Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 45–49

УДК 517.9

Арк. А. Кореновский, С. А. Щеголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ МНОГОЧАСТОТНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
"Теорія стійкості, теорія коливань у диференціальних рівняннях,
крайові задачі рівнянь математичної фізики" ОНУ 17.10.2002 р.

Для квазілінійної багаточастотної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотами, отримано умови існування частинного розв'язку аналогічної структури.

Для квазилинейной многочастотной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой имеют вид рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотами, получены условия существования частного решения аналогичной структуры.

For the quasilinear multifrequence differential system, whose coefficients are represented by the Fourier series with slowly varying coefficients and frequencies, the conditions of existence of particular solutions of the analogous structure are obtained.

Настоящая статья посвящена многочастотным дифференциальным системам с медленно меняющимися параметрами [1,2] и продолжает исследования, начатые в работах [3,4]. При этом существенно используется теория почти треугольных систем [5,6].

Введем следующие обозначения и определения:

$Z_m = \left\{k = (k_1, \dots, k_m)^T : k_\alpha \in Z \left(\alpha = \overline{1, m}\right)\right\}$, $\|k\| = \sum\limits_{\alpha=1}^{m} |k_\alpha|$, $\bar{0}$ – m-мерный вектор с нулевыми компонентами.

$G = \left\{t, \varepsilon : t \in R,\ \varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0\right],\ \varepsilon_0 \in R^+\right\}$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(t, \varepsilon)$ *принадлежит классу* S, если выполнены следующие условия:

1) $f : G \to C$, 2) $f \in C^1(G)$ по t,

3) $\dfrac{df}{dt} = \varepsilon f^*(t, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |f| < +\infty$, $\sup\limits_G \left|f^*\right| < +\infty$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ *принадлежит классу* F, если выполнены следующие условия:

1) $t, \varepsilon \in G$,

2) $\theta(t, \varepsilon) = (\theta_1(t, \varepsilon), \dots, \theta_m(t, \varepsilon))^T$,

где $\theta_\alpha = \int\limits_0^t \nu_\alpha(\tau, \varepsilon)\, d\tau$, $\nu_\alpha \in S$ $\left(\alpha = \overline{1, m}\right)$,

3) $f=\sum_{\|k\|\ge 0} f_k(t,\varepsilon)\exp(i(k,\theta(t,\varepsilon)))$, $k\in Z_m$, $(k,\theta)=\sum_{\alpha=1}^{m}k_\alpha\theta_\alpha$,

$\|f\|_F=\sup_G|f_{\bar 0}|+\sum_{\|k\|>0}\|k\|\cdot\sup_G|f_k|<+\infty$, $f_k\in G$, $\frac{df_k}{dt}=\varepsilon f_k^*(t,\varepsilon)$,

$\max_k\sup_G\left|f_k^*\right|<+\infty$.

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{l=1}^{j}p_{jl}(t,\varepsilon)x_l+f_j(t,\varepsilon,\theta)+\varepsilon X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,\dots,x_n),\ \ j=\overline{1,n}, \tag{1}$$

в которой $p_{jl}\in S$, $f_j\in F$ $\left(j,l=\overline{1,n},\ l\le j\right)$, $(x_1,\dots,x_n)^T\in D$, функции X_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ принадлежат классу F относительно t,ε,θ и имеют в области D непрерывные частные производные по $x_1,\dots,x_n$ до 3-го порядка включительно, и если $x_1,\dots,x_n$ из класса F, то эти частные производные также из класса F.

Изучается вопрос о существовании у системы (1) частных решений класса F. Соответствующий результат для одночастотной системы был получен в работе [3].

