

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра оптимального керування і економічної кібернетики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Дифузійні методи обробки інфрачервоних зображень»

«Diffusion methods of processing infrared images»

Виконав: здобувач денної форми навчання

спеціальності 113 Прикладна математика

Освітня програма: Прикладна математика

Бутник Михайло Ігорович

Керівник: канд. техн. наук, доц. Мороз В. В. _____
(підпис)

Рецензент: канд. техн. наук, доц. Мазурок І.Є.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ____ . ____ . 20__ р.

Завідувач(ка) кафедри

(підпис)

(прізвище, ім'я)

Захищено на засіданні ЕК № _____

протокол № __ від ____ . ____ . 20__ р.

Оцінка _____ / _____ / _____
(за національною шкалою/шкалою ECTS/бали)

Голова ЕК

(підпис)

(прізвище, ім'я)

Одеса 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Огляд дифузійних методів обробки зображень	5
1.1. Фізичне підґрунття дифузії	5
1.2. Рівняння теплопровідності.....	6
1.3. Реалізація рівняння теплопровідності	7
1.4. Властивості методу	8
1.5. Анізотропна дифузія	9
1.6. Покращення чіткості контурів.....	10
1.7. Вибір коефіцієнта дифузії $c(\cdot)$	11
РОЗДІЛ 2. Реалізація FTCS	14
2.1. Перона-Малік	14
2.2. Перона-Малік з ядром Гауса.....	16
2.3. Інші методи дифузійної фільтрації	17
РОЗДІЛ 3. AOS реалізація.....	19
3.1. Одновимірний випадок.....	19
3.2. Багатовимірний випадок	20
3.3. Двовимірний випадок	22
3.4. Алгоритм тридіагональної матриці.....	26
РОЗДІЛ 4. Порівняльний аналіз методів дифузійної фільтрації.....	28
4.1. Завдання 1. Фільтрація на основі FTCS.....	28
4.2. Завдання 1. Фільтрація на основі AOS	31
4.3. Завдання 2. Фільтрація на основі FTCS.....	33
4.4. Завдання 2. Фільтрація на основі AOS	34
ВИСНОВКИ.....	37
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	39

ВСТУП

Сучасний розвиток обробки інфрачервоних зображень є важливим напрямком наукових досліджень, особливо в контексті військових застосувань. Зокрема, дана робота присвячена вивченню та оцінці методів обробки інфрачервоних зображень з використанням дифузійних підходів.

Актуальність цієї теми зумовлена великою потребою сучасних військових систем у високоточних і швидких алгоритмах обробки зображень, які забезпечують надійність і ефективність таких функцій, як виявлення та відстеження об'єктів, автоматичне визначення та ідентифікація цілей, а також наведення автономних транспортних засобів.

Обробка зображень є базовою технологією для багатьох військових систем. Застосування військових алгоритмічних рішень в умовах відкритих сцен у вразливих, неконтрольованих середовищах ставить перед системою обробки зображень складні та високотехнологічні завдання, що вимагають великих обчислювальних потужностей [5].

Інфрачервона фотографія – це техніка фотозйомки, в якій використовується спеціальна фотоплівка або матриця цифрового фотоапарата, чутливі до інфрачервоного світлового випромінювання; використовується спеціальний фільтр для цифрового фотоапарата, який пропускає інфрачервоне світло, але блокує видиму частину спектру. Хвильовий діапазон, який використовується в такій фотографії, лежить в межах від 700 до 900 нм. Інфрачервона термографія – теплове зображення або теплове відео – зображення в інфрачервоних променях, що показує картину розподілу температурних полів. Термографічні камери – тепловізори – реєструють випромінювання в інфрачервоному діапазоні електромагнітного спектра і на цій основі створюють термографічні зображення.

Мета роботи полягає в аналізі методів дифузійної фільтрації, їх реалізації двома різними числовими методами: методом прямого часу – центрованого

простору (forward time – centered space) і методом розщеплення адитивного оператора (additive operator splitting) та у пошуку варіантів оптимального вибору параметрів для градієнтного порогу K , величини кроку часу Δt і кількості часових кроків T .

Предмет дослідження – методи обробки інфрачервоних зображень.
Об'єктом дослідження є методи дифузійної фільтрації цифрових зображень.

Подальші розділи концентруються на методах дифузійної фільтрації та їх реалізації. Розділ 1 розпочинається з лінійної дифузійної фільтрації та фізичного підґрунтя цього методу. Розглядаються переваги та недоліки цього базового методу. Потім в ньому ж розглядаються нелінійні чи анізотропні методи дифузійної фільтрації. Всі розглянуті методи аналізуються в наступних розділах.

Розділ 2 описує реалізацію методу прямого часу – центрованого простору (FTCS) для різних методів дифузійної фільтрації. Розділ 3 фокусується на реалізації за допомогою іншого числового методу – методі розщеплення адитивного оператора (AOS). У розділі 4 проводиться порівняльний аналіз всіх раніше оглянутих методів та реалізацій.

РОЗДІЛ 1. Огляд дифузійних методів обробки зображень

Інфрачервоні зображення, отримані за допомогою військових систем, ймовірно будуть містити шум. Спосіб зменшення шуму на зображеннях – це дифузійна фільтрація, яка є основною темою цієї роботи. Найбільш базова форма дифузійної фільтрації – це лінійна дифузія, яка є першим об'єктом нашої уваги.

1.1. Фізичне підґрунття дифузії

Дифузія – це процес досягнення рівноваги концентрацій об'єктів без втрати або створення маси. Частки рухаються від області вищої концентрації до області нижчої концентрації через випадкові рухи, щоб досягти цього стану рівноваги. Властивість рівноваги визначається першим законом Фіка:

$$J = -D \cdot \nabla u \quad (1.1)$$

Це рівняння встановлює зв'язок між потоком дифузії J та градієнтом концентрації ∇u . D є коефіцієнтом дифузії.

Оскільки маса не знищується та не створюється, рівняння неперервності також має важливе значення:

$$\partial_t u = -\operatorname{div} J \quad (1.2)$$

З цього можна вивести рівняння дифузії:

$$\partial_t u = \operatorname{div}(D \cdot \nabla u) \quad (1.3)$$

Рівняння дифузії можна застосувати до багатьох процесів. Встановивши u як відтінок замість концентрації, можна застосувати це рівняння до обробки зображень. Спочатку припустимо, що дифузія не залежить від змінюваного зображення, і встановлено $D = 1$. Це приводить до лінійної дифузії. Далі припустимо, що D – це функція, залежна від $|\nabla u|$, що приводить до нелінійних або анізотропних дифузійних фільтрів.

1.2. Рівняння теплопровідності

При $D = 1$, рівняння дифузії у двовимірному просторі набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \operatorname{div}(\nabla u) \\ &= \Delta u \\ &= \partial_{xx} u + \partial_{yy} u\end{aligned}\tag{1.4}$$

Що також відомо як рівняння теплопровідності. При використанні рівняння теплопровідності як методу фільтрації для зображень, воно задовольняє двом критеріям:

- наслідковість: будь-які особливості на грубому рівні повинні бути викликані особливостями на більш дрібному рівні. Це означає, що на грубому рівні не можуть бути введені нові особливості.
- однорідність і ізотропія: розмиття просторово незмінне. Розмиття – це зникнення зображення через дифузію. Цей критерій стверджує, що кожна частина зображення зникає подібно.

Критерій наслідковості вказує на те, що на більш грубому рівні не можуть бути введені нові особливості. Іншими словами, в зображеннях, крім початкового, не можуть створюватися нові мінімуми або максимуми. Цей критерій може бути перевірений за допомогою Принципу максимуму. Цей принцип стверджує, що всі мінімуми та максимуми рішення існують в початковому зображенні та на його границях. Оскільки рівняння теплопровідності задовольняє цьому принципу, можна зробити висновок, що на більш грубих рівнях не можуть виникати нові мінімуми та максимуми, що відповідає критерію наслідковості.

