Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

«Цілі точки на конусі»

«Lattice points on the cone»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Бондарчук Сергій Сергійович

Керівник: доктор фіз.-мат. наук, проф. Варбанець С. П. ____
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Савастру О. В. _

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2024 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № ______________

Протокол № ____ від ______________ 2024 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ __________________________

Одеса — 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Відомою класичною проблемою аналітичної теорії чисел є проблема розподілу цілих точок в областях евклідового простору, тобто задача знаходження асимптотичної формули для кількості точок з цілими координатами, що належать даним областям. Напрям цих досліджень бере свій початок ще з питання про поведінку середніх значень арифметичних функцій, яке було поставлено Гаусом. Тож центральною проблемою теорії цілих точок є проблема Гауса про число цілих точок в колі. Для числа $N(T)$ цілих точок в колі $x^2 + y^2 \leq T$ ним було отримане співвідношення:

$$N(T) = \pi T + R, \text{ де } R = O(T)$$

яке показує, що число цілих точок всередині кола дорівнює площині кола з точністю до помилки, яка за порядком не перевищує довжину кола.

Узагальненою класичною проблемою Гауса про число цілих точок кола є задача отримання асимптотичної формули для числа точок, що потрапляють в кулю зростаючого радіусу решітки, утворюваної деякою дискретною підгрупою рухів в рімановому просторі.

Не менш цікавою є проблема розподілу цілих точок на різних поверхнях другого, третього та вищих порядків. Зокрема для поверхонь другого порядку існує ціла низка методів, які були розглянуті такими відомими вченими, як О. М. Фоменко [1], О. П. Голубєва [2], Ю. В. Лінник [3] та ін.

Так, ергодичний метод Лінника, що зводився до отримання зображення великих чисел позитивними тринарними квадратичними формами дозволив вивчити розподіл цілих точок на поверхнях другого порядку. Зокрема ним була доведена теорема про рівномірний розподіл цілих точок сфери $x^2 + y^2 + z^2 = m$ для достатньо великих m. Також ним були отримані результати про асимптотичний розподіл цілих точок на сфері. Як узагальнення результатів Ю. В. Лінника, О. П. Голубєвою була отримана асимптотика числа цілих точок в довільних областях на поверхнях другого порядку.

Достаньо відомою є задача про кількість цілих точок на конусі

$$f_1(x_1, \ldots ,x_{l_1}) = f_2(y_1, \ldots , y_{l_2}),$$

де f_1 і f_2 є додатно визначеними примітивними квадратичними формами від l_1 та l_2 змінних, відповідно, в області

$$f_1(x_1, \ldots , x_{l_1}) \leq N, N \in \mathbb{N}.$$

Ця задача зводиться до знаходження асимптотики суми:

$$\sum_{n=1}^{N} r_{f_1}(n) r_{f_2}(n),\ N \to \infty$$

А. В. Малишев в своїй роботі про зважену кількість цілих точок на поверхні другого порядку вирішував подібну задачу введеним їм так званим круговим методом. Однак, як було показано О. М. Фоменко[1] цей підхід давав не дуже хороші залишкові члени на кількості змінних на випадок $l_1 + l_2 \geq 5$.

Другий метод заснований на детальному вивчені аналітичних властивостей ряду:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{r_{f_1}(n) r_{f_2}(n)}{n^s}$$

із застосуванням таких класичних аналітичних засобів, як результати Ландау або формул обернення рядів Діріхле. Саме таким підходом користувався Рамануджан при дослідженні конусу $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$ (доречі саме таку задачу вперше розглядав ще Серпинський у 1908 році). В позначеннях $r_l(n)$ як кількості зображень числа n сумою l квадратів цілих чисел

Рамануджан отримав:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2^2(n)}{n^s} = \frac{16\zeta^2(s)L^2(s,\chi_4)}{\zeta(2s)(1+x^{-s})},$$

де χ_4 - характер Діріхле за модулем 4 такий, що $\chi_4(u) = \left(\frac{-1}{u}\right)$ для парного u; $L(s,\chi_4)$ - L-ряд Діріхле, асоційований з характером χ_4; $\zeta(s)$ - дзета-функція Римана. Звідси, Рамануджаном був отриманий такий результат:

$$\sum_{n=1}^{N} r_2^2(n) = c'N\log N + c''N + O\left(N^{3/5+\epsilon}\right), n \to \infty$$

де c', c'' - явно обчислювані сталі.

В даній роботі йдеться про задачу розподілу цілих точок, розташованих на поверхні $x^2+y^2=z^2$ в області $0 \le z \le N, N \to \infty$, яка зводиться до вирішення двох питань:

1. В даній роботі йдеться про задачу розподілу цілих точок, розташованих на поверхні $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 < z \le x$ (задача про гіпотенузу)
2. побудова асимптотичної формули для числа цілих точок конуса за умови $x \ge 0$, $y \ge 0$, $\frac{1}{2}xy \le N$ (завдання про площу)

РОЗДІЛ 1

ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1 Теорема Гільберта про циклічні розширення

Позначимо через $\mathbb{Q}$ поле раціональних чисел. Нехай K розширення поля $\mathbb{Q}$. Розширення K будемо називати нормальним, якщо для кожного елемента $\alpha \in K$ в полі K існують кожне спряжене з ним число. Чило β називають спряженим з α відносно $\mathbb{Q}$, якщо воно є образом α відносного автоморфізму σ з групи автоморфізмів Галуа поля K. Автоморфізм σ називається відносним, якшо він залишає на місці всі раціональні числа.

Теорема 1. *Нехай K нормальне розширення поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$ з циклічною групою Галуа. Нехай σ породжуючий автоморфізм групи Галуа. Тоді будь-яке число A, норма якого дорівнює 1, можна представити у вигляді*

$$A = \frac{\sigma B}{B},$$

(де B – число з K) єдиним образом з точністю до раціонального множника. Навпаки, якщо число A можна записати у вигляді $\sigma B/B$, то його норма дорівнює 1.

Нехай θ породжуючий елемент поля K, тобто $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Тоді всі спряжені до θ різні. Позначимо через $m = (K : \mathbb{Q})$ і нехай $A \in K$ і $\mathbf{N}(A) = 1$.

Розглянемо числа

$$
\begin{gathered}
B_0 = 1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{A\sigma A} + \ldots + \frac{1}{A\sigma A \ldots \sigma^{m-2} A} \\
B_1 = \theta + \frac{\sigma\theta}{A} + \frac{\sigma^2\theta}{A\sigma A} + \ldots + \frac{\sigma^{m-1}\theta}{A\sigma A \ldots \sigma^{m-2} A} \\
B_2 = \theta^2 + \frac{\sigma\theta^2}{A} + \frac{\sigma^2\theta^2}{A\sigma A} + \ldots + \frac{\sigma^{m-1}\theta^2}{A\sigma A \ldots \sigma^{m-2} A} \\
\vdots
\end{gathered}
$$

$$
B_{m-1} = \theta^{m-1} + \frac{\sigma\theta^{m-1}}{A} + \frac{\sigma^2\theta^{m-1}}{A\sigma A} + \ldots + \frac{\sigma^{m-1}\theta^{m-1}}{A\sigma A \ldots \sigma^{m-2} A}
$$

Принаймні одне з цих чисел відрізняється від нуля. Дійсно, припустимо, що всі $B_i = 0$, тоді вважаємо, що

$$
1, \frac{1}{A}, \frac{1}{A\sigma A}, \ldots, \frac{1}{A\sigma A \ldots \sigma^{m-2} A}
$$

невідомі, отримуємо однорідну систему рівнянь:

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 0 \\
\theta x_1 + \sigma\theta x_2 + \ldots + \sigma^{m-1}\theta x_m = 0 \\
\vdots \\
\theta^{m-1} x_1 + \sigma\theta^{m-1} x_2 + \ldots + \sigma^{m-1}\theta^{m-1} x_m = 0,
\end{gathered}
$$

яка має нетривіальний розв'язок і тому її визначник

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 \\
\theta & \sigma\theta & \ldots & \sigma^{m-1}\theta \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\theta^{m-1} & \sigma\theta^{m-1} & \ldots & \sigma^{m-1}\theta^{m-1}
\end{vmatrix} = 0
$$

Але Δ – визначник Вондермонда, який можна записати у вигляді $\Delta = \prod\prod_{i\neq j}(\sigma^j\theta - \sigma^i\theta)$. Оскільки $\Delta = 0$ дійдемо висновку, що принаймні деякі два спряжених збігаються, тобто $K \neq \mathbb{Q}(\theta)$.