Система (1) рассматривается при следующем предположении:

$$\left|\operatorname{Re}p_{jj}(t,\varepsilon)\right|\ge\gamma>0\ \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{2}$$

Введем для любой функции $f(t,\varepsilon,\theta)\in F$ следующее обозначение:

$$\Gamma_k(f)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}f(t,\varepsilon,\theta)\exp(-i(k,\theta))d\theta_1\dots d\theta_m\ \ (k\in Z_m).$$

Далее $\forall\,k\in Z_m$ введем рекуррентным образом функции:

$$\xi_{1k}(t,\varepsilon)=-\frac{\Gamma_k(f_1)}{p_{11}-i(k,\nu)},\dots,\ \xi_{lk}(t,\varepsilon)=-\frac{\sum_{r=1}^{l-1}p_{lr}\xi_{rk}+\Gamma_k(f_l)}{p_{ll}-i(k,\nu)}\ \ \left(l=\overline{2,n}\right),$$

$$\xi_l(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{\|k\|\ge 0}\xi_{lk}(t,\varepsilon)\exp(i(k,\theta(t,\varepsilon)))\ \ \left(l=\overline{1,n}\right),\ \ \nu=(\nu_1,\dots,\nu_m)^T.$$

Очевидно, что $\xi_l\in F$ $\left(l=\overline{1,n}\right)$.

Обозначим:

$$g_j(t,\varepsilon,\theta)=-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\|k\|\ge 0}\frac{d\xi_{jk}}{dt}\exp(i(k,\theta))\ \ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Теорема. *Пусть система* (1) *такова, что выполнено условие* (2), *и функции* g_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, *определяемые соотношением* (3), *принадлежат классу* F.

Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon>0$ *система* (1) *имеет единственное частное решение* $x_j(t,\varepsilon,\theta)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ *класса* F.

Доказательство. Произведем в системе (1) подстановку

$$x_j=\xi_j+y_j,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

где $y_1,\dots,y_n$ – новые неизвестные функции. В результате придем к системе:

$$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{l=1}^{j}p_{jl}(t,\varepsilon)y_l+\varepsilon g_j(t,\varepsilon,\theta)+\varepsilon u_j(t,\varepsilon,\theta)+\varepsilon\sum_{l=1}^{n}v_{jl}(t,\varepsilon,\theta)y_l+$$
$$+\varepsilon Y_j(t,\varepsilon,\theta,y_1,\ldots,y_n),\quad j=\overline{1,n}\,, \tag{5}$$

в которой $u_j=X_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $v_{jl}=\dfrac{\partial X_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial x_l}$ $\left(j,l=\overline{1,n}\right)$. Нелинейности $Y_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ принадлежат классу F относительно t,ε,θ и содержат слагаемые не ниже 2-го порядка относительно $y_1,\ldots,y_n$.

Будем искать решение системы (5) в виде:

$$y_j=\sum_{\|k\|\ge 0}y_{jk}(t,\varepsilon)\exp(i(k,\theta(t,\varepsilon))),\quad j=\overline{1,n}\,. \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в систему (5), получим счетную систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов y_{jk}:

$$\frac{dy_{jk}}{dt}=\sum_{l=1}^{j}\left(p_{jl}(t,\varepsilon)-i\delta_j^l(k,\nu(t,\varepsilon))\right)y_{lk}+\varepsilon g_{jk}(t,\varepsilon)+\varepsilon u_{jk}(t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\sum_{l=1}^{n}\sum_{\|\alpha\|\ge 0}v_{jl,k-\alpha}(t,\varepsilon)y_{l\alpha}+\varepsilon Y_{jk}(t,\varepsilon,\{y_1\},\ldots,\{y_n\}),\quad j=\overline{1,n},\ k\in Z_m\,. \tag{7}$$

Здесь обозначено: $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)^T\in Z_m$, $k-\alpha=(k_1-\alpha_1,\ldots,k_m-\alpha_m)^T\in Z_m$,

$$g_{jk}=\Gamma_k(g_j),\ u_{jk}=\Gamma_k(u_j),\ v_{jlk}=\Gamma_k(v_{jl}),\ Y_{jk}=\Gamma_k(Y_j),$$