1.3. Реалізація рівняння теплопровідності

Для імплементації рівняння теплопровідності буде використано метод FTCS, другого порядку за простором і першого порядку за часом. Цей метод використовує праву різницю для оцінки похідної за часом і центральну різницю для просторових похідних:

$$\begin{aligned}\partial_t u(x_i, y_j, t_k) &\approx \frac{1}{\Delta t} (u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k) \\ \partial_{xx} u(x_i, y_j, t_k) &\approx \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k) \\ \partial_{yy} u(x_i, y_j, t_k) &\approx \frac{1}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Підставивши це у рівняння теплопровідності і встановивши $\Delta y = \Delta x$ та $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, можна отримати наступну числову схему:

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \mu (u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k) \quad (1.6)$$

Кількість пікселів у напрямку x дорівнює кількості пікселів у напрямку y і позначається n . На границях припустимо однорідні умови Неймана: $\partial u / \partial \vec{n} = 0$, \vec{n} – нормаль до границі. Тоді отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\vec{U}^{k+1} = (I - \mu A) \vec{U}^k \quad (1.7)$$

де

$$A_{n^2 \times n^2} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_3 & A_1 & A_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_3 & A_1 & A_3 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,n \times n} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{2,n \times n} = 2I$$

$$A_{3,n \times n} = I$$

$$\vec{U} = [U_{1,1} \dots U_{n,1}, U_{1,2} \dots U_{n,2}, \dots U_{1,n} \dots U_{n,n}]^T$$

та I – одинична матриця розміром $n \times n$.

1.4. Властивості методу

Далі розглянемо стійкість методу. Щоб визначити найбільше можливе значення $\mu = \Delta t / \Delta x^2$, яке гарантує стійкість, використовується теорема про кола Гершгорина. У [6] вона формулюється наступним чином:

Теорема про кола Гершгорина:

Власні значення комплексної квадратної матриці A з елементами $a_{i,j}$ належать об'єднанню кіл:

$$|c - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i, j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{with } c \in \mathbb{C}$$

Застосовуючи цю теорему до матриці A , можна побачити, що $\lambda \leq 8$. Нехай $\lambda_{\max} = 8$ і $\Delta x = 1$, що означає, що $\mu = \Delta t$. З (1.7) можна побачити, що потрібно для стійкості:

$$\begin{aligned} |1 - \Delta t \lambda| &\leq 1 \\ -1 &\leq 1 - \Delta t \lambda \leq 1 \\ -2 &\leq -\Delta t \lambda \quad \text{i} \quad -\Delta t \lambda \leq 0 \\ \Delta t &\leq \frac{2}{\lambda} \quad \text{i} \quad \Delta t \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Оскільки $\lambda \geq 0$ і $\lambda_{\max} = 8$, можна зробити висновок, що метод є стійким для $0 < \Delta t \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Таким чином, при реалізації цього методу потрібно враховувати, що кроки часу мають бути менші чи рівні 0,25.

1.5. Анізотропна дифузія

У попередніх підрозділах рівняння теплопровідності було використано як метод фільтрації зображень. Як відомо з літератури, великим недоліком цього методу є просторово незмінне розмиття. Це означає, що границі не зберігаються, а края зображення втрачають свою чіткість.

Для подолання цієї проблеми критерій "однорідності та ізоотропії", згаданий раніше, замінюється двома іншими критеріями. Новий метод повинен задовольняти наступним трьом критеріям:

- наслідковість: будь-які особливості на грубому рівні повинні бути викликані особливостями на більш дрібному рівні.
- негайна локалізація: на кожному рівні границі повинні мати чіткість, властиву цьому рівню.
- часткове згладжування: це означає, що на кожному рівні згладжування всередині області відбувається перед згладжуванням між областями.

Щоб досягти цих критеріїв, можна налаштувати коефіцієнт дифузії D у рівнянні (1.3). Рівняння теплопровідності було отримано встановленням $D = 1$, але не обов'язково, щоб D було константою. Дозволяючи йому бути відповідною функцією від $|\nabla u|$, можна задовольнити три критерії, згадані вище:

Нехай $D = c(|\nabla u|)$, тоді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla u|)\nabla u), \quad (1.9)$$

де $|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$.

Оскільки це рівняння належить до певного класу еліптичних рівнянь, які задовольняють Принципу максимуму ([7]), можна зробити висновок, що критерій наслідковості досягається незалежно від $c(|\nabla u|)$. Інші два критерії залежать від $c(|\nabla u|)$, що доведено тим фактом, що для $c = 1$ ці критерії не виконуються. Щоб

визначити, які функції є придатними, потрібно розглянути покращення чіткості контурів.

1.6. Покращення чіткості контурів

Мета полягає в тому, щоб визначити, які функції $c(|\nabla u|)$ є придатними для фільтрації зображень з врахуванням чітких границь. Для цього треба слідувати крокам, вказаним у [7]. Будемо розглядати лише випадок одновимірного зображення. Край змодельовано як функцію кроку, складену з Гаусіана (рисунок 1.1).



Рис. 1.1. Крайова модель.

У цьому випадку рівняння (1.9) спрощується до:

$$\partial_t u = \partial_x (c(\partial_x u) \partial_x u) \quad (1.10)$$

Дифузійний потік позначимо як $\varphi(\partial_x u) = c(\partial_x u) \cdot \partial_x u$, тоді отримаємо:

$$\partial_t u = \partial_x \varphi(\partial_x u) = \varphi'(\partial_x u) \cdot \partial_{xx} u \quad (1.11)$$

Тепер розглянемо зміну нахилу краю відносно часу, $\partial_t(\partial_x u)$. Можна припустити, що $c(\cdot) > 0$, тоді $u(\cdot)$ гладка, і порядок диференціювання може бути інвертовано. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_x u) &= \partial_x(\partial_t u) \\ &= \partial_x(\partial_x \varphi(\partial_x u)) \\ &= \partial_x(\varphi'(\partial_x u) \cdot \partial_{xx} u) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$= \varphi''(\partial_x u) \cdot \partial_{xx}^2 u + \varphi'(\partial_x u) \cdot \partial_{xxx} u$$

Припустимо, що край орієнтований, як на рисунку 1.1, зі значенням $\partial_x u > 0$. В цьому випадку $\partial_{xx} u = 0$, і $\partial_{xxx} u \ll 0$ в точці перегибу. З рівняння (1.12) випливає, що $\partial_t(\partial_x u)$ має знак, протилежний знаку $\varphi'(\partial_x u)$. Таким чином, можна зробити висновок, що нахил краю збільшиться для $\varphi'(\partial_x u) < 0$ і зменшиться для $\varphi'(\partial_x u) > 0$.

Цей висновок приводить до наступної властивості порогу для деякого значення порогу τ :

$$\varphi'(\partial_x u) = \begin{cases} > 0, & \partial_x u < \tau \\ < 0, & \partial_x u \geq \tau \end{cases} \quad (1.13)$$

Ця властивість стверджує, що для нахилів країв $\partial_x u$, менших за τ , відбудеться розмиття краю, а для нахилів, більших за τ , край стане більш чітким. Таким чином, правильним вибором τ можна досягнути згладжування всередині області, зберігаючи чіткі краї.

1.7. Вибір коефіцієнта дифузії $s(\cdot)$

При виборі вірного $s(\cdot)$ також важливо враховувати коректність поставленої задачі. [1] досліджує коректність поставленої задачі, мінімізуючи наступну енергетичну функцію:

$$E(u) = \int_{\Omega} F(|\nabla u|) d\Omega = \int_{\Omega} F\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right) d\Omega \quad (1.14)$$

де $F(|\nabla u|)$ – строго зростаюча функція ($F'(|\nabla u|) > 0$).

Енергетична функція є показником гладкості. Тому мінімізація енергетичної функції схожа на згладжування. Мініма енергетичної функції визначається рішенням наступного параболічного рівняння:

$$\partial_t u = \operatorname{div}\left(\frac{F'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u\right) \quad (1.15)$$

що є аналогічним (1.9), якщо коефіцієнт дифузії встановлено як:

$$c(|\nabla u|) = \frac{F'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \quad (1.16)$$

Розглянемо гессіан $F(|\nabla u|)$ та його власні значення. Гессіан визначається як:

$$\begin{bmatrix} \partial_{xx}F(|\nabla u|) & \partial_{yx}F(|\nabla u|) \\ \partial_{xy}F(|\nabla u|) & \partial_{yy}F(|\nabla u|) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

і має власні значення $\lambda_1 = F'(|\nabla u|)/|\nabla u| = c(|\nabla u|)$ та $\lambda_2 = F''(|\nabla u|)$, як зазначено в [2].