Нехай $B_k \neq 0$. ,
Тоді

$$\sigma B_k = \sigma\theta^k + \frac{\sigma^2\theta^k}{\sigma A} + \ldots + \frac{\sigma^{m-1}\theta^k}{\sigma A \ldots \sigma^{m-1}A},$$
$$\frac{\sigma B_k}{A} = \theta^k + \frac{\sigma^2\theta^k}{A} + \ldots + \frac{\sigma^{m-1}\theta^k}{A \ldots \sigma^{m-1}A} = B_k,$$

тобто $\sigma B_k = AB_k$. Звідки $A = \dfrac{\sigma B_k}{B_k}$. Доведемо, що число A можна представити у вигляді $\dfrac{\sigma B}{B}$ єдиним чином, з точністю до раціонального множника. Дійсно, якщо існує інше уявлення $A = \dfrac{\sigma C}{C}$, тоді

$$\frac{\sigma B_k}{B_k} = \frac{\sigma C}{C}$$

або

$$\sigma\left(\frac{B_k}{C}\right) = \frac{B_k}{C}.$$

Беремо автоморфізм від обох частин рівності

$$\sigma^2\left(\frac{B_k}{C}\right) = \frac{B_k}{C}.$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо

$$\sigma^2\left(\frac{B_k}{C}\right) = \frac{B_k}{C}, \ldots, \sigma^{m-1}\left(\frac{B_k}{C}\right) = \frac{B_k}{C}.$$

Таким чином, за основою теоремою Галуа $\dfrac{B_k}{C} = \lambda$ раціональне. Далі нехай A можна представити у вигляді $A = \dfrac{\sigma B}{B}$. Знайдемо норму $\mathbf{N}(A)$.

$$\mathbf{N}(A) = A\sigma A \dots \sigma^{m-1}A,$$

$$\sigma A = \frac{\sigma^2 B}{\sigma B}, \sigma^2 A = \frac{\sigma^3 B}{\sigma^2 B}, \dots, \sigma^{m-1}A = \frac{B}{\sigma^{m-1}B}$$

тобто

$$\mathbf{N}(A) = \frac{\sigma B}{B}\frac{\sigma^2 B}{\sigma B}\dots\frac{\sigma^{m-1}B}{\sigma^{m-2}B}\frac{B}{\sigma^{m-1}B} = 1$$

Нехай D ціле додатне число, яке не ділиться на квадрат цілого числа, відмінного від ± 1.

Розглянемо рівняння

$$\eta^2 + D\xi^2 = 1$$

та розв'яжемо його у цілих числах.

Лема 1. *Всі розв'язки рівняння*

$$\eta^2 + D\xi^2 = 1 \tag{1.1}$$

в раціональних числах можна отримати по одному разу з формул

$$\xi = \frac{2xy}{x^2 + y^2 D}, \eta = \frac{x^2 - Dy^2}{x^2 + Dy^2}$$

x, y *– цілі,* $y > 0$, $(x,y) = 1$. *Також існує розв'язок* $(0, -1)$.

Доведення. Розглянемо в полі $\mathbb{R}(\sqrt{-D})$ числа виду $A = \eta + \xi\sqrt{-D}$ з $\mathbf{N}(A) = 1$.

Тоді рівняння (1.1) набуде вигляду

$$\mathbf{N}(\eta + \xi\sqrt{-D}) = 1$$

. Оскільки поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ циклічне над полем , то за теоремою Гільберта таке число $\eta + \xi\sqrt{-D}$ можна подати у вигляді

$$\eta + \xi\sqrt{-D} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{-D}}{\alpha - \beta\sqrt{-D}}$$

зз раціональними α, β; α, β – не дорівнюють нулю одночасно. Можливі два випадки:

- Якщо $\alpha \neq 0$, тоді
$$\eta + \xi\sqrt{-D} = \frac{1 + t\sqrt{-D}}{1 - t\sqrt{-D}},$$
де t – раціональне. Далі з умов на x і y, зрозуміло, що t неможливо представити у вигляді $t = \frac{x}{y}$, єдиним чином. Тоді
$$\eta + \xi\sqrt{-D} = \frac{x + y\sqrt{-D}}{x - y\sqrt{-D}}.$$
Відокремлюючи комплексні і дійсні частини отримаємо, що
$$\xi = \frac{2xy}{x^2 + y^2 D},\ \eta = \frac{x^2 - Dy^2}{x^2 + Dy^2}$$
x, y – цілі, $y > 0$, $(x,y) = 1$.
- Якщо $\alpha = 0$, тоді отримуємо розв'язок $(0, -1)$.

$\square$

Розглянемо діофантове рівняння

$$u^2 + Dv^2 = w^2 \tag{1.2}$$

і будемо шукати його розв'язок за умови, що $(u,v,w) = 1$. Легко бачити, що $w \neq 0$, оскільки тоді б D було повним квадратом.

Теорема 2. *Всі розв'язки рівняння* (1.2) *а умови, що* $(u,v,w) = 1$ *можна отримати по одному разу з формул*

$$u = \pm\frac{x^2 - Dy^2}{d_1}$$

$$v = \pm\frac{2xy}{d_1}$$

$$w = \pm\frac{x^2 + Dy^2}{d_1},$$

причому знаки у всіх однакові;$(x,\, y) = 1,\, y > 0, d_1 =$ *НСД*$(x^2{+}Dy^2,\, 2xy,\, x^2{-}Dy^2)$. *Також існують розв'язки* $(1,\, 0\ 1)$ *і* $(-1,\, 0,\, -1)$.

Зауваженя 1. *НСД*$(x^2 + Dy^2,\ 2xy,\ x^2 - Dy^2) =$ *НСД*$(x^2 - Dy^2,\ 2xy)$, *тобто насправді* $d_1 =$ *НСД*$(x^2 - Dy^2,\, 2xy)$

Дійсно, якщо позначимо $d_2 = \text{НСД}(x^2 - Dy^2,\, 2xy)$, то зрозуміло, що $d_1 \big| d_2$. Далі, оскільки

$$(x^2 - Dy^2)^2 + D(2xy)^2 = (x^2 + Dy^2)^2,$$

$d_2^2 \big| (x^2 + Dy^2)^2$, тобто $d_2 \big| x^2 + Dy^2$,

а через те, що за означенням $d_2 \big| 2xy$ і $d_2 \big| x^2 - Dy^2$, то

$$d_2 \big| \text{НСД}(x^2 + Dy^2,\, 2xy,\, x^2 - Dy^2) = d_1$$

Таким чином, $d_1 = d_2$.

Доведення. Передусім, числа

$$u = \pm\frac{x^2 - Dy^2}{d_1}$$
$$v = \pm\frac{2xy}{d_1}$$
$$w = \pm\frac{x^2 + Dy^2}{d_1},$$

задовольняють рівнянню (1.2) в силу тотожності

$$(x^2 - Dy^2)^2 + D(2xy)^2 = (x^2 + Dy^2)^2$$

а також взаємно прості.

Нехай маємо довільний розв'язок рівняння (1.2) u, v, w з $(u,v,w) = 1$. Оскільки $w \neq 0$

$$\left(\frac{u}{w}\right)^2 + D\left(\frac{v}{w}\right)^2 = 1.$$

Отже $\eta = \frac{u}{w}$; $\xi = \frac{v}{w}$ задовольняють рівнянню $\eta^2 + D\xi^2 = 1$ і є раціональними. Можливим є випадок, коли $\frac{u}{w} = 1$, $\frac{v}{q} = 0$, тобто маємо розв'язок $(u,0,u)$ і з умови, що $(u,0,u) = 1$ робимо висновок, що розв'язок $(\pm 1,0,\pm 1)$.

Розглянемо випадок, коли $(\eta,\xi) \neq (1,0)$. Тоді, в силу леми існують цілі x і y, $(x,y) = 1$, $y > 0$ і які одночасно не дорівнюють нулю, такі що

$$\frac{x^2 - Dy^2}{x^2 + Dy^2} = \frac{u}{w}, \ \frac{2xy}{x^2 + Dy^2} = \frac{v}{w},$$

більш того, x і y з цими умовами визначаються однозначно. Звідси

$$\frac{2xy}{v} = \frac{x^2 - Dy^2}{u} = \frac{x^2 + Dy^2}{w}.$$

Позначивши через d_1 НСД$(x^2+Dy^2,\, 2xy,\, x^2-Dy^2)$ отримаємо

$$\frac{\frac{2xy}{d_1}}{v}=\frac{\frac{x^2-Dy^2}{d_1}}{u}=\frac{\frac{x^2+Dy^2}{d_1}}{w}.$$

Через те, що

$$(u,v,w)=1,\ (\frac{2xy}{d_1},\frac{x^2-Dy^2}{d_1},\frac{x^2+Dy^2}{d_1})=1$$

отримуємо

$$\begin{aligned} u&=\pm\frac{x^2-Dy^2}{d_1}\\ v&=\pm\frac{2xy}{d_1}\\ w&=\pm\frac{x^2+Dy^2}{d_1}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\square$

Лема 2. *Всі примітивні розв'язки рівняння $x^2+y^2-z^2=0$ для $x,y\geq 0, z>0$ можна отримати з наступних двох груп формул*

$$x=2mn,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2+n^2 \tag{1.4}$$

$$x=m^2-n^2,\ y=2mn,\ z=m^2+n^2 \tag{1.5}$$

$m>n\geq 0$, $(m,n)=1$, m *і* n *різної парності.*

Доведення. Дійсно, розв'язки рівняння $x^2+y^2-z^2=0$ с $(x,y,z)=1, y>$

$0, z > 0$ в силу теореми будуть

$$\begin{aligned} x &= \frac{m^2 - n^2}{d_1} \\ y &= \frac{2mn}{d_1} \\ z &= \frac{m^2 + n^2}{d_1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

$(m, n) = 1$, $n > 0$, $d_1 = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$, $m^2 + n^2 \neq 0$. Також існує ще розв'язок (1,0,1).

