

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74B05, 42A38
УДК 539.3

А. Л. Рачинская

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**БЫСТРОЕ ВРАЩЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО
СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ**

Рачинська А. Л. Швидке обертання динамічно несиметричного супутника у гравітаційному полі. Вивчається швидкий обертальний рух відносно центру мас динамічно несиметричного супутника у гравітаційному полі. Рух відбувається по еліптичній орбіті. Проведено чисельне дослідження годографа вектора кінетичного моменту у тривимірному просторі.

Ключові слова: супутник, гравітаційний момент, вектор кінетичного моменту, годограф.

Рачинская А. Л. Быстрое вращение динамически несимметричного спутника в гравитационном поле. Изучается быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника в гравитационном поле. Движение происходит по эллиптической орбите. Проведено численное исследование годографа вектора кинетического момента в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, вектор кинетического момента, годограф.

Rachinskaya A. L. The rapid rotation of a dynamically asymmetric satellite in a gravitational field. We study the rapid rotary motion of the mass center of a dynamically asymmetric satellite in a gravitational field. The motion occurs in an elliptical orbit. A numerical study of the vector locus kinetic moment in three dimensions.

Key words: satellite, gravity moment, the angular momentum vector, hodograph.

ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием момента сил гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, электромагнитных и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1–6].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановка задачи. Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1–3]. Система координат Ox_i ($i = 1, 2, 3$) движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра

масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат Oy_i ($i = 1, 2, 3$) связана с вектором кинетического момента \mathbf{G} . Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента \mathbf{G} , ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат Oz_i ($i = 1, 2, 3$) связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента \mathbf{G} относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ .

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= L_3, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{L_1}{G}, & \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{L_2}{G \sin \delta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= G \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) + \frac{L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi}{G}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \cos \theta \left(\frac{1}{A_3} - \frac{\sin^2 \varphi}{A_1} - \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) + \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G \sin \theta}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= G \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} \right) - \frac{L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi}{G} \operatorname{ctg} \theta - \frac{L_2}{G} \operatorname{ctg} \delta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь L_i ($i = 1, 2, 3$) – моменты внешних сил относительно осей Oy_i , G – величина кинетического момента, A_i ($i = 1, 2, 3$) – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i .

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q . Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q}, \quad (2)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0 , т.е. $\omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил. Для такой модели возмущающего момента вводится малый параметр $\varepsilon \ll 1$ так, чтобы $\omega_0 = \varepsilon \Omega_0$.

Проекция L_i момента внешних сил на оси Oy_i записываются в виде [2]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1 , на другие оси проекции имеют аналогичный вид

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \sum_{j=1}^3 (\beta_2 \beta_j S_{3j} - \beta_3 \beta_j S_{2j}), \\
S_{mj} &= \sum_{p=1}^3 A_p \alpha_{jp} \alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu - \lambda) \cos \delta, \\
\beta_2 &= \sin(\nu - \lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda) \sin \delta.
\end{aligned} \tag{3}$$

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику кинетическую энергию T , производная которой имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{2T}{G} L_3 + G \sin \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right) (L_2 \cos \psi - L_1 \sin \psi) + \right. \\
&\quad \left. + \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right) (L_1 \cos \psi + L_2 \sin \psi) \right].
\end{aligned} \tag{4}$$

Ставится задача исследовать решение системы (1) – (4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [7].

2. Процедура метода усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t . Медленными переменными в возмущенном движении будут $G, \delta, \lambda, T, \nu$, а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ .

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 [8]. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{(A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3)} \quad (0 \leq k^2 \leq 1), \tag{5}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянный модуль эллиптических функций [9], описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо [8] в правые части уравнений (1), (4) и проведем усреднение по переменной ψ , а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных δ, λ, T, G сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{dt} &= -\frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2 (1 + e \cos \nu)^3}{2G(1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 N^*, \\
\frac{dG}{dt} &= 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0, \\
N^* &= A_2 + A_3 - 2A_1 + 3 \left(\frac{2A_1 T}{G^2} - 1 \right) \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [9]. Из системы (6) видно, что величины кинетического момента и кинетической энергии остаются постоянными, следовательно, постоянным остается модуль эллиптических функций согласно (5).

3. Численный расчет годографа вектора кинетического момента.