Для перевірки коректності поставленої задачі необхідно оцінити поверхню енергетичної функції (1.14) та початкові умови. Коли поверхня функції є опуклою, вона має глобальний мінімум, що означає, що будь-яка початкова точка зходить до цього мінімуму. Тоді задача коректно поставлена. Поверхня є опуклою за умови:

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \text{і} \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \forall \nabla u \quad (1.18)$$

Оскільки $F'(|\nabla u|) > 0$, $\lambda_1 = F'(|\nabla u|)/|\nabla u| \geq 0$ завжди виконується. Таким чином, залишається умова $\lambda_2 = F''(|\nabla u|) \geq 0$ для всіх $|\nabla u|$. Однак $\lambda_2 > 0$ відповідає згладжуванню у напрямку градієнта, що означає розмиття країв. Отже, потрібно встановити $\lambda_2 = 0$, звідки випливає, що $F(|\nabla u|) = |\nabla u|$. Можна зробити висновок, що для коректно поставленої задачі підходить коефіцієнт дифузії:

$$c(|\nabla u|) = \frac{F'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = \frac{1}{|\nabla u|} \quad (1.19)$$

У попередньому підрозділі було визначено порогову властивість для $\phi'(|\nabla u|)$. Ця властивість відповідає методу, який згладжує зображення всередині областей і збільшує чіткість границь. Оскільки $\phi'(|\nabla u|) = \lambda_2 = F''(|\nabla u|)$, можна переписати порогову властивість, задану виразом (1.13), як:

$$\lambda_2 = \begin{cases} > 0, & \partial_x u < \tau \\ < 0, & \partial_x u \geq \tau \end{cases} \quad (1.20)$$

Для цього типу λ_2 задача є некоректно поставленою. Ймовірно, поверхня матиме багато локальних мінімумів, що означає, що зображення можуть збігатися до різних мінімумів.

Тим не менш, найбільш поширеними методами анізотропного фільтрування є ті, що належать до цього типу, через важливість порогової властивості. Перона і Малік ([7]) надали два можливих варіанти функцій, які задовольняють пороговій властивості:

$$c(|\nabla u|) = e^{-(|\nabla u|/K)^2}, (K > 0) \quad (1.21)$$

та

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|/K)^2}, (K > 0) \quad (1.22)$$

Константа K обирається вручну. Оскільки методи Перони-Маліка задовольняють пороговій властивості, вони призводять до некоректно поставлених задач. Їх нестабільність можна зменшити, додавши згладжуючий оператор до коефіцієнта дифузії $c(\cdot)$ ([4]). Прикладом такого згладжуючого оператора є ядро Гауса, що приводить до:

$$\partial_t u = \operatorname{div}(c(|\nabla(G(s) * u)|^2)\nabla u) \quad (1.23)$$

де $G(s)*u$ позначає згортку зображення у час t з гаусівським ядром розміру s . Велике значення s прибирає більше шуму, але призводить до менш чіткого зображення, тоді як мале значення s може викликати нестабільність.

РОЗДІЛ 2. Реалізація FTCS

Усі анізотропні методи були реалізовані двома способами. У цьому розділі буде описаний перший: реалізація методом прямого часу – центрованого простору (FTCS). Спочатку розглянемо реалізацію методу Перони-Маліка, як з ядром Гауса, так і без нього. Реалізація інших анізотропних методів досить схожа і коротко описана в кінці цього розділу.

2.1. Перона-Малік

Згадаємо властивість порогу, зазначену в попередньому розділі:

$$\varphi'(|\nabla u|) = \begin{cases} > 0, & |\nabla u| < \tau \\ < 0, & |\nabla u| \geq \tau \end{cases} \quad (2.1)$$

Де $\phi(s) = c(s)s$, а $c(\cdot)$ – функція дифузії з рівняння (1.9):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) \quad (2.2)$$

Метод, який задовольняє цю властивість, розроблений Пероною та Маліком ([7]). У їх статті зазначено два можливі варіанти $c(\cdot)$:

$$c(|\nabla u|) = e^{-\left(\frac{|\nabla u|}{K}\right)^2}, \quad (K > 0) \quad (2.3)$$

і

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla u|}{K}\right)^2}, \quad (K > 0) \quad (2.4)$$

Щоб реалізувати будь-який метод фільтрації, потрібно апроксимувати рівняння (2.2). Можна записати $c(|\nabla u|)$ як $c(|\nabla u|^2)$, оскільки обидві функції також є функцією від $|\nabla u|^2$. Розглянемо $c(|\nabla u|^2)\nabla u$ та її апроксимації за допомогою центральної різниці другого порядку:

$$\begin{aligned}
c(|\nabla u_{i,j}|^2)\nabla u_{i,j} &= c(|\nabla u_{i,j}|^2)\left[\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}\right]^T \\
&= \left[c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \quad c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right]^T \quad (2.5) \\
&\approx \left[c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{1}{\Delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}) \quad c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{1}{\Delta y}(u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}) \right]^T
\end{aligned}$$

Розглянемо повне рівняння (2.2):

$$\begin{aligned}
\partial_t u &= \operatorname{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) \\
&\approx \operatorname{div}\left(\left[c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{1}{\Delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}) \quad c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{1}{\Delta y}(u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}) \right]^T\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{1}{\Delta x}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j})\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c(|\nabla u_{i,j}|^2)\frac{1}{\Delta y}(u_{i,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}})\right) \\
&\approx \frac{1}{\Delta x}\left(c\left(|\nabla u_{i+\frac{1}{2},j}\right|^2\right)\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) - c\left(|\nabla u_{i-\frac{1}{2},j}\right|^2\right)\frac{1}{\Delta x}(u_{i,j} - u_{i-1,j}) \\
&+ \frac{1}{\Delta y}\left(c\left(|\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}\right|^2\right)\frac{1}{\Delta y}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - c\left(|\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}\right|^2\right)\frac{1}{\Delta y}(u_{i,j} - u_{i,j-1}) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Потрібно оцінити значення для $c\left(|\nabla u_{i\pm\frac{1}{2},j}\right|^2$ і $c\left(|\nabla u_{i,j\pm\frac{1}{2}}\right|^2$. Будемо використовувати стандартну формулу центральної різниці другого порядку для оцінки $\nabla u_{i,j}$, що призводить до:

$$\begin{aligned}
\nabla u_{i,j} &\approx \left[\frac{1}{2\Delta x}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \quad \frac{1}{2\Delta y}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right]^T \\
\Rightarrow |\nabla u_{i,j}|^2 &\approx \frac{1}{(2\Delta x)^2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 + \frac{1}{(2\Delta y)^2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2 \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Всі ці значення відомі і можна вирахувати $c(|u_{i,j}|^2)$ для всіх i, j . Для того, щоб знайти $c\left(|\nabla u_{i\pm\frac{1}{2},j}\right|^2$ і $c\left(|\nabla u_{i,j\pm\frac{1}{2}}\right|^2$ беремо середнє:

$$\begin{aligned}
c\left(\left|\nabla u_{i+\frac{1}{2},j}\right|^2\right) &\approx \frac{1}{2}\left(c(|\nabla u_{i+1,j}|^2) + c(|\nabla u_{i,j}|^2)\right) \\
c\left(\left|\nabla u_{i-\frac{1}{2},j}\right|^2\right) &\approx \frac{1}{2}\left(c(|\nabla u_{i-1,j}|^2) + c(|\nabla u_{i,j}|^2)\right) \\
c\left(\left|\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}\right|^2\right) &\approx \frac{1}{2}\left(c(|\nabla u_{i,j+1}|^2) + c(|\nabla u_{i,j}|^2)\right) \\
c\left(\left|\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}\right|^2\right) &\approx \frac{1}{2}\left(c(|\nabla u_{i,j-1}|^2) + c(|\nabla u_{i,j}|^2)\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Будемо використовувати праві різниці (праві різниці Ейлера першого порядку), щоб оцінити похідну по часу. Встановлюючи $\Delta x = \Delta y = 1$, отримуємо $\mu = \Delta t$, і отримуємо наступну числову схему:

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \Delta t \left(c\left(\left|\nabla u_{i+\frac{1}{2},j}^k\right|^2\right) (u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) - c\left(\left|\nabla u_{i-\frac{1}{2},j}^k\right|^2\right) (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \right) \\
&+ \Delta t \left(c\left(\left|\nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}^k\right|^2\right) (u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) - c\left(\left|\nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}^k\right|^2\right) (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Отримавши значення для функції дифузії з виразів (2.7) та (2.8).

2.2. Перона-Малік з ядром Гауса

Як зазначалося раніше, метод Перони-Маліка призводить до проблеми некоректної постановки. Можна додати оператор згладжування до методу, такий як ядро Гауса, щоб зменшити цю проблему некоректної постановки ([4]):

$$\partial_t u = \operatorname{div}(c(|\nabla(G(s) * u)|^2)\nabla u) \tag{2.10}$$

де $G(s) * u$ позначає згортку зображення в момент часу t з гаусіаном розміру s .