Оскільки $d_1 \big| m^2 - n^2$ і $d_1 \big| m^2 + n^2$, то $d_1 \big| 2m^2$ та $d_1 \big| 2n^2$. Через те, що $(m^2, n^2) = 1$, можемо записати $Am^2 + Bn^2 = 1$. Далі

$$A2m^2 + B2n^2 = 2$$

Звідки випливає, що $d_1 \big| 2$, тобто $d_1 = 1{,}2$.

1. Розглянемо випадок, коли $d_1 = 1$. В цьому випадку формули (1.6) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2 \\ y &= 2mn \\ z &= m^2 + n^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(m, n) = 1,\ n > 0,\ (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) = 1,$$

Покажемо, що , m і n різної парності. Наприклад нехай $m = 2k_1 + 1$, $n = 2k_2 + 1$, тоді

$$m^2 + n^2 = 2(2k_1^2 + 2k_1 + 2k_2^2 + 2k_2 + 1),\ m^2 - n^2 = 4(k_1^2 + k_1 - k_2^2 - k_2)$$

тобто

$$(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 - n^2) = 2,$$

що суперечить тому факту, що $d_1 = 1$. Аналогічним чином розглядається варіант, коли m і n парні. Далі $m \geq n$, оскільки за умовою $x \geq 0$. Але $m \neq n$ оскільки ці числа різної парності, тобто насправді $m > n$.

Врахувавши розв'язок (1,0,1) отримаємо формули (1.5)

2. Розглянемо випадок $d_1 = 2$.

   В цьому випадку формула (1.6) набуде вигляду

$$\begin{gathered} x = \frac{m^2 - n^2}{2} \\ y = mn \\ z = \frac{m^2 + n^2}{2} \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$n > 0,\ (m,\ n) = 1,\ d_1 = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) = 2.$$

   Тут m і n непарні, оскількі разної парності вони бути не можуть, оскільки тоді б x і z набували б дробових значень, а одночасно бути парними вони не можуть оскільки тоді б мали $d_1 > 2$. Нехай тоді $m = 2k_1$, $n = 2k_2$, маємо

$$\begin{gathered} m^2 - n^2 = 4(k_1^2 - k_2^2) \\ 2mn = 8k_1k_2 \\ m^2 + n^2 = 4(k_1^2 + k_2^2), \end{gathered}$$

   тобто $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) \geq 4$. Що суперечить тому факту, що $d_1 = 2$. Покладемо

$$\frac{m+n}{2} = \overline{m},\ \frac{m-n}{2} = \overline{n}$$

   в формулах (1.8). Помітимо, що $(\overline{m}, \overline{n}) = \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right) = 1$, $\overline{m} > \overline{n}$, $\overline{m}$ і $\overline{n}$ різної парності.

   Дійсно, якщо $\overline{m}$ і $\overline{n}$ обидва непарні, то з умови $\overline{m} = 2k_1 + 1$, $\overline{n} = 2k_2 + 1$, випливає, що $m + n = 4k_1 + 2$, $m - n = 4k_2 + 2$. Або $m = 2(k_1 + k_2) + 2$, $n =$

$4(k_1 - k_2)$, тобто обидва парні. Це суперечть тому, що m і n обидва непарні. Також $\overline{m}$ і $\overline{n}$ не можуть бути парними в силу того, що тоді б m і n були б також парними. Ми маємо

$$\begin{aligned} x &= 2\overline{mn}, \\ y &= \overline{m}^2 - \overline{n}^2 \\ z &= \overline{m}^2 + \overline{n}^2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

$(\overline{m}, \overline{n}) = 1$, $\overline{m} > \overline{n} \geq 0$. $\overline{m}$ і $\overline{n}$ різної парності.

Таким чином отримуємо формулу (1.4)

□

1.2 Розподіл примітивних цілих точок на круговому конусі

Означення 1. *Примітивною цілою точкою ми будемо називати будь-яку точку з цілими координатами x, y, z, для якої $(x,y,z) = 1$*

Позначимо через $A(h)$ кількість примітивних точок, які лежать на поверхні конуса

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \text{ де } 0 < z \leq h.$$

Теорема 3. *При $h \to \infty$*

$$A(h) = \frac{4}{\pi} h + O(\sqrt{h}).$$

Доведення. Доведення будується на загальновідомій лемі Гамбурга про циклічні розширення. □

Позначимо через $M(h)$ кількість цілих точок,які містяться в середині (і на межі, якщо такі існують) четвертини круга

$$m^2+n^2 \le h^2,\ m \ge 0, n \ge 0 \text{з}(m,n)=1,$$

причому m і n різної парності. Точку (1,0) будемо враховувати при підрахунку $M(h)$, точку (0,0) будемо виключати.

Лема 3.

$$A(h)=4M(h)-4$$

Доведення. З формул (1.4) і (1.5) випливає, що кожній цілій точці з координатами m і n різної парності з $(m,n)=1$, $m>n\ge 0$, яка належить 1/8 круга $m^2+n^2 \le h$ відповідають дві різні примітивні цілі точки (x',y',z) і (x'',y'',z), причому $x'=y'$, $x''=y''$, які належать поверхні конуса $x^2+y^2-z^2=0$ в області $x \ge 0$, $y \ge 0, 0<z\le h$. Не складно побачити, що кожним двом примітивним точкам (x',y',z) і (x'',y'',z) відповідає єдина ціла точка (m,n), яка задоволняє вище зазначеним умовам. Кількість таких цілих точок, враховуючи останні умови дорівнює $\dfrac{M(h)}{2}$.

Отже кількість примітивних цілих точок, які належать поверхні конуса $x^2+y^2-z^2=0$ в області $x,y \ge 0$, $0,z \le h$ дорівнює

$$2\frac{M(h)}{2}=M(h)$$

Таким чином отримуємо твердження леми

$$A(h)=4M(h)-4$$

□

Лема 4. *Позначимо через $T(h)$ кількість цілих точок, які лежать в четвертині круга $m^2+n^2 \le h$, $m \ge 0$, $n \ge 0$ з $(m,n)=1$, точка (0,0)-*

виключається. Тоді

$$T(h) = M\left(h\right) + M\left(\frac{h}{2}\right) - 1$$

Доведення. Очевидно, що $(T(h) - M(h))$ це кількість цілих точок, які лежать в четвертині круга

$$m^2 + n^2 \leq h,\, m \geq 0, n \geq 0,\, (m,n) = 1$$

де m,n – непарні.

Множину таких точок (m,n) позначимо через $\mathfrak{N}_h$. Кожній точці, яка входить у $\mathfrak{N}_h$ ми можемо поставити у відповідність точку з координатами

$$\xi = \frac{m+n}{2},\, \eta = \frac{m-n}{2}, \text{ якщо } m > n$$
$$\xi = \frac{m-n}{2},\, \eta = \frac{m+n}{2}, \text{ якщо } m < n$$

Якщо $m = n$, то єдина точка, яка входить до $\mathfrak{N}_h$ з умовою, що $(m,n) = 1$ буде (1,1). Будемо ставити їй у відповідність одну точку (0,1)(замість двох точок (0,1) і (1,0)).