$\{y_j\}=\mathrm{colon}(y_{jk})_{k\in Z_m}$, δ_j^l – символ Кронекера. Нелинейности Y_{jk} содержат слагаемые не ниже 2-го порядка относительно $y_{1s},\ldots,y_{ns}$ $(s\in Z_m)$. Поэтому, произведя в системе (7) подстановку

$$y_{jk}=\varepsilon z_{jk}\,,\ j=\overline{1,n}\,,\ k\in Z_m\,, \tag{8}$$

придем к системе вида:

$$\frac{dz_{jk}}{dt}=\sum_{l=1}^{j}\left(p_{jl}(t,\varepsilon)-i\delta_j^l(k,\nu(t,\varepsilon))\right)z_{jl}+g_{jk}(t,\varepsilon)+u_{jk}(t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\sum_{l=1}^{n}\sum_{\|\alpha\|\ge 0}v_{jl,k-\alpha}(t,\varepsilon)z_{l\alpha}+\varepsilon^2 Z_{jk}(t,\varepsilon,\{z_1\},\ldots,\{z_n\}),\quad j=\overline{1,n},\ k\in Z_m\,. \tag{9}$$

Наряду с системой (9) рассмотрим линейную неоднородную систему:

$$\frac{dz_{jk}^0}{dt}=\sum_{l=1}^{j}\left(p_{jl}(t,\varepsilon)-i\delta_j^l(k,\nu(t,\varepsilon))\right)z_{jl}^0+g_{jk}(t,\varepsilon)+u_{jk}(t,\varepsilon),\quad j=\overline{1,n},k\in Z_m\,. \tag{10}$$

В силу ограничения (2) на основании результатов [5] можно утверждать, что система (10) имеет единственное ограниченное в области G решение $z_{jk}^0(t,\varepsilon)$, причем $\exists A\in\left]0,+\infty\right[$ такое, что:

$$\sum_{j=1}^{n}\sup_G\left|z_{jk}^0\right|\le A\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G\left|g_{jk}\right|+\sup_G\left|u_{jk}\right|\right)\ (k\in Z_m).$$

Рассмотрим область:

$$\Omega=\left\{z_{jk}\ :\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G\left|z_{j,\bar 0}-z^0_{j,\bar 0}\right|+\sum_{\|k\|>0}\|k\|\sup_G\left|z_{jk}-z^0_{jk}\right|\right)\le d\,,\ d>0\right\}.$$

Обозначим:

$$M(d)=\sup_G\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G\left|Z_{j,\bar 0}(t,\varepsilon,\{z_1\},\ldots,\{z_n\})\right|+\sum_{\|k\|>0}\|k\|\sup_G\left|Z_{jk}(t,\varepsilon,\{z_1\},\ldots,\{z_n\})\right|\right).$$

Из свойств функций $X_j\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ вытекает, что $\exists\ L(d)\in\left]0,+\infty\right[$ такая, что $\forall\ z_{jk}\ ,\ z^*_{jk}\in\Omega$ выполнено:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G\left|Z_{j,\bar 0}(t,\varepsilon,\{z_1\},\ldots,\{z_n\})-Z_{j,\bar 0}\left(t,\varepsilon,\left\{z^*_1\right\},\ldots,\left\{z^*_n\right\}\right)\right|\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\|k\|>0}\|k\|\sup_G\left|Z_{jk}(t,\varepsilon,\{z_1\},\ldots,\{z_n\})-Z_{jk}\left(t,\varepsilon,\left\{z^*_1\right\},\ldots,\left\{z^*_1\right\}\right)\right|\le$$

$$\le L(d)\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G\left|z_{j,\bar 0}-z^*_{j,\bar 0}\right|+\sum_{\|k\|>0}\|k\|\sup_G\left|z_{jk}-z^*_{jk}\right|\right).$$