Реалізація досить схожа на реалізацію в попередньому підрозділі. Є лише одна відмінність: замість $c(|\nabla(u)|^2)$ маємо $c(|\nabla(G(s) * u)|^2)$. Це означає, що замість обчислення норми градієнту u , потрібно обчислити норму градієнту згортки u .

Позначимо $\tilde{u} = G(s) * u$. Тоді числова схема подібна до попередньої, але замість u маємо \tilde{u} :

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} = & u_{i,j}^k + \Delta t \left(c \left(\left| \nabla \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^k \right|^2 \right) (\tilde{u}_{i+1,j}^k - \tilde{u}_{i,j}^k) - c \left(\left| \nabla \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^k \right|^2 \right) (\tilde{u}_{i,j}^k - \tilde{u}_{i-1,j}^k) \right) \\ & + \Delta t \left(c \left(\left| \nabla \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^k \right|^2 \right) (\tilde{u}_{i,j+1}^k - \tilde{u}_{i,j}^k) - c \left(\left| \nabla \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right|^2 \right) (\tilde{u}_{i,j}^k - \tilde{u}_{i,j-1}^k) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3. Інші методи дифузійної фільтрації

У [1] було згадано ще два коефіцієнти дифузії $c(\cdot)$. Один з цих методів приводить до коректно поставленої задачі:

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u|} \quad (2.12)$$

Інший коефіцієнт дифузії приводить до некоректно поставленої задачі:

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{N} |\nabla u|^{\frac{1}{N}-2}, \quad N > 1 \quad (2.13)$$

Реалізація знову досить схожа на реалізацію моделі Перони-Маліка. Однак у цьому випадку незручно писати $c(|\nabla u|^2)$ замість $c(|\nabla u|)$, оскільки функції є лише функціями від $|\nabla u|$. Обчислюємо $|\nabla u|$, взявши квадратний корінь від рівняння (2.7):

$$\begin{aligned} \nabla u_{i,j} & \approx \left[\frac{1}{2\Delta x} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \quad \frac{1}{2\Delta y} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \right]^T \\ \Rightarrow \quad |\nabla u_{i,j}| & \approx \sqrt{\frac{1}{(2\Delta x)^2} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 + \frac{1}{(2\Delta y)^2} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Після встановлення $\Delta x = \Delta y = 1$, числова схема подібна до (2.9):

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{k+1} &= u_{i,j}^k + \Delta t \left(c \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2},j}^k \right| \right) (u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) - c \left(\left| \nabla u_{i-\frac{1}{2},j}^k \right| \right) (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) \right) \\
&+ \Delta t \left(c \left(\left| \nabla u_{i,j+\frac{1}{2}}^k \right| \right) (u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) - c \left(\left| \nabla u_{i,j-\frac{1}{2}}^k \right| \right) (u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \right) \quad (2.15)
\end{aligned}$$

зі значеннями для функції дифузії знову отриманими за допомогою (2.14) та взяттям середнього значення:

$$\begin{aligned}
c \left(\left| \nabla u_{i+\frac{1}{2},j} \right| \right) &\approx \frac{1}{2} \left(c(|\nabla u_{i+1,j}|) + c(|\nabla u_{i,j}|) \right) \\
c \left(\left| \nabla u_{i-\frac{1}{2},j} \right| \right) &\approx \frac{1}{2} \left(c(|\nabla u_{i-1,j}|) + c(|\nabla u_{i,j}|) \right) \\
c \left(\left| \nabla u_{i,j+\frac{1}{2}} \right| \right) &\approx \frac{1}{2} \left(c(|\nabla u_{i,j+1}|) + c(|\nabla u_{i,j}|) \right) \\
c \left(\left| \nabla u_{i,j-\frac{1}{2}} \right| \right) &\approx \frac{1}{2} \left(c(|\nabla u_{i,j-1}|) + c(|\nabla u_{i,j}|) \right) \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Через ділення на $|\nabla u|$, методи схильні розходитися, коли $|\nabla u|$ наближається до нуля. Це відбувається, коли сусідні пікселі мають майже ідентичне значення. Щоб вирішити цю проблему, можна встановити $c(|\nabla u|)$ за наступною схемою для певної константи $K > 0$:

$$c(|\nabla u|) = \begin{cases} \frac{1}{|\nabla u|}, & |\nabla u| \geq K \\ \frac{1}{K}, & |\nabla u| < K \end{cases} \quad (2.17)$$

і

$$c(|\nabla u|) = \begin{cases} \frac{1}{N} |\nabla u|^{\frac{1}{N}-2}, & |\nabla u| \geq K, N > 1 \\ \frac{1}{N} K^{\frac{1}{N}-2}, & |\nabla u| < K, N > 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Таким чином, буде зберігатися неперервність $c(|\nabla u|)$, і правильним вибором K можна зберегти результати оригінальних методів, без розходження до нестабільного розв'язку.

РОЗДІЛ 3. AOS реалізація

Ще один спосіб реалізації нелінійних методів дифузії – використання адитивного оператора (AOS). Ця схема використовує адитивний оператор, що забезпечує однакову обробку всіх координатних осей. Схема задовольняє принципу максимуму і збігається до сталого стаціонарного стану. Цю схему можна використовувати для всіх методів, єдина відмінність – коефіцієнт дифузії $c(\cdot)$.

3.1. Одновимірний випадок

Згадаємо рівняння нелінійної дифузії, наведене у (1.9):

$$\partial_t u = \operatorname{div}(c(|\nabla u|)\nabla u) \quad (3.1)$$

Спершу розглянемо одновимірний випадок [3]. Рівняння (3.1) перетворюється на:

$$\partial_t u = \partial_x(c(|\partial_x u|)\partial_x u) \quad (3.2)$$

Апроксимацію цього одновимірного рівняння можна отримати наступним чином, використовуючи перший порядок центральної різниці:

$$\begin{aligned} \partial_t u_i &= \partial_x(c(u_i)\partial_x u_i) \\ &\approx \frac{1}{h} \left(c\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) \partial_x u_{i+\frac{1}{2}} - c\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right) \partial_x u_{i-\frac{1}{2}} \right) \\ &\approx \frac{1}{h} \left(c\left(u_{i+\frac{1}{2}}\right) \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - c\left(u_{i-\frac{1}{2}}\right) \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \\ &\approx \frac{1}{h^2} \left(\frac{c(u_{i+1}) + c(u_i)}{2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{c(u_{i-1}) + c(u_i)}{2} (u_i - u_{i-1}) \right) \\ &= \frac{c(u_{i+1}) + c(u_i)}{2h^2} (u_{i+1} - u_i) + \frac{c(u_{i-1}) + c(u_i)}{2h^2} (u_{i-1} - u_i) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Використовуючи прямий метод Ейлера для похідної по часу, отримуємо наступну дискретизацію, відому як схема Перони-Маліка:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \sum_{j \in N(i)} \frac{c_j^k + c_i^k}{2h^2} (u_j^k - u_i^k) \quad (3.4)$$

де

$$u_i^k \approx u(x_i, t_k),$$

$N(i)$ – множина двох сусідніх пікселів пікселя i у напрямку x , і

$$c_i^k \approx c(|\partial_x u(x_i, t_k)|^2), \text{ що визначається як } c_i^k := c\left(\left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right)^2\right).$$

Підставляючи $u_{i,j}^{k+1}$ замість $u_{i,j}^k$, можна модифікувати явну схему до наступної напівімпліцитної схеми:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \sum_{j \in N(i)} \frac{c_j^k + c_i^k}{2h^2} (u_j^{k+1} - u_i^{k+1}) \quad (3.5)$$

Використовуючи матрично-векторну форму запису, можна переписати це як:

$$\frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t} = A(\vec{U}^k) \cdot \vec{U}^{k+1} \quad (3.6)$$

що має наступне рішення:

$$\vec{U}^{k+1} = \left(I - \Delta t A(\vec{U}^k)\right)^{-1} \vec{U}^k \quad (3.7)$$

де

$$A(\vec{U}^k) = \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} -2(c_1 + c_2) & 2(c_1 + c_2) & 0 & \dots & 0 \\ c_1 + c_2 & -c_1 - 2c_2 - c_3 & c_2 + c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{n-2} + c_{n-1} & -c_{n-2} - 2c_{n-1} - c_n & c_{n-1} + c_n \\ 0 & \dots & 0 & 2(c_{n-1} + c_n) & -2(c_{n-1} + c_n) \end{bmatrix}$$