1. $$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n-m}{2}\right)^2 = \frac{n^2+m^2}{2}.$$

   таким чинома, точки (ξ, η) належать чверті круга

   $$\xi^2 + \eta^2 \leq \frac{h}{2},\, \xi \geq 0,\, \eta \geq 0.$$

2. $(\xi, \eta) = 1$ оскільки, якщо $(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}) > 1$ (або $(\frac{m-n}{2}, \frac{m+n}{2}) > 1$), то з цього випливало б, що $(n,m) > 1$

3. Числа ξ і η різної парності. Дійсно, якщо б, наприклад

$$\frac{m+n}{2} = 2k_1 + 1, \ \frac{m-n}{2} = 2k_2 + 1,$$

то

$$m = 2(k_1 + k_2) + 2, \ n = 2(k_1 - k_2) + 2,$$

тобто $(m,n) \geq 2$ (аналогічно розглядається випадок, коли $\frac{m+n}{2} = 2k_1 + 1, \ \frac{n-m}{2} = 2k_2 + 1$).

Навпаки, кожній цілій точці з координатами різної парностіξ, η, $(\xi, \eta) = 1$, яка належить четвертині круга $\xi^2 + \eta^2 \leq \frac{h}{2}$ ми поставимо у відповідність точку з координатами

$$m = \xi + \eta, \ n = \xi - \eta, \ \xi > \eta$$

$$m = \eta - \xi, \ n = \xi + \eta, \ \eta > \xi$$

(точкам (0,1) і (1,0) ставимо у відповідність одну точку (1,1)). Очевидно, що $(m,n) = 1$, m і n різної парності і $m^2 + n^2 \leq h$. Таким чином

$$T(h) - M(h) = M\left(\frac{h}{2}\right) - 1$$

$\square$

Позначимо через $T^*(h)$ кількість цілих точок, які належать кругу $m^2 + n^2 \leq h$ з $(m,n) = 1$ (не враховуючи точку (0,0)).

Лема 5.

$$T^*(h) = 4T(h) - 4$$

Доведення. Дійсно, оскільки $T(h)$ це кількість таких точок в четвертині круга $m^2+n^2 \leq h$, то $T^*(h) = 4T(h)-4$ (оскільки точки (0,1), (1,0), $(-1,0)$, $(0,-$

1) — кожна враховується двічі). $\square$

Надамо тепер асимптотичну формулу для величини $T^*(h)$. Позначимо за $R(h)$ число цілих точок в кругу $m^2+n^2 \leq h$, без урахування точки (0,0).

Лема 6. *При $h \to \infty$*

$$R(h) = \pi h + O(h^{1/3})$$

Лема 7. *Нехай $k > 1$ і задані системи*

$$x_1', x_2', \dots, x_k'; x_1'', x_2'', \dots, x_k''; x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}$$

кожна з яких складаєтьcя з цілих чисел, які не дорівнюють одночасно нулю. Нехай далі для цих систем однозначно визначена функція $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$. Тоді

$$s' = \sum \mu(d) s_d,$$

де s' означає суму значень $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ поширену на системи взаємно простих чисел, s_d означає суму значень $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ поширену на системи чисел, які одночасно кратні d. При цьому d набуває цілих додатних значень.

Лема 8. *При $h \to \infty$*

$$T^*(h) = \frac{6}{\pi} h + O(h^{1/2})$$

Доведення. Розглянемо координати x_1 і x_2 цілих точок області $x_1^2 + x_2^2 \leq h$ відмінних від точки (0,0) і визначимо функцію $f(x_1,x_2)$ наступмним чином:

$$f(x_1,x_2) = 1, \text{ якщо}, \; x_1^2 + x_2^2 \leq h, (x_1,x_2) \neq (0,0).$$

$$s' = T^*(h), s_d = \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2 \leq h \\ d \mid (x_1,x_2)}} f(x_1,x_2) = \sum_{(\frac{x_1}{d})^2 + (\frac{x_2}{d})^2 \leq \frac{h}{d^2}} 1 = R\left(\frac{h}{d^2}\right),$$

$$T^*(h) = \sum_{d=1}^{[\sqrt{h}]} \mu(d) R\left(\frac{h}{d_2}\right)$$

Або в силу відношення Леми 5

$$T^*(h) = \sum_{d=1}^{[\sqrt{h}]} \mu(d)\left(\pi\frac{h}{d^2} + O\left(\frac{h^{1/3}}{d^{2/3}}\right)\right) = \pi h \sum_{d=1}^{[\sqrt{h}]} \frac{\mu(d)}{d^2} +$$
$$+ O\left(\sum_{d=1}^{[\sqrt{h}]} \frac{h^{1/3}}{d^{2/3}}\right) = \pi h \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(h \sum_{[\sqrt{h}]+1}^{\infty} \frac{1}{d^2}\right) +$$
$$+ O\left(h^{1/2} \int_1^{\sqrt{h}} \frac{dx}{x^{2/3}}\right) = \frac{6h}{\pi} + O\left(h \int_{\sqrt{h}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}\right) + O(h^{1/3}h^{1/6}) =$$
$$= \frac{6}{\pi}h + O\left(h\frac{1}{\sqrt{h}}\right) + O(h^{1/2}) = \frac{6}{\pi}h + O(\sqrt{h})$$

□

Лема 9.

$$T(h) = \frac{3}{2\pi}h + O(\sqrt{h})$$

при $h \to \infty$

Лема 10. *При* $h \to \infty$

$$M(h) = \frac{1}{\pi}h + O(\sqrt{h})$$

Доведення. Вже було встановлено, що

$$M(h) + M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2\pi}h + O(\sqrt{h}).$$

Визначимо число l з умови

$$\frac{1}{2} < \frac{h}{2^l} \leq 1,\, l = \left[\frac{\log h}{\log 2}\right] + 1$$

Візьмемо нерівності:

$$M(h) + M\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2\pi}h + O\left(h^{1/2}\right)$$
$$M\left(\frac{h}{2}\right) + M\left(\frac{h}{4}\right) = \frac{3}{2\pi}\frac{h}{2} + O\left(\frac{h^{1/2}}{2^{1/2}}\right)$$
$$M\left(\frac{h}{4}\right) + M\left(\frac{h}{8}\right) = \frac{3}{2\pi}\frac{h}{4} + O\left(\frac{h^{1/2}}{4^{1/2}}\right)$$
$$\ldots$$
$$M\left(\frac{h}{2^{l-1}}\right) + M\left(\frac{h}{2^l}\right) = \frac{3}{2\pi}\frac{h}{2^{l-1}} + O\left(\frac{h^{1/2}}{2^{(l-1)/2}}\right)$$

Помножив нерывності з парними номерами на I і після цього додаючи їх, отримуємо

$$M(h) \pm M\left(\frac{h}{2^l}\right) = \frac{3}{2\pi}h\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots \pm \frac{1}{2^{l-1}}\right) + O(\sqrt{h}).$$

Але

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots \pm \frac{1}{2^{l-1}} = \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{2^l}\right) = \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{2^{(\log h)/(\log 2)}}\right) = \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{h}\right)$$

і за означенням $M(\frac{h}{2^l}) = 0$(точку (0,0) ми не враховуємо).

$$M(A) = \frac{3}{2\pi} h \left(\frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{h}\right) \right) + O(h^{1/2}) = \frac{1}{\pi} h + O(h^{1/2})$$

□

Твердження леми випливає з рівності

$$A(h) = 4M(h) - 4.$$

Позначимо через $\overline{A}$ кількість всіх цілих точок на конусі $x^2 + y^2 = z^2$ в області $0 < z \leq A$. Доведемо наслідок з попередньої теореми.

Наслідок 1.

$$\overline{A}(h) = \frac{4}{\pi} h \ln h + O(h)$$

Доведення. Очевидно

$$\overline{A}(h) = A(h) + A\left(\frac{h}{2}\right) + A\left(\frac{h}{3}\right) + \ldots + A\left(\frac{h}{[h]}\right).$$

$$\overline{A}(h) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{[h]} \frac{h}{j} + O\left(\sum_{j=1}^{[h]} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{j}} \right) =$$
$$= \frac{4}{\pi} h \sum_{j=1}^{[h]} \frac{1}{j} + O(h) = \frac{4}{\pi} h \ln h + O(h),$$

□

РОЗДІЛ 2

РОЗПОДІЛ ПРИМІТИВНИХ ЦІЛИХ ТОЧОК В СЕКТОРІАЛЬНІСТЬ ОБЛАСТІ НА ПОВЕРХНІ КРУГОВОГО КОНУСА

Позначимо за $A_1(h,\theta)$ кількість примітивних цілих точок (x,y), тобто таких точок, що НСД$(x,y) = 1$, які лежать на поверхні конуса $x^2+y^2-z^2 = 0$, причому

$$0 < z \leq h,\ 0 < arctg\frac{y}{x} \leq \theta,\ 0 < \theta < \pi.$$

Теорема 4. *Для* $h \to \infty$ *маємо*

$$T(h,\theta) = \frac{2\theta}{\pi^2}h + O\left(\sqrt{h}\log h\right)$$

Доведення. Позначимо через $T_1(2h,\phi)$ – кількість примітивних точок на конусі в секторі фіксованого розтину ϕ, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, кола $m^2+n^2 \leq 2h$, $(m,n) = 1$, $m > 0, n > 0, m$ і n - непарні.