Для численного расчета было проведено обезразмеривание уравнений системы (6) и уравнения (2). Характерными параметрами задачи являются G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени без влияния малого параметра задачи. Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = \frac{G}{G_0}$, $\tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}$, $\tilde{N}^* = \frac{N^* \Omega_0}{G_0}$, $\tilde{T} = \frac{T}{G_0 \Omega_0}$. Система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tilde{t}} &= -\frac{3\varepsilon^2(1 + e \cos \nu)^3}{2\tilde{G}(1 - e^2)^3} \beta_2 \beta_3 \tilde{N}^*, & \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} &= \frac{3\varepsilon^2(1 + e \cos \nu)^3}{2\tilde{G}(1 - e^2)^3 \sin \delta} \beta_1 \beta_3 \tilde{N}^*, \\ \frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} &= 0, & \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} &= 0, & \frac{d\nu}{d\tilde{t}} &= \frac{\varepsilon(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}, \\ \tilde{N}^* &= \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + 3 \left(\frac{2\tilde{A}_1 \tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1 \right) \left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Первоначально исследование годографа вектора кинетического момента будем проводить для спутника с геометрией масс $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_2 = 6$, $\tilde{A}_3 = 5$, который совершает движение по круговой орбите ($e = 0$). Расчет будет первоначально проводиться для параметра $\varepsilon = 0.3$. Задаются начальные условия $\tilde{G}(0) = 1$, $\delta(0) = \pi/4$, $k^2(0) = 0.9999$. Для угла отклонения вектора кинетического момента относительно плоскости $x_1 x_3$ рассмотрим различные начальные значения $\lambda(0) = 0, \pi/4, \pi/2$, что соответствует кривым 1, 2, 3 рис. 1 и 2. На рис. 1 представлены графики изменения угла ориентации λ , на рис. 2 – угла δ . Из рисунка видно, что изменение начального условия для функции угла λ приводит к параллельному смещению графиков функции вдоль вертикали на величину $\lambda(0)$.

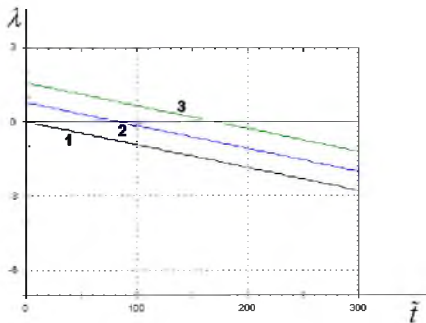


Рис. 1

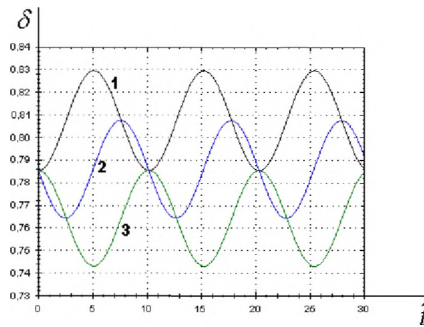


Рис. 2

Согласно исследованиям, представленным на рис. 2, можно сделать вывод, что характер изменения угла ориентации вектора кинетического момента отно-

сительно вертикали носит периодический характер. Изменение начального значения функции $\lambda(\tilde{t})$ приводит к смещению графика функции $\delta(\tilde{t})$ вдоль горизонтали вправо и вдоль вертикали вниз. Смещение графика функции $\delta(\tilde{t})$ зависит от величины $\lambda(0)$. Для $\lambda(0) = \pi/4$ смещение по вертикали равно половине амплитуды, а по горизонтали $-P/8$, где P – период функции $\delta(\tilde{t})$. Для $\lambda(0) = \pi/2$ смещение по вертикали равно амплитуде, а по горизонтали $-P/4$.

Внесем изменения в начальные условия интегрирования системы (7): $\tilde{G}(0) = 1$, $\lambda(0) = 0$, $k^2(0) = 0.9999$ для различных значений $\delta(0) = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$. Результат интегрирования представлен на рис. 3 и 4. Численное исследование показало, что функция $\lambda(\tilde{t})$ может как убывать, так и возрастать, т. е. вращение вектора кинетического момента около вертикали может происходить в разных направлениях. Направление поворота вектора \mathbf{G} зависит от начального значения $\delta(0)$. Максимальная скорость увеличения угла λ наблюдается при начальном условии $\delta(0) = \pi/4$, при этом поворот осуществляется по ходу часовой стрелки. Минимальная скорость увеличения – для $\delta(0) = \pi/2$, вектор \mathbf{G} в этом случае совершает поворот около вертикали по ходу часовой стрелки с постоянным отклонением от вертикали. На рис. 3 кривая 1 соответствует значению $\delta(0) = \pi/4$, кривая 2 и 3 – $\delta(0) = \pi/6, \pi/3$ соответственно, кривая 4 – $\delta(0) = 2\pi/3$.