3.2. Багатовимірний випадок

У багатовимірному випадку можна отримати аналогічне рішення [3].
Нелінійне рівняння дифузії в m вимірах має вигляд:

$$\partial_t u = \sum_{l=1}^m \partial_{x_l} (c(|\nabla u|^2) \partial_{x_l} u) \quad (3.8)$$

Використовуючи той самий підхід, що і для одновимірного випадку, отримуємо наступну явну схему:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \sum_{l=1}^m \sum_{j \in N(i)} \frac{c_j^k + c_i^k}{2h^2} (u_j^k - u_i^k) \quad (3.9)$$

Знову ж таки з невеликою модифікацією отримуємо напівімпліцитну схему:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \sum_{l=1}^m \sum_{j \in N(i)} \frac{c_j^k + c_i^k}{2h^2} (u_j^{k+1} - u_i^{k+1}) \quad (3.10)$$

Використовуючи матрично-векторну форму запису, можна переписати це як:

$$\frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t} = \sum_{l=1}^m A_l(\vec{U}^k) \cdot \vec{U}^{k+1} \quad (3.11)$$

із його рішенням:

$$\begin{aligned} \vec{U}^{k+1} &= \left(I - \Delta t \sum_{l=1}^m A_l(\vec{U}^k) \right)^{-1} \vec{U}^k \\ &= \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{m} (I - \Delta t m A_l(\vec{U}^k)) \right)^{-1} \vec{U}^k \end{aligned} \quad (3.12)$$

Щоб отримати схему адитивного розщеплення операторів (AOS), це рішення було трохи змінено. Замість взяття всієї оберненої суми, додаємо обернення операторів $B_l(\vec{U}^k) = I - \Delta t m A_l(\vec{U}^k)$. Це означає, що схема AOS буде визначатися так:

$$\vec{U}^{k+1} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \left(I - \Delta t m A_l(\vec{U}^k) \right)^{-1} \vec{U}^k \quad (3.13)$$

Розв'язок, отриманий за допомогою методу AOS, трохи відрізняється від результату (3.12), але має такий самий порядок апроксимації. Оператори $B_l(\vec{U}^k) =$

$I - \Delta t m A_l(\vec{U}^k)$ описують одновимірні процеси дифузії вздовж вісей x_l . При правильному виборі пікселів, вони є строго діагонально домінуючими тридіагональними матрицями, що спрощує вирішення проблеми.

Ще однією перевагою методу AOS є те, що ця схема є стійкою для всіх значень кроку $\Delta t > 0$, як показано в [10]. Це означає, що можливо отримати адекватні результати вже за один крок часу.

3.3. Двовимірний випадок

Інфрачервоні зображення є двовимірними: з віссю x та віссю y . Тому розглянемо 2D випадок методу AOS детально, використовуючи деяку теорію з [8].

Як зазначено в попередньому підрозділі, маємо таке напівімпліцитне наближення рівняння дифузії.

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} = \sum_{l=1}^m \sum_{j \in N(i)} \frac{c_j^k + c_i^k}{2h^2} (u_j^{k+1} - u_i^{k+1}) \quad (3.14)$$

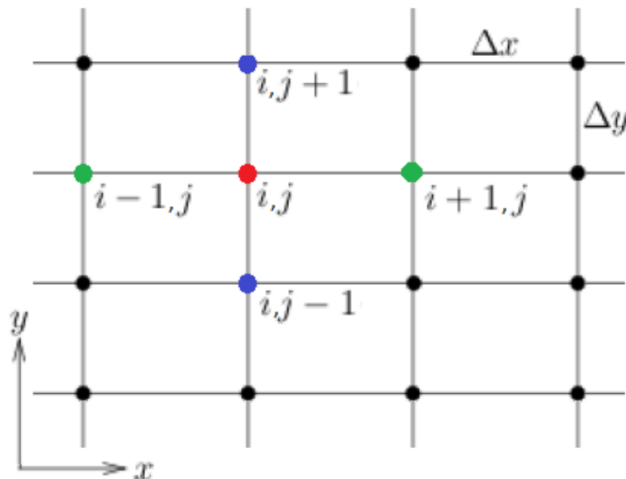


Рис. 3.1: Дискретизація зображення: зелені точки – сусіди за віссю x , сині точки – сусіди за віссю y

При дискретизації зображення, як показано на рисунку 3.1, можна переписати це наступним чином:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} &= \frac{c_{i-1,j}^k + c_{i,j}^k}{2h^2} (u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) + \frac{c_{i+1,j}^k + c_{i,j}^k}{2h^2} (u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) \\
&+ \frac{c_{i,j-1}^k + c_{i,j}^k}{2h^2} (u_{i,j-1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) + \frac{c_{i,j+1}^k + c_{i,j}^k}{2h^2} (u_{i,j+1}^{k+1} - u_{i,j}^{k+1}) \\
c_{W_{i,j}} &= \frac{c_{i-1,j}^k + c_{i,j}^k}{2h^2}, & c_{E_{i,j}} &= \frac{c_{i+1,j}^k + c_{i,j}^k}{2h^2}, \\
c_{S_{i,j}} &= \frac{c_{i,j-1}^k + c_{i,j}^k}{2h^2}, & c_{N_{i,j}} &= \frac{c_{i,j+1}^k + c_{i,j}^k}{2h^2} \\
\Rightarrow u_{i,j}^k &= (1 + \Delta t(c_W + c_E + c_S + c_N))u_{i,j}^{k+1} \\
-\Delta t c_W u_{i-1,j}^{k+1} - \Delta t c_E u_{i+1,j}^{k+1} - \Delta t c_S u_{i,j-1}^{k+1} - \Delta t c_N u_{i,j+1}^{k+1} & \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Запис $c_{\{W,E,S,N\}_{i,j}}$ походить від напрямків заходу (west), сходу (east), півдня (south) та півночі (north). Можна записати це рівняння у матрично-векторній формі, що призводить до наступного:

$$\begin{aligned}
\vec{U}^k &= A(I - \Delta t A) \cdot \vec{U}^{k+1} \\
\Rightarrow \vec{U}^{k+1} &= (I - \Delta t A)^{-1} \vec{U}^k \quad (3.16)
\end{aligned}$$

де

$$A_{n^2 \times n^2} = \begin{bmatrix} A_{C1,p=1} & 2A_{N,p=1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{S,p=2} & A_{C2,p=2} & A_{N,p=2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{S,p=n-1} & A_{C2,p=n-1} & A_{N,p=n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2A_{S,p=n} & A_{C3,p=n} \end{bmatrix}$$

$$A_{C1,p,n \times n} =$$

$$\begin{bmatrix} -2c_{E,1,p} - 2c_{N,1,p} & 2c_{E,1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{W,n-1,p} & -c_{W,n-1,p} - c_{E,n-1,p} - 2c_{N,n-1,p} & c_{E,n-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & 2c_{W,n,p} & -2c_{W,n,p} - 2c_{N,n,p} \end{bmatrix}$$

$$A_{C2,p,n \times n} =$$

$$\begin{bmatrix} -2c_{E,1,p} - 2c_{S,1,p} - c_{N,1,p} & 2c_{E,1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{W,n-1,p} & -(c_W + c_E + c_S + c_N)_{n-1,p} & c_{E,n-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & 2c_{W,n,p} & -2c_{W,n,p} - 2c_{N,n,p} \end{bmatrix}$$

$$A_{C3,p,n \times n} =$$

$$\begin{bmatrix} -2c_{E,1,p} - 2c_{S,1,p} & 2c_{E,1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{W,n-1,p} & -c_{W,n-1,p} - c_{E,n-1,p} - 2c_{S,n-1,p} & c_{E,n-1,p} \\ 0 & \dots & 0 & 2c_{W,n,p} & -2c_{W,n,p} - 2c_{N,n,p} \end{bmatrix}$$

$$A_{N/S,p,n \times n} = \begin{bmatrix} c_{N/S,1,p} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_{N/S,n-1,p} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{N/S,n,p} \end{bmatrix}$$

$$\vec{U} = [u_{1,1} \quad \dots \quad u_{n,1}; \quad u_{1,2} \quad \dots \quad u_{n,2}; \quad \dots; \quad u_{1,n} \quad \dots \quad u_{n,n}]^T$$

Треба зауважити, що $c_{N,i,j} = c_{S,i,j+1}$ і, отже, $A_{N,p=1} = A_{S,p=2}$. Аналогічно, $c_{E,i,j} = c_{W,i+1,j}$.