$T_2(h,\phi)$ – кількість цілих точок в секторі розтину ϕ кола $m^2+n^2 \leq h$ з $(m,n) = 1$,
m - парне, n - непарне, $m,n > 0$ і аналогічно $A_3(h,\phi)$ з m - непарне, n - парне. Зрозуміло, що $A_2(h,\phi) = A_3(h,\phi)$. □

Лема 11.

$$T(h,\theta) = T_1\left(2h,\frac{\theta}{2}\right) + 2T_2(h,\theta)$$

Доведення. Оскільки в розглядуваній області $y > 0$, то формула (1.3) з попереднього розділу за умови $d_1 = 1{,}2$ набуде наступного вигляду

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

$(m,n) = 1$, $m > 0$, $n > 0, m$ – парне,n – непарне.

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases} \tag{2.2}$$

$(m,n) = 1$, $m > 0$, $n > 0, m$ – непарне,n – парне.

$$\begin{cases} x = \dfrac{m^2 - n^2}{2} \\ y = mn \\ z = \dfrac{m^2 + n^2}{2} \end{cases} \tag{2.3}$$

$(m,n) = 1$, $m > 0$, $n > 0, m,n$ – непарні

З цих формул зрозуміло, що кожній цілій точці з координатами m і n з $(m,n) = 1$, $m > 0$, $n > 0$, яка належить сектору розтину ϕ круга $m^2 + n^2 \leq h$, якщо m і n різної парності, і круга $m^2 + n^2 \leq 2h$, якщо m і n непарні, відповідає єдина примітивна ціла точка, яка лежить на поверхні конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в секторіальній області $0 < z \leq h$, $\theta = 2\phi$.

Дійсно нехай (m', n') точка одного з вказаних видів, якій відповідає точка (x',y',z'). Тоді, оскільки $n' > 0$ і $\dfrac{m'}{n'} = \operatorname{ctg}\phi$

$$\operatorname{ctg}\theta' = \frac{x'}{y'} = \frac{(m')^2 - (n')^2}{2m'n'} = \frac{\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 - 1}{2\frac{m'}{n'}} = \frac{\operatorname{ctg}^2\phi' - 1}{2\operatorname{ctg}\phi'} = \operatorname{ctg} 2\phi^2,$$

Отже $\theta = 2\phi$

Навпаки, кожній примітивній точці, яка належить поверхні конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в області $0 < z \leq h$, $\theta = 2\phi$, ми можемо поставити у відповідність єдину цілу точку з координатами m і n з $(m,n) = 1$, $m,n > 0$, яка належить сектору фіксованого розтину ϕ круга $m^2 + n^2 \leq h$, якщо m і n різної парності і круга $m^2 + n^2 \leq 2h$, якщо m і n непарні. Дійсно, нехай (x',y',z') така точка. Тоді її координати можна записати у вигляді (2.1) або (2.2) або (2.3). Розглянемо перший випадок.

$$\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$$

$(m,n) = 1$, $m > 0$, $n > 0, m$ – парне,n – непарне.

Оскільки $0 < z \leq h$, $\theta = 2\phi$, то $m^2 + n^2 \leq h$ і

$$\operatorname{ctg} 2\phi' = \frac{\operatorname{ctg}^2\phi' - 1}{2\operatorname{ctg}\phi'} = \frac{x'}{y'} = \frac{\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 - 1}{2\frac{m'}{n'}},$$

тобто $\dfrac{m'}{n'} = \operatorname{ctg}\phi'$.

Останні два випадки доводяться аналогічно. □

Обчислимо $T_1\left(2h,\dfrac{\theta}{2}\right)$ і $T_2\left(2h,\dfrac{\theta}{2}\right)$

$$T_1\left(2h,\frac{\theta}{2}\right)=\sum\mu(d)\sum_{\substack{m^2+n^2\le 2h\\ d|m,d|n\\ \frac{m}{n}\le \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}}1$$

Оскільки m і n обидва непарні, то d - непарне. Далі покладемо $\dfrac{m}{d}=m'$, $\dfrac{n}{d}=n'$, помітимо, що $m'=2k_1+1, n'=2k_2+1$, маємо

$$T_1\left(2h,\,\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{\substack{d=1\\ d\not\equiv 0\ (mod\ 2)}}^{O(h)}\mu(d)\sum_{\substack{(k_1+\frac{1}{2})^2+(k_2+\frac{1}{2})^2\le\frac{h}{2d^2}\\ \frac{k_1}{k_2}\le\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}}1$$

Друга сума дорівнює кількості цілих точок в секторі розтину $\dfrac{\theta}{2}$ з центром в точці $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ радіуса $\dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{h}{2}}$. Позначимо цю суму за $S_{\frac{\theta}{2}}\left(\dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{h}{2}}\right)$.
Тоді $S_{\frac{\theta}{2}}\left(\dfrac{1}{d}\sqrt{\dfrac{h}{2}}\right)=\dfrac{\theta}{4}\dfrac{h}{2d^2}+O\left(\dfrac{\sqrt{h}}{d}\right)$.

$$T_1\left(2h,\,\frac{\theta}{2}\right)=\sum_{\substack{d=1\\ d\not\equiv 0\ (mod\ 2)}}^{O(\sqrt{h})}\mu(d)\left(\frac{\theta}{8}\frac{h}{d^2}+O\left(\frac{\sqrt{h}}{d}\right)\right)=$$

$$=\frac{\theta h}{8}\sum_{\substack{d=1\\ d\not\equiv 0\ (mod\ 2)}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(h\sum_{d=O(h)}^{\infty}\frac{1}{d^2}\right)+O\left(\sqrt{h}\sum_{d=1}^{O(\sqrt{h})}\frac{1}{d}\right).$$

$$T_1\left(2h, \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta h}{8} \sum_{\substack{d=1 \\ d\not\equiv 0 \pmod 2}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{h}\ln h), h \to \infty$$

Обчислимо $\sum_{\substack{d=1 \\ d\not\equiv 0 \ (mod\ 2)}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.

Відомо, що $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{\substack{d=1 \\ d-\text{ непарне}}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + \sum_{\substack{d=2 \\ d-\text{ непарне}}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} =$$

$$= \sum_{\substack{d=1 \\ d-\text{ непарне}}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + \frac{\mu(2)}{4} \sum_{\substack{d=1 \\ d-\text{ непарне}}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{3}{4} \sum_{\substack{d=1 \\ d\not\equiv 0 \ (mod\ 2)}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$$

Отже тоді

$$T_1\left(2h, \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta h}{8} \cdot \frac{8}{\pi^2} + O(\sqrt{h}\ln h) = \frac{\theta}{\pi^2} h + O(\sqrt{h}\ln h).$$

Аналогічно обчислюємо значення для $T_2\left(h, \frac{\theta}{2}\right)$ і отримуємо

$$T_2\left(h, \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2\pi^2} h + O\left(\sqrt{h}\ln h\right), \ h \to \infty$$

Далі застосовуючи формулу Леми 11 при $h \to \infty$ отримуємо

$$T(h, \theta) = \frac{2\theta}{\pi^2} + O(\sqrt{h}\ln h).$$

Тобто твердження Теореми 4

2.1 Теореми про розподіл цілих точок на кроговому конусі.

Позначимо через $F_1(N)$ кількість цілих точок, які розташовані на круговому конусі $x^2+y^2=z^2$, в області $0 \le z < N$.