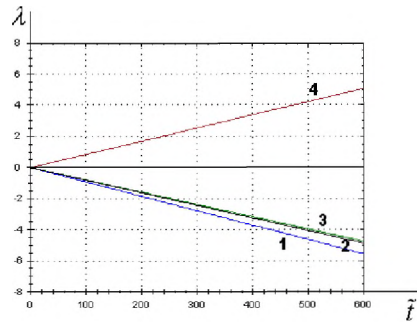


Рис. 3

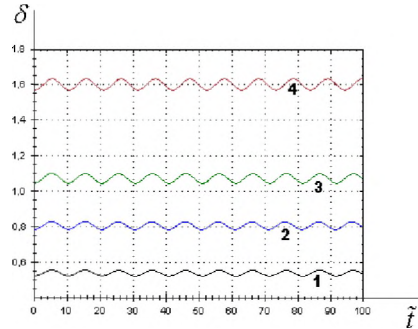


Рис. 4

На рис. 4 представлен результат численного исследования поведения функции $\delta(\tilde{t})$. Видно, что функция имеет одинаковый период колебаний, но разную амплитуду. Причем при возрастании начального значения угла $\delta(0)$ от 0 до $\pi/2$ амплитуда возрастает почти в два раза, а при дальнейшем увеличении $\delta(0)$ амплитуда функции $\delta(\tilde{t})$ убывает.

Годограф вектора кинетического момента построен на сфере единичного радиуса и имеет вид, представленный на рис. 5. Все кривые построены для начального значения $\lambda(0) = 0$. Кривые 1, 2, 3 построены для $\delta(0) = \pi/6, \pi/4, \pi/3$ соответственно. Видно, что отклонение вектора от вертикали носит периодический характер. Во всех представленных расчетных случаях вектор \mathbf{G} совершает вращение около вертикали по ходу часовой стрелки. Из рис. 5 видно, что за счет увеличения скорости изменения угла λ выпуклости годографа увеличивают свою ширину. Однако сам характер годографа сохраняется во всех расчетных случаях.

Исследуем движение спутника на эллиптической орбите. Расчет проводился для различных эксцентриситетов: $e = 0.04473$ – 1-й советский спутник, $e = 0.0487$ – 3-й советский спутник и для эллиптических орбит различных эксцен-

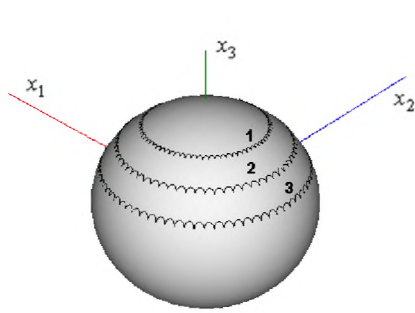


Рис. 5

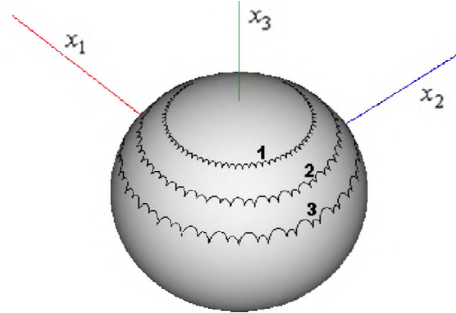


Рис. 6

трисетов. Для эллиптических орбит первого и второго советских спутников годограф вектора кинетического момента несущественно отличается от годографа круговой орбиты. На рис. 6 кривая 2 соответствует расчету эллиптической орбиты с эксцентриситетом $e = 0.1$ для $\delta(0) = \pi/3$. Расчет 2 показывает, что кривая годографа уже не имеет чистого синусоидального вида, в отличие от кривой 1 рис. 6, который построен для круговой орбиты ($\delta(0) = \pi/6$). Увеличение эксцентриситета до величины $e = 0.421$ — сильно эллиптическая орбита — дает результат, представленный кривой 3 рис. 6. На кривой 3 явно выражены гармоники годографа. Аналогичные результаты получены в [2].

Первые два уравнения системы (6) показывают, что характер изменения углов ориентации вектора кинетического момента λ и δ зависит от величины N^* :

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + \frac{3(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)k^2}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2} \times \left[A_3 + (A_2 - A_3) \frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2} \right]. \quad (8)$$

Данная величина может иметь разный знак, что определяется геометрией масс спутника, величиной модуля эллиптических функций k^2 и полными эллиптическими интегралами этой же переменной. На рис. 7 показано, что для любого значения величины k^2 можно найти такую геометрию масс твердого тела, чтобы величина N^* была равна нулю. Для данного исследования было проведено обезразмеривание моментов инерции спутника $\bar{A}_2 = \frac{A_2}{A_1}$, $\bar{A}_3 = \frac{A_3}{A_1}$ по величине наибольшего момента инерции A_1 . Тогда для расчетов $\bar{A}_1 = 1$ и должно выполняться неравенство $1 > \bar{A}_2 > \bar{A}_3$.