Матриця A розглядається як матриця для обох осей і не є тридіагональною матрицею, що може призвести до довгого часу обчислень при розв'язанні системи. Як зазначено в попередньому підрозділі, можна отримати тридіагональну матрицю A_l для кожного напрямку, вибравши правильну нумерацію пікселів.

Розглянемо нумерацію пікселів, показану на рисунку 3.2. Лівий рисунок – це стандартна нумерація пікселів, а правий рисунок надає її транспонування. Можна побачити, що сусіди в напрямку x стають сусідами в напрямку y , і навпаки. Це може бути використано для отримання двох тридіагональних матриць $A_{1,2}$.

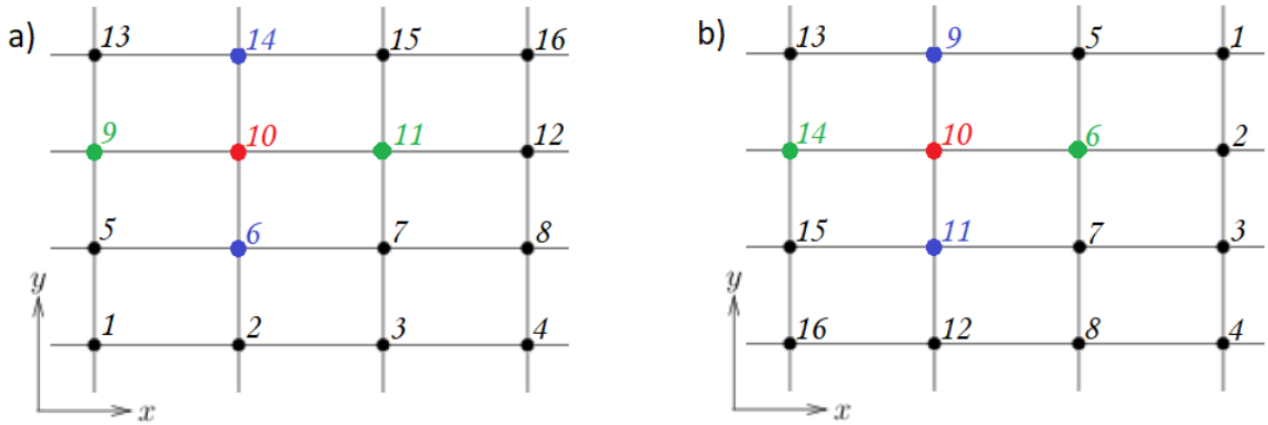


Рис. 3.2: а) оригінальна нумерація, б) транспонована оригінальна нумерація

Спочатку розглянемо оригінальну нумерацію і подивимося на кожний ряд окремо. Враховуючи тільки сусідів у напрямку x , проблему можна спростити до n одновимірних проблем. Матриця A_1 , що відповідає напрямку x , має:

$$A_{1,n^2 \times n^2} = \begin{bmatrix} A_{1D,p=1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{1D,p=n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{1D,p=n} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Матриця $A_{1D,p}$ є матрицею A для одновимірного випадку, згадану в першому підрозділі цього розділу:

$$A_{1D,p,n \times n} = \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} -2c_{E,1,p} & 2c_{E,1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{W,2,p} & -c_{W,2,p} - c_{E,2,p} & c_{E,2,p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{W,n-1,p} & -c_{W,n-1,p} - c_{E,n-1,p} & c_{E,n-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & 2c_{W,n,p} & -2c_{W,n,p} \end{bmatrix}$$

Тепер розглянемо правий рисунок із транспонованим нумераційним порядком. Сусіди у напрямку y тепер стали сусідами у напрямку x . Таким чином, використовуючи ту саму тридіагональну матрицю A_1 для транспонованого нумераційного порядку, можна отримати розв'язок для напрямку y .

Згадуючи схему AOS, наведену у (3.13):

$$\vec{U}^{k+1} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \left(I - \Delta t m A_l(\vec{U}^k) \right)^{-1} \vec{U}^k \quad (3.18)$$

Використовуючи як оригінальний, так і транспонований порядок нумерації, отримуємо наступне:

$$\begin{aligned} \vec{U}^{k+1} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \left(I - 2\Delta t A_l(\vec{U}^k) \right)^{-1} \vec{U}^k \\ &= \frac{1}{2} \left(I - 2\Delta t A_1(\vec{U}^k) \right)^{-1} \vec{U}^k + \frac{1}{2} \left(I - 2\Delta t A_1(\vec{U}_{tr}^k) \right)^{-1} \vec{U}_{tr}^k \end{aligned} \quad (3.19)$$

де \vec{U}_{tr} – це значення пікселя у векторній формі запису відповідно до транспонованого порядку нумерації.

3.4. Алгоритм тридіагональної матриці

Оскільки $B_l(\vec{U}^k) = I - \Delta t m A_l(\vec{U}^k)$ є строго діагонально домінуючими тридіагональними матрицями, можна використовувати алгоритм тридіагональної матриці (TDMA) (також відомий як метод прогонки та алгоритм Томаса) для знаходження розв'язку за лінійний час.

Алгоритм TDMA складається з двох частин: прямого та зворотнього ходу.

Розглянемо наступну систему з тридіагональною матрицею:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Тепер розглянемо наступну модифікацію перших двох рівнянь (прямий хід):

$$\begin{aligned} &Eq_{i=2} b_1 - Eq_{i=1} a_2 \\ \Rightarrow &(b_1 b_2 - c_1 a_2) x_2 + b_1 c_2 x_3 = b_1 y_2 - a_2 y_1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Завдяки такій модифікації вдалося позбутися x_1 у рівнянні. Цей процес можна повторювати до рівняння для $i = n$. Кінцеве рівняння буде містити лише невідоме

x_n і може бути використане для розв'язку модифікованого рівняння для $i = n-1$ і так далі. На етапі зворотної підстановки отримується загальний розв'язок x .

Загальний алгоритм виглядає наступним чином:

$$\beta_1 = b_1$$

$$\gamma_1 = y_1/\beta_1$$

For $i = 2, \dots, n$

$$\beta_i = b_i - (a_i c_{i-1}/\beta_{i-1})$$

$$\gamma_i = (y_i - a_i \gamma_{i-1})/\beta_i$$

End

$$x_n = \gamma_n$$

For $j = 1, \dots, n - 1$

$$x_{n-j} = \gamma_{n-j} - c_{n-j} x_{n-j+1}/\beta_{n-j}$$

End

Метод тридіагональної матриці має одне обмеження: його можна використовувати лише тоді, коли

$$|b_i| > |a_i| + |c_i|, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

Оскільки наша матриця B_l строго діагонально-домінуюча, вона задовольняє цю вимогу.

РОЗДІЛ 4. Порівняльний аналіз методів дифузійної фільтрації

Методи дифузійної фільтрації та їх реалізації, описані дотепер, будемо тестувати на двох тестових зображеннях. Для кожного зображення буде створено своє завдання.

Перше завдання створюємо додаванням гауссівського білого шуму до зображення. Гауссівський шум – статистичний шум, що має густину ймовірності, рівну густині ймовірності нормального розподілу, також відомого як розподіл Гаусса. Це досить розповсюджений вид шуму серед цифрових зображень, який з'являється на зображенні переважно при отриманні сенсорного шуму, викликаного поганим освітленням і високою температурою.

У другому завданні будемо використовувати шум "salt-and-pepper", також відомий як імпульсний шум, який є формою шуму, що іноді спостерігається на цифрових зображеннях. Цей шум може виникати внаслідок різких та раптових порушень у сигналі зображення. Він виглядає як рідкісно розташовані білі та чорні пікселі (у нашому випадку для інфрачервоних зображень будемо використовувати інші кольори).

Всі методи були протестовані для кількох значень часового кроку Δt , кількості часових кроків T та параметра K . Щоб визначити, яка комбінація параметрів має найкращі результати для кожного методу і порівняти їх, необхідно розрахувати різницю між розв'язком та оригінальним зображенням [9]. Ця різниця δ обрана як стандартне відхилення шуму на зображенні.