Теорема 5. *При* $N \to \infty$

$$F_1(N) = \frac{4}{\pi} N \ln N + BN + O\left(N^{1/2} e^{-c(\ln N)^{3/5}} (\ln\ln N)^{-1/5}\right),$$

де B *- стала,* $c > 0$ *- стала*

Доведення. Позначимо через $r(n)$ кількість уявлень натурального числа n у вигляди суми двух квадратів цілих чисел, тоді

$$F_1(N) = \sum_{n \le N} r(n^2)$$

Оскільки функція $\frac{r(n)}{4}$ мультиплікативна, то і функція $\frac{r(n^2)}{4}$ мультиплікативна. Введемо функцію, яка визначена для $Re(s) > 1$, наступним рядом

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n^2)}{n^s}$$

Для $\Phi(s)$ при $Re(s) > 1$ можливий розклад в ейлервський добуток.

$$\Phi(s) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{r(n^2)}{4}}{n^s} =$$

$$= 4 \left(1 + \frac{r(2^2)}{4 \cdot 2^s} + \frac{r(2^4)}{4 \cdot 2^{2s}} + \dots\right) \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} \left(1 + \frac{r(p^2)}{4 \cdot p^s} + \frac{r(p^4)}{4 \cdot p^{2s}} + \dots\right) \times$$

$$\times \prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)} \left(1+\frac{r(p^2)}{4\cdot p^s}+\frac{r(p^4)}{4\cdot p^{2s}}+\dots\right)$$

Застосовуючи відоме уявлення для $r(k)$

$$r(k)=4\sum_{\substack{d|k\\ d-\text{непарне}}}(-1)^{(d-1)/2},$$

маємо

$$\Phi(s)=$$

$$=4\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\dots\right)\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\left(1+\frac{3}{p^s}+\frac{5}{p^{2s}}+\dots\right)\times$$

$$\times \prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right)$$

Далі

$$\Phi(s)=4\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\frac{1+\frac{1}{p^s}}{(1-\frac{1}{p^s})^2}=$$

$$=4\zeta(s)\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}}=4\zeta(s)\frac{1-\frac{1}{2^s}}{1-\frac{1}{2^s}}\prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)}\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}}\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\frac{1+\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^s}}=$$

$$=4\zeta^2(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)=$$

$$=4\zeta^2(s)\frac{1\frac{1}{2^{2s}}}{1+\frac{1}{2^s}}\frac{\prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)}{\prod_{p\equiv 3\ (mod\ 4)}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}\frac{\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)}{\prod_{p\equiv 1\ (mod\ 4)}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)}=$$

$$=4\zeta^2(s)\frac{L(s,\chi_4)}{(1+\frac{1}{2^s}\zeta(2s))},$$

де $L(s,\chi_4)$ - ряд Дирікле з неголовним характером за модулем 4 $\square$

Отже

$$\Phi(s) = 4\frac{\zeta^2(s)}{1+\frac{1}{2^s}}\frac{L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)} \tag{2.4}$$

Запишемо генеруючу функцію $\Phi(s)$ у вигляді

$$\Phi(s) = \frac{U(s)}{\zeta(2s)}, \tag{2.5}$$

де

$$U(s) = \frac{\zeta(s)}{1+\frac{1}{2^s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{2s}}}\prod_{p>2}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}. \tag{2.6}$$

Позначимо

$$U(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}.$$

З формули (2.6) випливає, що коефіцієнти $f(n)$ ряда Дiрiхле $U(s)$ невiд'ємнi.

Лема 12. *При $n \to \infty$ справедлива наступна асимптотична формула*

$$\sum_{n\leq N} f(n) = A'N\ln N + B'N + O(N^{\theta}\ln^K N), \tag{2.7}$$

де $A' = \dfrac{2\pi}{3}$, B' - стала, $K > 0$ - стала, $\theta = \dfrac{37}{75}$.

Доведення. Позначимо через $\overline{d_3}(n)$ кiлькiсть уявлень натурального числа n у виглядi

$$n = (x^2+y^2)z,$$

де x і y цілі числа, z натуральне число. Відома наступна формула: $\dfrac{1}{2} < \alpha < \dfrac{2}{3}$

і $\delta > 0$

$$\sum_{n\le N} \overline{d_3}(n) = \pi N \ln N + BN +$$
$$+\frac{\sqrt[3]{2}N^{1/3}}{\sqrt{3}\pi}\sum_{1\le n\le X}\frac{\overline{d_3}(n)}{n^{2/3}}\sin\left(3\sqrt[3]{2}(\pi(nN)^{1/3})\right)+O(N^{1+\delta-\alpha\ln^2 N}),$$

де $X = \dfrac{N^{3\alpha-1}}{16\pi^3}$,$B$ - деяка стала. Мета в тому, щоб отримати нетривіальну оцінку суми

$$\sum\sum_{\substack{1\le(p^2+q^2)r\le X\\ r>0}}\sum\frac{\sin\left(3\sqrt[3]{2}(\pi(nN)^{1/3})\right)}{((p^2+q^2)r)^{2/3}}$$

Позначимо

$$a_{pqr} = \sin\left(3\sqrt[3]{2}(\pi(nN)^{1/3})\right).$$

Розглянемо тригонометричну суму

$$\sum\sum_{\substack{1\le(p^2+q^2)r\le X\\ r>0}}\sum a_{(p^2+q^2)r}$$

Ми перетвориму цю суму так, щоб внутрішні сумування були довгими, а зовнішні не превищували б $\sqrt{X}$.

$$S = \sum\sum_{\substack{1\le(p^2+q^2)r\le X\\ r>0}}\sum a_{(p^2+q^2)r} =$$
$$= \sum_{1\le r\le X}\left(4\sum_{1\le p\le\sqrt{\frac{X}{2}}} a_{p^2r} + 8\sum\sum_{\substack{1\le p\le\sqrt{\frac{X}{2r}}\\ 0\le q\le\sqrt{\frac{X}{r}-p^2}}} a_{(p^2+q^2)r} - 4\sum\sum_{\substack{1\le p\le\sqrt{\frac{X}{2r}}\\ 0\le q\le\sqrt{\frac{X}{2r}}}}\right) =$$
$$= 4\sum_{p\le\sqrt{X}}\sum_{r\le\frac{X}{p^2}} a_{p^2r} + 8\sum_{p\le\sqrt{\frac{X}{2}}}\sum_{q\le\sqrt{X-p^2}}\sum_{r\le\frac{X}{p^2+q^2}} a_{(p^2+q^2)r} -$$

$$-4 \sum_{p\le\sqrt{\frac{X}{2}}} \sum_{q\le\sqrt{\frac{X}{2}}} \sum_{r\le\frac{X}{p^2+q^2}} a_{(p^2+q^2)r}$$

Внутрішні суми оцінюються методом Ван дер Корпута по третій похідній. Маємо

$$\sum_{n\le X} e^{i3\sqrt[3]{2}\pi(nN)^{1/3}} = O((X^{31/42}N^{1/42} + X^{85/84}N^{-1/42})\ln^K N).$$

Тоді

$$S = O((X^{15/14}N^{1/42} + X^{85/84}N^{-1/42})\ln^K N)$$

Застосування перетворення Абеля дає нам в результаті

$$N^{1/3} \sum_{1\le n\le X} \frac{\overline{d_3}(n)}{n^{2/3}} \sin(3\sqrt[3]{2}\pi(nN)^{1/3}) =$$
$$= O((N^{(3\alpha-1)/14+5/14} + N^{29(+\alpha-1)/84+13/42} + N^{1+\delta-\alpha})\ln^K N).$$

Оберемо $\delta = \dfrac{1}{\ln N}, \alpha = \dfrac{38}{75}$ і отримаємо формулу для суми значень $\overline{d_3}(n)$

$$\sum_{n\le N} \overline{d_3}(n) = \pi N \ln N + \overline{B}' N + O(N^\theta \ln^K N),\ \theta = \frac{37}{75} \tag{2.8}$$

Тепер з формули (2.8) отримаємо формулу (2.7). Розглянемо функцію

$$z(n) = \begin{cases} 1,\ n = 1 \\ 0,\ \text{не степінь двійки,} \\ (-1)^K,\ n = 2^K \end{cases}$$

Ми маємо

$$f(n) = \sum_{d|n} \overline{d_3}(n) z\left(\frac{n}{d}\right).$$

Отже

$$\sum_{n\le N} f(n) = \sum\sum_{ml\le N} \overline{d_3}(m)z(l) = \sum_{l\le N} z(l)\sum_{m\le \frac{N}{l}} \overline{d_3}(m) =$$

$$= \pi N \sum_{k\le \frac{\ln N}{\ln 2}} \frac{(-1)^k}{2^k} \ln\frac{N}{2^k} + \overline{B}' N \sum_{k\le \frac{\ln N}{\ln 2}} \frac{(-1)^k}{2^k} +$$

$$+O\left(N^\theta \ln^k N \sum_{k\le \frac{\ln N}{\ln 2}} \frac{1}{2^k}\right) = \frac{2}{3}\pi N \ln N + B'N + O(N^\theta \ln^k N)$$

