}}$".format(round(r_0,
         ↪  3)), fontsize=20)
        plt.plot(theta_array, w_array)
        plt.xlabel(r"$\theta$", fontsize=14)
        plt.ylabel(r"$w({0}, \theta)$".format(round(r_0, 3)),
         ↪  fontsize=14)
        if plot_dir != LABELS["DIRECTORY IS NOT CHOSEN"]:
            plt.savefig(
                plot_dir +
                 ↪  "/a{0}-b{1}-beta{2}-h{3}-r_0[{4}].jpg".format(int(
                 ↪  int(self.b), toRad(self.beta),



        if data_dir != LABELS["DIRECTORY IS NOT CHOSEN"]:
            df = pd.DataFrame(
                np.stack((np.asarray(theta_array),
                 ↪  np.asarray(w_array))),
                index=[LETTERS['THETA'], "w({0},
                 ↪  {1})".format(r_0, LETTERS['THETA'])])
```

```
        df.round(dig).to_excel(data_dir +
         ↪  "/a{0}-b{1}-beta{2}-h{3}-r_0[{4}].xlsx"
                                .format(self.a, self.b,
                                 ↪  toRad(self.beta),
                                 ↪  int(self.h), r_0),
                                header=False)
    plt.show()

def build_theta(self, theta_0, plot_dir="", data_dir="",
 ↪  dig=5):
    r_array = np.linspace(self.a, self.b, self.n)
    w_array = [self.w(r, theta_0, dig) for r in r_array]
    plt.rcParams['text.usetex'] = True
    plt.title(r"$w(r,
     ↪  \theta)|_{{\theta={0}}}$".format(toTexRad(theta_0)),
     ↪  fontsize=20)
    plt.plot(r_array, w_array)
    plt.xlabel(r"$r$", fontsize=14)
    plt.ylabel(r"$w(r, {0})$".format(toTexRad(theta_0)),
     ↪  fontsize=14)
    if plot_dir != LABELS["DIRECTORY IS NOT CHOSEN"]:
        plt.savefig(
            plot_dir +
             ↪  "/a{0}-b{1}-beta{2}-h{3}-theta_0[{4}].jpg".format(
             ↪  self.b, toRad(self.beta),



    if data_dir != LABELS["DIRECTORY IS NOT CHOSEN"]:
        df = pd.DataFrame(np.stack((np.asarray(r_array),
         ↪  np.asarray(w_array))),
                          index=["r", "w(r,
                           ↪  {0})".format(theta_0)])
```

```
    df.round(dig).to_excel(data_dir +
     ↪  "/a{0}-b{1}-beta{2}-h{3}-theta_0[{4}].xlsx"
                                .format(self.a, self.b,
                                 ↪  toRad(self.beta),
                                 ↪  int(self.h),
                                 ↪  toRad(theta_0)),
                                header=False)
plt.show()
```

ДОДАТОК С. ФАЙЛ MAIN.PY

```
import ringsector as rs
import tkinter as tk
from tkinter.filedialog import askdirectory
from strings import LETTERS, LABELS
from numpy import pi


def main_form():
    window = tk.Tk()
    window.title(LABELS['WINDOW TITLE'])

    frame = tk.Frame(window, padx=10, pady=10)
    frame.pack(expand=True)

    geometry_parameters_frame = tk.LabelFrame(frame,
     ↪  text=LABELS['GEOMETRY PARAMETERS FRAME'])
    geometry_parameters_frame.grid(row=0, column=0)

    a = tk.StringVar(window, value="1")
    a_lbl = tk.Label(geometry_parameters_frame, text="a")
    a_lbl.grid(row=0, column=0)
    a_txt = tk.Entry(geometry_parameters_frame, width=10,
     ↪  textvariable=a)
    a_txt.grid(row=1, column=0)
    a_desc = tk.StringVar(value=LABELS['DESCRIPTION OF A'])
    a_desc_lbl = tk.Label(geometry_parameters_frame,
     ↪  textvariable=a_desc)
    a_desc_lbl.grid(row=0, column=1, columnspan=2)

    b = tk.StringVar(window, value="4")
    b_lbl = tk.Label(geometry_parameters_frame, text="b")
    b_lbl.grid(row=2, column=0)
```

```
b_txt = tk.Entry(geometry_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=b)
b_txt.grid(row=3, column=0)
b_desc = tk.StringVar(value=LABELS['DESCRIPTION OF B'])
b_desc_lbl = tk.Label(geometry_parameters_frame,
 ↪  textvariable=b_desc)
b_desc_lbl.grid(row=2, column=1, columnspan=2)

beta = tk.StringVar(window, value="pi/3")
beta_lbl = tk.Label(geometry_parameters_frame,
 ↪  text=LETTERS['BETA'])
beta_lbl.grid(row=4, column=0)
beta_txt = tk.Entry(geometry_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=beta)
beta_txt.grid(row=5, column=0)
beta_desc = tk.StringVar(value=LABELS['DESCRIPTION OF
 ↪  BETA'])
beta_desc_lbl = tk.Label(geometry_parameters_frame,
 ↪  textvariable=beta_desc)
beta_desc_lbl.grid(row=4, column=1, columnspan=2)

physical_parameters_frame = tk.LabelFrame(frame,
 ↪  text=LABELS['PHYSICAL PARAMETERS FRAME'])
physical_parameters_frame.grid(row=1, column=0)

h = tk.StringVar(window, value="1")
h_lbl = tk.Label(physical_parameters_frame, text="h")
h_lbl.grid(row=0, column=0)
h_txt = tk.Entry(physical_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=h)
h_txt.grid(row=1, column=0)
h_desc = tk.StringVar(value=LABELS['DESCRIPTION OF H'])
h_desc_lbl = tk.Label(physical_parameters_frame,
 ↪  textvariable=h_desc)
```