4.1. Завдання 1. Фільтрація на основі FTCS

Спочатку розглянемо результати застосування дифузійної фільтрації на основі методу FTCS. Параметри, використані для тестової задачі, це часовий крок $\Delta t = 0.05, 0.15, 0.25$. Кількість часових кроків $T = 5, 50, 100, 200$. K вибирається як

$K = 0.5, 1, 2$ для всіх методів, крім рівняння теплопровідності, яке не має параметра K . Деякі приклади вирішення (оригінал, зашумлене зображення, розв'язок) представлені на рис. 4.1 – 4.4.



Рис. 4.1. Розв'язок при: $\Delta t = 0.05$, $T = 20$, рівняння теплопровідності



Рис. 4.2. Розв'язок при: $\Delta t = 0.15$, $T = 200$, рівняння теплопровідності

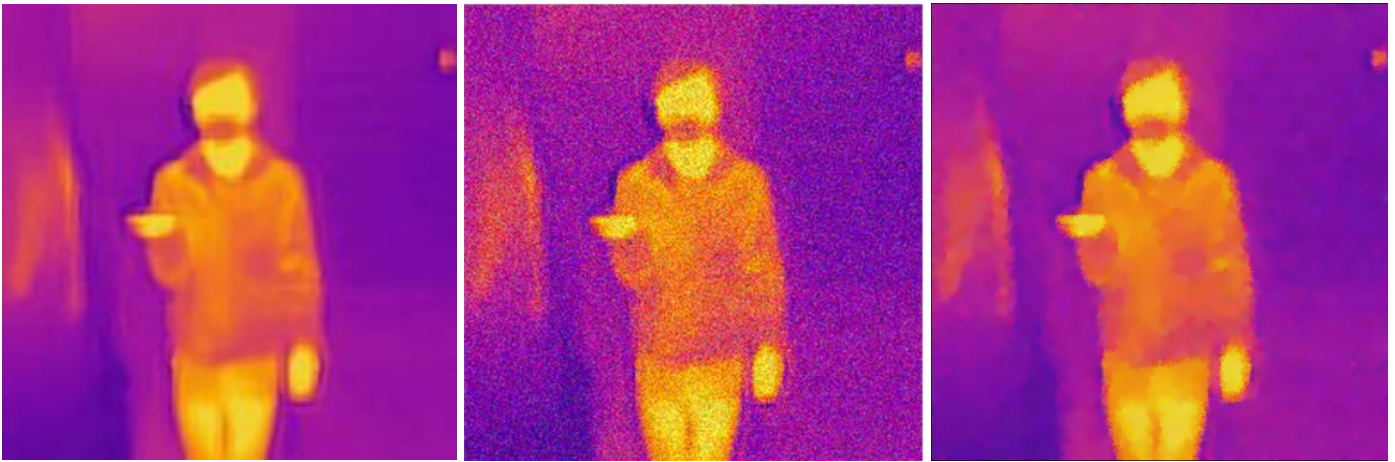


Рис. 4.3. Розв'язок при: $\Delta t = 0.05$, $T = 100$, $K = 2$, Перона-Малік з ядром Гауса



Рис. 4.4. Розв'язок при: $\Delta t = 0.25$, $T = 5$, $K = 1$, Перона-Малік з ядром Гауса

Також було перевірено справедливість обмеження $0 < \Delta t \leq 0.25$ для FTCS. Приклад нестабільного розв'язку з $\Delta t > 0.25$ можна побачити на рисунку 4.5.

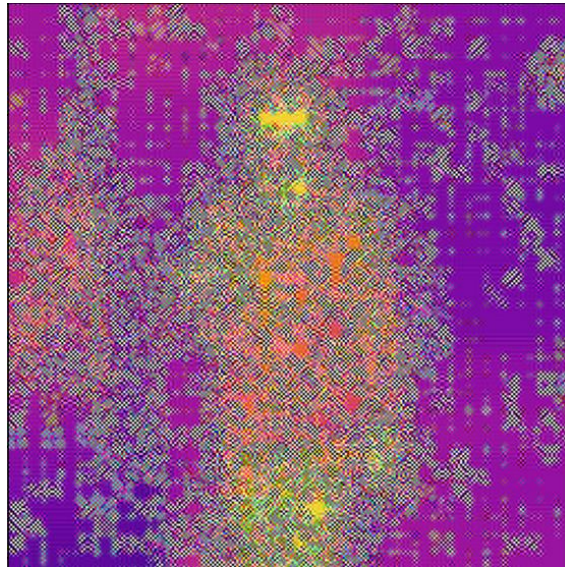


Рис. 4.5. Приклад нестабільного розв'язку методом FTCS з $\Delta t > 0.25$

4.2. Завдання 1. Фільтрація на основі AOS

Тепер розглянемо результати застосування дифузійної фільтрації на основі методу AOS. Параметри, використані для тестової задачі, це часовий крок $\Delta t = 0.5$, 2, 5. Кількість часових кроків $T = 1, 5, 10, 50$. $K = 0.5, 1, 2$. Деякі приклади вирішення (оригінал, зашумлене зображення, розв'язок) представлені на рис. 4.6 – 4.9.



Рис. 4.6. Розв'язок при: $\Delta t = 0.5$, $T = 5$, рівняння теплопровідності

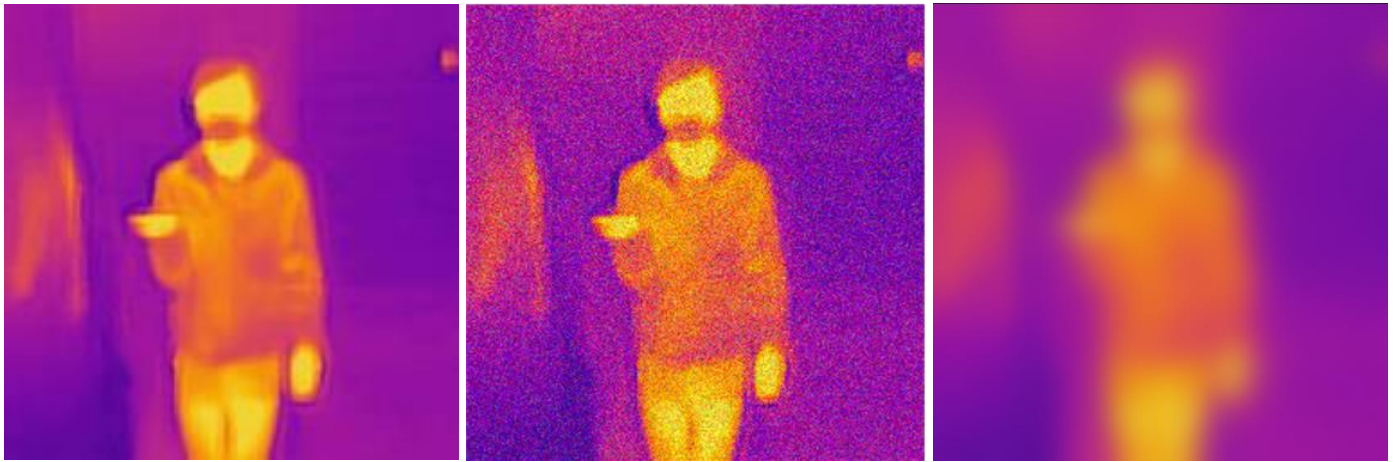


Рис. 4.7. Розв'язок при: $\Delta t = 5$, $T = 10$, рівняння теплопровідності

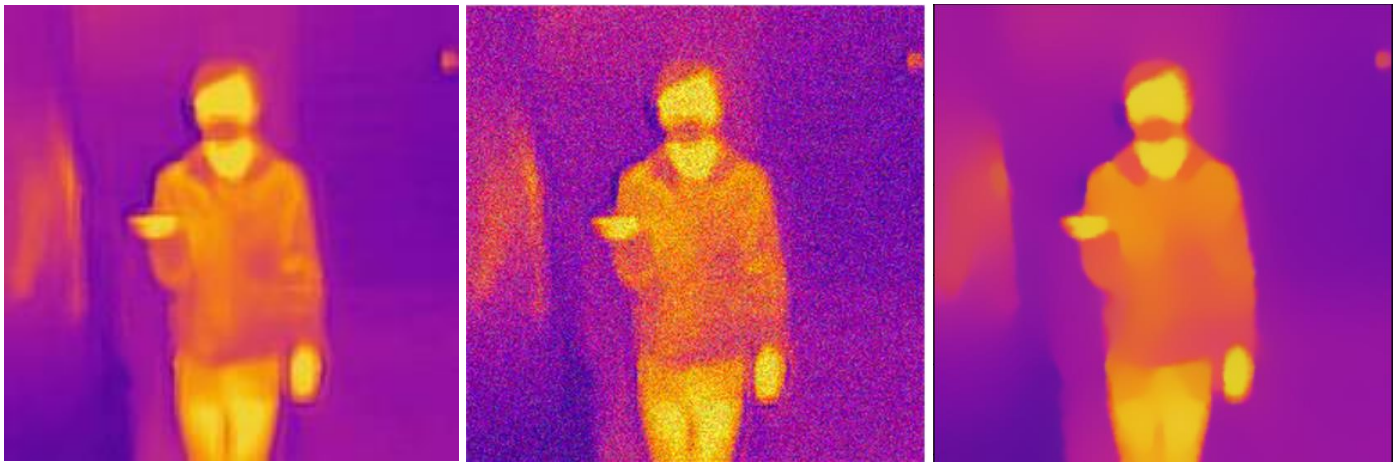


Рис. 4.8. Розв'язок при: $\Delta t = 5$, $T = 20$, $K = 1$, Перона-Малік з ядром Гауса