$\square$

З формули (2.5) отримуємо

$$F_1(N) = \sum_{n\le N} r(n^2) = \sum\sum_{d^2 n\le N} f(n)\mu(d). \tag{2.9}$$

Оберемо $0 < \epsilon < 1$. Суму в лівій частині формули (2.9) розіб'ємо відповідно областям, як показано на Рис. 2.1. Позначимо

$$M(x) = \sum_{n\le x} \mu(n),$$

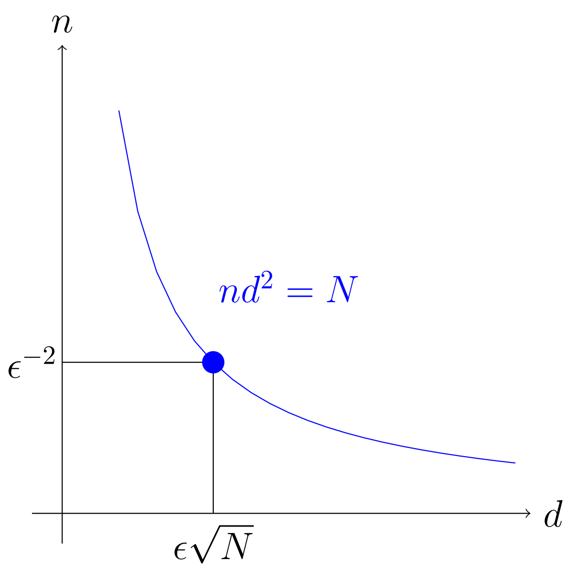

Рис. 2.1:

отримаємо

$$F_1(N) = \sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{\epsilon^{-2}\le n\le \frac{N}{d^2}} + \sum_{n\le\epsilon^{-2}} f(n) M\left(\frac{N}{n}\right) =$$

$$= \sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}} \mu(d) \sum_{n\le\frac{N}{d^2}} f(n) - M(\epsilon\sqrt{N}) \left(\sum_{n\le\epsilon^{-2}} f(n)\right) +$$

$$+O\left(\sum_{n\le\epsilon^{-2}} f(n) \left| M\left(\sqrt{\frac{N}{n}}\right)\right|\right).$$

Далі, використовуючи лему, отримуємо

$$F_1(N) = \frac{2\pi}{3} N \ln N \sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} - 2B^{-\prime} N \sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)\ln d}{d^2} +$$

$$+O\left(N^{\theta} \sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}} \frac{1}{d^{2\theta}}\right) + O\left(|M\epsilon\sqrt{N}|\epsilon^{-2}\ln\frac{1}{\epsilon}\right) + O\left(\sum_{n\le\epsilon^{-2}} f(n)\left| M\left(\sqrt{\frac{N}{n}}\right)\right|\right)$$

Тепер використаємо оцінку

$$M(x) = O\left(xe^{-c(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}}\right).$$

Позначимо

$$\delta(x) = e^{-c(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}}.$$

Застосовуя сумування Абеля, отримуємо

$$N\ln N \sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} = N\ln N\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>\epsilon\sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{\pi^2} N\ln N + O\left(\epsilon^{-1}N^{-1/2}\ln N\delta(\epsilon\sqrt{N})\right).$$

Далі

$$\sum_{n\le\epsilon^{-2}}\frac{f(n)}{n^{1/2}}=O\left(\int_1^{\epsilon^{-2}}\frac{\sum_{r\le u}f(r)}{u^{3/2}}du\right)+O\left(\epsilon\sum_{r\le\epsilon^{-2}}f(r)\right)=$$
$$=O\left(\ln\frac{1}{\epsilon}\int_1^{\epsilon^{-2}}\frac{du}{\sqrt{u}}\right)+O\left(\frac{1}{\epsilon}\ln\frac{1}{\epsilon}\right)=O\left(\frac{1}{\epsilon}\ln\frac{1}{\epsilon}\right)$$

Наведемо ще один необхідний результат

$$\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}-\sum_{d>\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}=B''-\sum_{d>\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}$$

Після застосування перетворення Абеля отримаємо

$$\sum_{d>\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}=O\left(\int_{\epsilon\sqrt{N}}^{\infty}\frac{|M(u)|\ln u}{u^3}du\right)+O\left(\frac{M(\epsilon\sqrt{N})\ln(\epsilon\sqrt{N})}{(\epsilon\sqrt{N})^2}\right).$$

В результаті отримуємо

$$N\sum_{d>\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}=O\left(N\delta(\epsilon\sqrt{N})\int_{\epsilon\sqrt{N}}^{\infty}\frac{\ln u}{u^2}du\right)+$$
$$+O\left(\epsilon^{-1}\ln N N^{1/2}\delta(\epsilon\sqrt{N})\right)=O(\epsilon^{-1}\ln N N^{1/2}\delta(\epsilon\sqrt{N})).$$

Отже

$$F_1(N)=\frac{2}{3}\pi\frac{6}{\pi^2}N\ln N+BN+O\left(\epsilon^{-1}\ln N N^{1/2}\delta(\epsilon\sqrt{N})\right)+$$
$$+O(\epsilon^{1-2\theta}N^{1/2})+O\left(\epsilon^{-1}\ln\frac{1}{\epsilon}N^{1/2}\delta(\epsilon\sqrt{N})\right),$$

тобто

$$F_1(N) = \frac{4}{\pi} N \ln N + BN + O\left(\epsilon^{1-\theta} \ln \frac{1}{\epsilon} N^{1/2} \ln N \left(1 + \frac{\delta(\epsilon\sqrt{N})}{\epsilon^{2(1-\theta)}}\right)\right).$$

Візьмемо

$$\epsilon = \delta(\sqrt[4]{N})^{1/(2(1-\theta))}.$$

Ми маємо

$$1 + \frac{\delta(\epsilon\sqrt{N})}{\epsilon^{2(1-\theta)}} = 1 + \frac{\delta(e\epsilon\sqrt{N})}{\delta(\sqrt[4]{N})}$$

Оскільки ϵ дає пониження степеня менше будь-якої степені N, то $\sqrt[4]{N} \leq \epsilon\sqrt{N}$ (при досить великих N), а оскільки $\delta(x)$ спадна функція, то

$$1 + \frac{\delta(\epsilon\sqrt{N})}{\epsilon^{2(1-\theta)}} \leq 2.$$

Ми отримуємо, що

$$F_1(N) = \frac{4}{\pi} N \ln N + BN + O(N^{1/2} e^{-c(\ln N)^{3/5}(\ln\ln N)^{-1/5}} \ln^k N) =$$
$$= \frac{4}{\pi} N \ln N + BN + O(N^{1/2} e^{-c(\ln N)^{3/5}(\ln\ln N)^{-1/5}}).$$

Теорему доведено.

Дослідимо кількість цілих точок на шарі конуса.

Теорема 6. *Нехай* $h < N$. *При* $h \to \infty$

$$F_1(N) - F_1(N-h) = \frac{4}{\pi}(N \ln N - (N-h) \ln (N-h)) +$$
$$+ \begin{cases} O(h^{1/76} N^{37/76} \ln^k N), \; h \geq N^{113/151} \\ O(N^{75/151} \ln^k N), \; h \leq N^{113/151}, \end{cases}$$

де $k > 0$ *досить велика стала.*

Доведення. З формули (2.9) отримуємо

$$F_1(N) - F_1(N-h) = \sum_{N-h} \sum_{\leq d^2 n \leq N} \mu(d) f(n).$$

Розглянемо два випадки окремо.

1. $h \geq \frac{N}{2}$.

   Тоді

$$F_1(N) - F_1(N-h) = \sum_{N-h} \sum_{\leq d^2 n \leq N} \mu(d) f(n) =$$
$$\sum_{d \leq \sqrt{N}} \mu(d) \left(A' \frac{N}{d^2} \ln \frac{N}{d^2} + B' \frac{N}{d^2} - A' \frac{N-h}{d^2} \ln \frac{N-h}{d^2} - B' \frac{N-h}{d^2} \right) +$$
$$+ O\left(\sum_{d \leq \sqrt{N}} \left(\frac{N}{d^2} \right)^{\theta} \ln^k N \right) =$$
$$= (A' N \ln N - A'(N-h) \ln (N-h)) \sum_{d \leq \sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} - 2A'h \sum_{d \leq \sqrt{N}} \frac{\mu(d) \ln d}{d^2} +$$
$$+ B'h \sum_{d \leq \sqrt{N}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{} \ln^k N) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}(A'N\ln N - A'(N-h)\ln(N-h)) +$$
$$+O\left((N\ln N - (N-h)\ln(N-h))\sum_{d\geq\sqrt{N}}\frac{1}{d^2}\right) +$$
$$+Bh + O\left(h\sum_{d\geq\sqrt{N}}\frac{\ln d}{d^2}\right) + O(\sqrt{N}\ln^k N) =$$
$$= \frac{6}{\pi^2}A'(N\ln N - (N-h)\ln(N-h)) + Bh + O\left(h\frac{\ln N}{\sqrt{N}}\right) + O(\sqrt{N}\ln^k N) =$$
$$= \frac{6}{\pi^2}A'(N\ln N - (N-h)\ln(N-h)) + Bh + O(\sqrt{N}\ln^k N)$$

через те, що $h \geq \frac{N}{2}$. Оскільки $h \asymp N$, то остачу можна записати у вигляді

$$O(h^{1/76}N^{37/76}\ln^k N).$$

2. $h < \frac{N}{2}$.