```
h_desc_lbl.grid(row=0, column=1, columnspan=2)

evaluating_parameters_frame = tk.LabelFrame(frame,
 ↪  text=LABELS['EVALUATING PARAMETERS FRAME'])
evaluating_parameters_frame.grid(row=2, column=0)

n = tk.IntVar(window, value=100)
n_lbl = tk.Label(evaluating_parameters_frame,
 ↪  text=LABELS['NUMBER OF POINTS'])
n_lbl.grid(row=0, column=0, rowspan=2)
n_txt = tk.Entry(evaluating_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=n)
n_txt.grid(row=2, column=0)

dig = tk.IntVar(window, value=5)
dig_lbl = tk.Label(evaluating_parameters_frame,
 ↪  text=LABELS['SIGNIFICANT DIGITS'])
dig_lbl.grid(row=0, column=1, rowspan=2)
dig_txt = tk.Entry(evaluating_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=dig)
dig_txt.grid(row=2, column=1)

r = tk.StringVar(value=str((eval(a.get()) + eval(b.get())) /
 ↪  2))
r_txt = tk.Entry(evaluating_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=r, state='disabled')
r_txt.grid(row=1, column=3)

theta = tk.StringVar(value="pi/4")
theta_txt = tk.Entry(evaluating_parameters_frame, width=10,
 ↪  textvariable=theta, state='disabled')
theta_txt.grid(row=2, column=3)

section = tk.StringVar(window, "full")
```

```
def display_section_r():
    r_txt.config(state="normal")
    theta_txt.config(state="disabled")
    btn_data_dir.config(state="normal")

def display_section_theta():
    r_txt.config(state="disabled")
    theta_txt.config(state="normal")
    btn_data_dir.config(state="normal")

def disable_sections():
    r_txt.config(state="disabled")
    theta_txt.config(state="disabled")
    btn_data_dir.config(state="disabled")

full_radiobutton = tk.Radiobutton(
    evaluating_parameters_frame,
    text=LABELS['FULL GRAPH RADIOBUTTON'],
    command=disable_sections,
    variable=section,
    value="full"
)
full_radiobutton.grid(row=0, column=2, columnspan=2)

r_radiobutton = tk.Radiobutton(
    evaluating_parameters_frame,
    text=LABELS['R SECTION RADIOBUTTON'],
    command=display_section_r,
    variable=section,
    value="r"
)
r_radiobutton.grid(row=1, column=2)
```

```
theta_radiobutton = tk.Radiobutton(
    evaluating_parameters_frame,
    text=LABELS['THETA SECTION RADIOBUTTON'],
    command=display_section_theta,
    variable=section,
    value="theta"
)
theta_radiobutton.grid(row=2, column=2)

buttons_frame = tk.LabelFrame(frame)
buttons_frame.grid(row=3, column=0)

data_directory = tk.StringVar(value=LABELS["DIRECTORY IS NOT
 ↪  CHOSEN"])

def openDataDir():
    directory = askdirectory()
    data_directory.set(directory if directory != "" else
     ↪  data_directory.get())

btn_data_dir = tk.Button(buttons_frame, text=LABELS["SAVE
 ↪  DATA BUTTON"], command=openDataDir, state="disabled")
btn_data_dir.grid(row=0, column=0)
data_dir_lbl = tk.Label(buttons_frame,
 ↪  textvariable=data_directory)
data_dir_lbl.grid(row=1, column=0, columnspan=2)

plot_directory = tk.StringVar(value=LABELS["DIRECTORY IS NOT
 ↪  CHOSEN"])

def openPlotDir():
    directory = askdirectory()
    plot_directory.set(directory if directory != "" else
     ↪  plot_directory.get())
```

```
btn_plot_dir = tk.Button(buttons_frame, text=LABELS["SAVE
 ↪  PLOT BUTTON"], command=openPlotDir)
btn_plot_dir.grid(row=0, column=2)
plot_dir_lbl = tk.Label(buttons_frame,
 ↪  textvariable=plot_directory)
plot_dir_lbl.grid(row=1, column=2, columnspan=2)

def submit():
    ring_sector = rs.RingSector(
        a=eval(a.get()),
        b=eval(b.get()),
        beta=eval(beta.get()),
        h=eval(h.get()),
        n=n.get()
    )
    if section.get() == "r":
        ring_sector.build_r(eval(r.get()),
         ↪  plot_directory.get(), data_directory.get(),
         ↪  dig.get())
    elif section.get() == "theta":
        ring_sector.build_theta(eval(theta.get()),
         ↪  plot_directory.get(), data_directory.get(),
         ↪  dig.get())
    else:
        ring_sector.build(plot_directory.get(), dig.get())

btn = tk.Button(buttons_frame, text=LABELS['SUBMIT BUTTON'],
 ↪  command=submit)
btn.grid(row=0, column=4)

for widget in frame.winfo_children():
    widget.grid_configure(padx=10, pady=10, sticky='ew')
    for subwidget in widget.winfo_children():
```

```
            subwidget.grid_configure(padx=10, pady=5)

    window.mainloop()


main_form()
```