Рис. 4.9. Розв'язок при: $\Delta t = 2$, $T = 2$, $K = 2$, Перона-Малік з ядром Гауса

В таблиці 4.1 зібрано 4 найкращі розв'язки першого завдання з найменшою різницею між початковим зображенням і розв'язком (по одному найкращому розв'язку для кожної комбінації дифузійного і чисельного методів).

Таблиця 4.1

Найкращі розв'язки завдання №1

Дифузійний метод	Чисельний метод	Δt	T	K	δ
Перона-Малік з ядром Гауса	AOS	5	10	2	0.042
Перона-Малік з ядром Гауса	FTCS	0.15	100	2	0.047
Рівняння теплопровідності	AOS	0.5	5	-	0.054
Рівняння теплопровідності	FTCS	0.15	20	-	0.057

4.3. Завдання 2. Фільтрація на основі FTCS

Розглянемо результати застосування дифузійної фільтрації на основі методу FTCS. Параметри, використані для тестової задачі, це часовий крок $\Delta t = 0.05, 0.15, 0.25$. Кількість часових кроків $T = 5, 50, 100, 200$. $K = 0.5, 1, 2$. Деякі приклади вирішення (оригінал, зашумлене зображення, розв'язок) представлені на рис. 4.10 – 4.13.

Рис. 4.10. Розв'язок при: $\Delta t = 0.25, T = 50$, рівняння теплопровідності



Рис. 4.11. Розв'язок при: $\Delta t = 0.05$, $T = 5$, рівняння теплопровідності



Рис. 4.12. Розв'язок при: $\Delta t = 0.25$, $T = 100$, $K = 2$, Перона-Малік з ядром Гауса



Рис. 4.13. Розв'язок при: $\Delta t = 0.05$, $T = 50$, $K = 0.5$, Перона-Малік з ядром Гауса

4.4. Завдання 2. Фільтрація на основі AOS

Розглянемо результати застосування дифузійної фільтрації на основі методу AOS. Параметри, використані для тестової задачі, це часовий крок $\Delta t = 0.5, 2, 5$.

Кількість часових кроків $T = 1, 5, 10, 50$. $K = 0.5, 1, 2$. Деякі приклади вирішення (оригінал, зашумлене зображення, розв'язок) представлені на рис. 4.14 – 4.17.



Рис. 4.14. Розв'язок при: $\Delta t = 2$, $T = 10$, рівняння теплопровідності



Рис. 4.15. Розв'язок при: $\Delta t = 5$, $T = 50$, рівняння теплопровідності



Рис. 4.16. Розв'язок при: $\Delta t = 5$, $T = 20$, $K = 2$, Перона-Малік з ядром Гауса



Рис. 4.17. Розв'язок при: $\Delta t = 2$, $T = 10$, $K = 0.5$, Перона-Малік з ядром Гауса

В таблиці 4.2 зібрано 4 найкращі розв'язки другого завдання з найменшою різницею між початковим зображенням і розв'язком (по одному найкращому розв'язку для кожної комбінації дифузійного і чисельного методів).

Таблиця 4.2

4 найкращі розв'язки завдання №2

Дифузійний метод	Чисельний метод	Δt	T	K	δ
Перона-Малік з ядром Гауса	AOS	5	20	2	0.049
Перона-Малік з ядром Гауса	FTCS	0.25	200	1	0.054
Рівняння теплопровідності	FTCS	0.25	50	-	0.057
Рівняння теплопровідності	AOS	2	10	-	0.059

ВИСНОВКИ

В роботі розв'язані наступні задачі:

1) Були розглянуті та реалізовані різні дифузійні методи фільтрування з використанням двох числових методів.

2) Проведено порівняльний аналіз різних реалізацій дифузійних методів з використанням зашумлених інфрачервоних зображень.

Спочатку була розглянута найбільш базова методика лінійного дифузійного фільтрування, також відома як рівняння теплопровідності. Оскільки найбільшим недоліком цього методу є однорідне розмиття, були розглянуті інші нелінійні методи дифузійного фільтрування. Використовуючи у якості коефіцієнту дифузії функції замість констант, можна уникнути розмиття країв і покращити їх чіткість. Прикладом такого методу анізотропного дифузійного фільтрування є метод Перони-Маліка. Цей метод задовольняє важливу властивість порогу, що призводить до внутрішньорегіонального розмиття та збереження країв. Проте недоліком цього методу є його нестабільність. Цю нестабільність можна зменшити, додаючи ядро (фільтр) Гауса до методу. Були описані реалізації усіх методів як з використанням FTCS, так і з використанням AOS. Після цього були проведені експерименти з практичним застосуванням і порівнянням методів.

На основі дослідження зроблені наступні висновки:

1) Дифузійні методи можуть бути успішно використані в обробці зашумлених інфрачервоних зображень.

2) Дифузійний анізотропний метод Перони-Маліка з ядром Гауса показав найкращі результати.

3) Реалізація AOS, як правило, призводила до трохи кращих результатів порівняно з методом FTCS і проявляла менше нестабільності (AOS є умовно стабільним для Δt , в той час як FTCS стабільний лише для $0 < \Delta t \leq 0.25$).

4) Хоча час виконання однієї ітерації методу AOS був більшим, ніж у методі FTCS, але для досягнення бажаного результату методом AOS знадобилося менше ітерацій, тому в цілому метод AOS виявився ще й швидшим.

5) Дуже важливе значення відіграє підбір параметрів Δt , T і K . Малі значення параметрів призводять до поганої фільтрації, а занадто великі – до надлишкового розмиття. В той самий час правильно підібрані значення параметрів допомагають отримати якісний результат.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Analysis and Design of Anisotropic Diffusion for Image Processing / You, Y., Kaveh, M., Xu, W., Tannenbaum, A. IEEE Image Processing, 1994: Vol. 2, pp. 497-501.
2. Behavioral Analysis of Anisotropic Diffusion in Image Processing / You, Y., Xu, W., Tannenbaum, A., Kaveh, M. IEEE Transactions on Image Processing, 1996. Vol. 5, no. 11, pp. 1539-1553.
3. Grochulla, M. Additive Operator Splitting. Lecture slides, Saarland University, 2007. URL: https://www.mia.uni-saarland.de/Teaching/NAIA07/naia07_e1_slides.pdf
4. Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion / Catté, F., Lions, P.-L., Morel, J.-M., Coll, T. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992. Vol. 29, no. 1, pp. 182-193.
5. Infrared moving point target detection based on an anisotropic spatial-temporal fourth-order diffusion filter / Hu Zhu, Yusheng Guan, Lizhen Deng, Yansheng Li, Yujie Li. Computers & Electrical Engineering, 2018. Vol. 68, pp. 550-556.
6. Numerical methods for ordinary differential equations / C. Vuik, F.J. Vermolen, M.B. van Gijzen, M.J. Vuik. DAP, Delft Academic Press, Delft, 2015. 123 p.
7. Perona P., Malik J. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion / IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990. Vol. 12, no. 7, pp. 629-639.
8. Ralli, J. PDE Based Image Diffusion and AOS. PhD thesis, University of Granada, 2014.
9. Tsiotsios, C., Petrou, M. On the choice of the parameters for anisotropic diffusion in image processing / Pattern Recognition, 2013. Vol. 46, no. 5, pp. 1369-1381
10. Weickert, J. Anisotropic Diffusion in Image Processing. B.G. Teubner Stuttgart, 1998. 164 p.