Оберемо $0 < \epsilon < 1$ і область $N - h < d^2 n \leq N$ розіб'ємо на три частини, як це показано на Рис. 2.2. Ми маємо

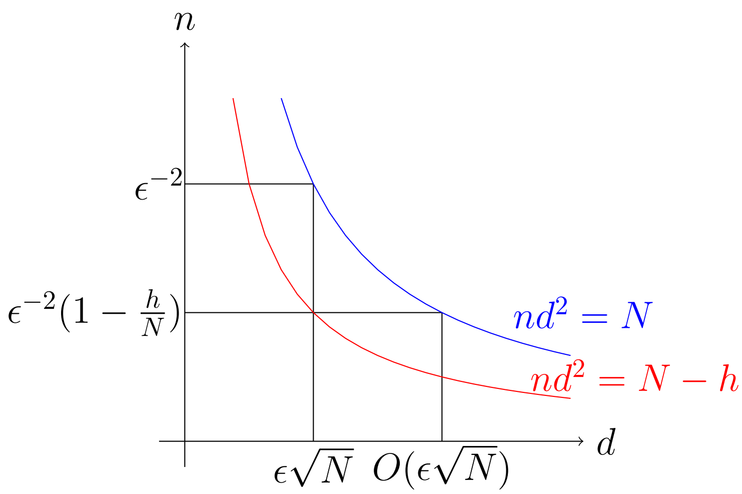

Рис. 2.2:

$$F_1(N)-F_1(N-h)=\sum_{N\le\epsilon^{-2}(1-\frac{h}{N})} f(n)\sum_{\sqrt{\frac{m-h}{n}}\le d\le\sqrt{\frac{N}{n}}}\mu(d)+$$

$$+O\left(\sum_{\epsilon^{-2}(1-\frac{h}{N}\le n\le\epsilon^{-2})}\ \sum_{\epsilon\sqrt{N}\le d\le O(\epsilon\sqrt{N})}1\right)+\sum_{d>\epsilon\sqrt{N}}\mu(d)\sum_{\frac{N-h}{d^2}\le n\le\frac{N}{d^2}}f(n).$$

Звідки отримуємо

$$F_1(N)-F_1(N-h)=\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(A'N\ln N-A'(N-h)\ln\frac{N-h}{d^2}+B'h\right)+$$

$$+O\left(N^\theta\ln^k N\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{1}{d^{2\theta}}\right)+O\left((\sqrt{N}-\sqrt{N-h})\sum_{n\le\epsilon}\frac{f(n)}{\sqrt{n}}\right)+$$

$$+O\left(\epsilon^{-2}\frac{h}{N}\epsilon\sqrt{N}\ln N\right)+O(\epsilon^{-2}\ln\frac{1}{\epsilon})+O\left(\epsilon^{-2\theta}\ln^k N\epsilon\sqrt{N}\right)$$

Поточнимо результат

$$\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)}{d^2}\left(A'N\ln\frac{N}{d^2}-A'(N-h)\ln\frac{N-h}{d^2}+B'h\right)=$$

$$=A'\left(N\ln N-(N-h)\ln(N-h)\right)\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)}{d^2}-2A'h\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)\ln d}{d^2}+$$

$$B'h\sum_{d\le\epsilon\sqrt{N}}\frac{\mu(d)}{d^2}=\frac{6}{\pi^2}A'\left(N\ln N-(N-h)\ln(N-h)\right)+$$

$$+O\left(\frac{1}{\epsilon}h\ln N\frac{1}{\sqrt{N}}\right)+Bh+O\left(\frac{1}{\epsilon}\frac{h\ln N}{\sqrt{N}}\right)=$$

$$=\frac{6}{\pi^2}A'\left(N\ln N-(N-h)\ln(N-h)\right)+Bh+O\left(\frac{h}{\epsilon\sqrt{N}}\ln N\right)$$

Зауважимо, що стала B тут така ж сама, що і в першому випадку.

Далі

$$N^{\theta}\sum_{d\leq\epsilon\sqrt{N}}\frac{1}{d^{2\theta}}=O(\epsilon^{1-2\theta}N^{1/2}),$$

$$(\sqrt{N}-\sqrt{N-h})\sum_{n\leq\epsilon\sqrt{N}}\frac{f(n)}{\sqrt{n}}=O\left(\frac{h}{\sqrt{N}}\sum_{n\leq\epsilon^{-2}}\frac{f(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

Виконуємо сумування по частинах

$$\sum_{n\leq\epsilon^{-2}}\frac{f(n)}{\sqrt{n}}=\varnothing\left(\int_1^{\epsilon^{-2}}\frac{\sum_{n\leq u}f(u)}{u^{3/2}}du\right)+O\left(\frac{\sum_{n<\epsilon^{-2}}f(n)}{\epsilon^{-1}}\right)=$$
$$=O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\ln\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Таким чином,

$$F_1(N)-F_1(N-h)=\frac{6}{\pi^2}A'(N\ln N-(N-h)\ln(N-h))+Bh+$$
$$+O\left(\frac{h}{\epsilon\sqrt{N}}\ln N\right)+O\left(\epsilon^{1-2\theta}N^{1/2}\ln^k N\right)+O\left(\frac{1}{\epsilon}\frac{h}{\sqrt{N}}\ln\frac{1}{\epsilon}\right)+O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\ln\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Якшо $hgeqN^{(2-\theta)/(3-2\theta)}$, то оберемо

$$\frac{1}{\epsilon}=\left(\frac{N}{n}\right)^{1/(2(1-\theta))}.$$

Ми отримуємо

$$F_1(N)-F_1(N-h)=\frac{6}{\pi^2}A'(N\ln N-(N-h)\ln(N-h))+Bh+$$
$$+O\left(\left(\frac{h}{N}\right)^{1-1/(2(1-\theta))}N^{1/2}\ln^k N\right).$$

Якщо $h \leq N^{(2-\theta)/(3-2\theta}$, то оберемо

$$\frac{1}{\epsilon} = N^{1/(2(3-2\theta))}$$

Ми маємо

$$F_1(N) - F_1(N-h) = \frac{6}{\pi^2}A'(N\ln N - (N-h)\ln(N-h)) + Bh +$$
$$+O(N^{1/(3-2\theta)}\ln^k N).$$

Покладемо $h = N - 1$

$$F_1(N) = A'\frac{6}{\pi^2}N\ln N + BN + O(N^{1/2}\ln^k N).$$

$A'\frac{6}{\pi^2}N\ln N + BN$ є лишком функції $\Phi(s)$ в точці $s = 1$, що дозволяє знайти $A'\frac{6}{\pi^2}$ і B.

Ми отримуємо

$$F_1(N) - F_1(N-h) = \frac{4}{\pi}(N\ln N - (N-h)\ln(N-h)) +$$
$$+ \begin{cases} O(h^{1/76}N^{37/76}\ln^k N),\ h \geq N^{113/151} \\ O(N^{75/151}\ln^k N),\ h \leq N^{113/151}, \end{cases}$$

□

ВИСНОВКИ

В роботі була досліджена проблема розподілу цілих точок на круговому конусі і розглянутий метод отримання відповідних асимптотичних оцінок для числа цілих точок кругового конусу та на окремому його шарі. Також було розглянуто питання про розподіл примітивних цілих точок на круговому конусі та отримання асимптотичної оцінки для числа примітивних цілих точок в секторіальній поверхні кругового конусу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] **Buterus P., Götze F., Hille T., Margulis G.**, Distribution of values of quadratic forms at integral points. 2021. https://doi.org/10.48550/arxiv.1004.5123

[2] **Fomenko O. M.** Distribution of lattice points on surfaces of second order, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 1994, Volume 212, 164–195.

[3] **Fomenko O. M.,** On the distribution of integral points on cones, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2010, Volume 383, 193–203

[4] **Montgomery H. and Vaughan R.,** Hilvert's inequality, J. London Math. Soc.,8(2)(1974),48-113.

[5] **Myakishev V. P.,** Distribution of primitive integral points on certain cones, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1962, Volume 143, Number 4, 785–786.

[6] **Varbanets P. D.** On the number of primitive integer points on elliptic cones in the arithmetic progression [text] / Varbanets P. // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 2006. V. 26. P. 25-42.

[7] **Walfisz A.,** Weilsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, Berlin, 1967.

[8] **Біркгоф Г.** Теорія решіток. – М. Наука, 1984. – 568 с.

[9] **Голубєва О. П.,** Розподіл цілих точок на поверхнях другого порядку і деяких поверхнях третього порядку, Зап. наук. сем. ЛОМІ, 1983, том 129, 39–42.

[10] **Лінник Ю.В.** Ергодичні властивості алгебраїчних полів, Л., 1967, 208 с.