Кривые, представленные на рис. 7, соответствуют разным значениям модуля эллиптических функций: кривая 1 — для $k^2 = 0.9999$, кривая 2 — $k^2 = 0.8$, 3 и 4 — для $k^2 = 0.5$ и 0.1 соответственно. Для геометрии масс, представленной кривыми на рис. 7, углы ориентации λ и δ остаются постоянными величинами. Таким образом, для любого значения величины k^2 можно смоделировать спутник с такой геометрией масс, что его вектор кинетического момента будет величиной постоянной в системе координат Oy_i . Если геометрия масс соответствует квадрату выше кривой рис. 7, то годограф вектора кинетического момента имеет вид, представленный на рис. 8 кривой 1, для квадранта ниже кривая 2 рис. 8. Из

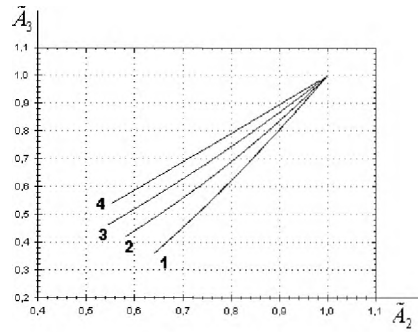


Рис. 7

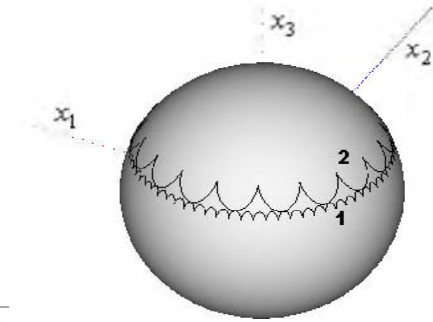


Рис. 8

рисунка видно, что меняется направление выпуклости синусоидальных кривых.

Численное исследование показало, что характер годографа существенным образом зависит от величины модуля эллиптических функций k^2 .

На рис. 9 представлен результат численного исследования годографа вектора кинетического момента для различных значений модуля эллиптических функций. На рис. 9 кривая 1 соответствует значению $k^2 = 0.9$, кривая 2 – $k^2 = 0.8$,

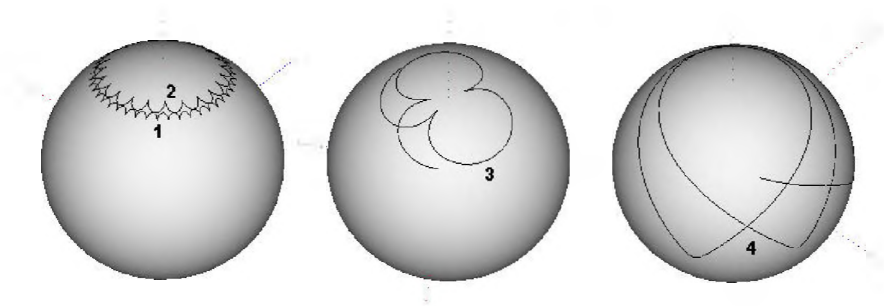


Рис. 9

кривые 3 и 4 – $k^2 = 0.5$ и $k^2 = 0.01$ соответственно. Расчет проводился на разных временных интервалах, так как с уменьшением k^2 существенно увеличивалась скорость поворота вектора \mathbf{G} около вертикали.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Таким образом, в случае возмущенного движения динамически несимметричного спутника в гравитационном поле по эллиптической орбите исследован годограф вектора кинетического момента в трехмерном пространстве $Ox_1x_2x_3$, связанный с плоскостью орбиты спутника. Получено, что вид годографа вектора кинетического момента зависит от эксцентриситета орбиты спутника, от величины модуля эллиптических функций и геометрии масс твердого тела. Показано, что можно смоделировать спутник с такой геометрией масс, для которого вектор кинетического момента будет величиной постоянной в выбранной системе координат.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и Д. Д. Лещенко за полезные обсуждения.

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / В. В. Белецкий. – М. : Наука, 1965. – 416 с.
2. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27, №3. – С. 472–483.
3. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / В. В. Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. **Акуленко Л. Ф.** Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – №3. – С. 5–13.
5. **Акуленко Л. Ф.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
6. **Рачинская А. Л.** Эволюция быстрых вращений спутника под действием возмущающих моментов [текст] / А. Л. Рачинская, А. Н. Дупа // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2 (13-14). – С. 175–184.
7. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
8. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
9. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Получена 15.09.2014