Будем искать ограниченное в G решение системы (9) методом последовательных приближений, взяв в качестве начального $z^0_{jk}\ \left(j=\overline{1,n}\,,\ k\in Z_m\right)$, а последующие определив как ограниченные в G решения линейных неоднородных систем:

$$\frac{dz^{s+1}_{jk}}{dt}=\sum_{l=1}^{j}\left(p_{jl}(t,\varepsilon)-i\delta^l_j(k,\nu(t,\varepsilon))\right)z^{s+1}_{jl}+g_{jk}(t,\varepsilon)+u_{jk}(t,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\sum_{l=1}^{n}\sum_{\|\alpha\|>0}v_{jl,k-\alpha}(t,\varepsilon)z^s_{lp}+\varepsilon^2Z_{jk}\left(t,\varepsilon,\left\{z^s_1\right\},\ldots,\left\{z^s_n\right\}\right),\ j=\overline{1,n}\,,\ k\in Z_m\,,\ s=0,1,2,\ldots.\quad(11)$$

Нетрудно установить, что при условии

$$A\varepsilon\left[nv\left(A\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G\left|g_{j,\bar 0}\right|+\sup_G\left|u_{j,\bar 0}\right|+\sum_{\|k\|>0}\|k\|\left(\sup_G\left|g_{jk}\right|+\sup_G\left|u_{jk}\right|\right)\right)+d\right)+\varepsilon M(d)\right]\le$$

$$\le d_0<d\,,\quad(12)$$

где

$$v=\max_{j,k}\left(\sup_G\left|v_{jk,\bar 0}\right|+\sum_{\|\alpha\|>0}\|\alpha\|\sup_G\left|v_{jk,\alpha}\right|\right),$$

все приближения $z^s_{jk}\ \left(j=\overline{1,n}\,,\ k\in Z_m\,,\ s=0,1,2,\ldots\right)$ остаются внутри области Ω, а при условии

$$A\varepsilon(nv+\varepsilon L(d))<1\quad(13)$$

процесс (11) сходится к ограниченному в G решению $z_{jk}(t,\varepsilon)\ \left(j=\overline{1,n}\,,k\in Z_m\right)$ системы (9), причем

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G \left| z_{j,\bar{0}} \right| + \sum_{\|k\|>0} \|k\| \sup_G \left| z_{jk} \right| \right) < +\infty \ .$$

Из самой системы (9) тогда следует, что $\exists\ B \in \left]0, +\infty\right[$ такое, что

$$\forall\ j = \overline{1,n}\,,\ k \in Z_m$$

$$\left| \frac{dz_{jk}}{dt} \right| \le B\ .$$

Тогда, как следует из соотношения (8):

$$\left| \frac{dy_{jk}}{dt} \right| \le \varepsilon B\,, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sup_G \left| y_{j,\bar{0}} \right| + \sum_{\|k\|>0} \|k\| \sup_G \left| y_{jk} \right| \right) < +\infty\ . \tag{15}$$

С учетом соотношений (3),(6) отсюда вытекает существование решения класса F системы (1). Очевидно, неравенства (12),(13) выполняются для достаточно малых значений параметра ε.

Теорема доказана.

Выводы. Таким образом, доказано существование у системы (1) частных решений класса F в некритическом случае, то есть при условии (2). Предметом дальнейшего рассмотрения становятся критические случаи, то есть когда условие (2) не выполнено.

1. **Самойленко А. М., Петришин Р. І.** Багаточастотні коливання нелінійних систем.– К.: ІМ НАНУ, 1998.– 340 с.
2. **Самойленко А. М.** Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.– К.: Наук. думка, 1977.– С. 181–191.
3. **Костин А. В. , Щеголев С. А.** Об одном классе решений дифференциальной системы с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн.– 1989.– Т. 41, № 1.– С. 101–103.
4. **Щеголев С. А.** Об одном классе решений многочастотной квазилинейной системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.– 1990.– Т. 42, № 9.– С.1294–1296.
5. **Костин А. В.** К вопросу о существовании у системы обыкновенных дифференциальных уравнений ограниченных частных решений и частных решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$ // Дифференц. уравн.– 1965.– Т. 1, № 5.– С. 585–604.
6. **Костин А. В.** Устойчивость и асимптотика квазилинейных неавтономных дифференциальных систем. – Одесса: Одес. ун-т, 1984.– 94 с.

Получено 25.10.2002 г.