Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра диференціальних рівнянь, геометрії та топології

Дипломна робота

бакалавра

на тему: «YHC$^-$ структура на псевдоріманових многовидах»

«YHC$^-$ structure on pseudo-Riemannian manifolds»

Виконав: студент денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Соловйов Андрій Анатолійович

Керівник
к.ф. - м.н., доцент, Курбатова І. М.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент
к.ф. - м.н., доцент, Покась С. М.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від ______________ р.

Завідувач кафедри

Євтухов В.М.

(підпис) (прізвище, ініціали)

Захищено на засіданні ЕК №
протокол № ____ від ____________ р.
Оцінка_____________/___ ___/_____
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Голова ЕК

____

(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2021

ЗМІСТ

1. Вступ

В останні десятиліття інтенсивно розвивається теорія дифеоморфізмів афіннозв'язних і риманових просторів, які наділені афінорними структурами різних типів. Так, детально досліджувалися голоморфно-проективні відображення келерових просторів із збереженням комплексної структури.

Разом з тим увагу багатьох геометрів привертають й інші диференційно-геометричні структури на многовидах: е-структури, f-структури, кватерніонні та інші.

Властивості тензорів Рімана і Річчі, отримані нами для псевдоріманових просторів, наділених майже ермітовою абсолютно парралельною YHC^{-}структурою, можуть використовуватися при дослідженнях дифеоморфізмів риманових просторів із спеціальними афінорними структурами.

Отримана нами структура аффінора, метричного тензора та символів Крістофеля ріманового простору з вказаною структурою зазвичай застосовуються для пошуку метрик спеціальних класів риманових просторів, що допускають певне відображення.

2. Основні поняття і визначення

Простором A_n ***афінної зв'язності*** називається дійсний многовид X_n класу C^r, в якому визначено об'єкт афінної зв'язності Γ. Це означає, що в кожній локальній системі координат (x^i), $i = \overline{1,n}$, на X_n задана сукупність функцій $\Gamma^h_{ij}(x)$, що змінюються при будь-якому перетворенні координат виду:

$$x'^i = x'^i(x^j),\ i,j = \overline{1,n},$$

згідно із законом:

$$\Gamma'^h_{ij}(x') = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^h}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^h}{\partial x^\alpha}.$$

Якщо $\Gamma^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ji}(x)$, то A_n називається ***простором афінної зв'язності без скруту.***

Рімановим простором V_n називається дійсний многовид X_n класу C^r, в якому визначено поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензора g_{ij}, який називається метричним тензором простору. У кожній локальній системі координат на X_n його компоненти є відомими функціями классу C^{r-1} від координат поточної точки $W \in X_n$, що задовольняють умовам:

$$g_{ij} = g_{ji},$$

$$det||g_{ij}|| \neq 0,$$

і при переході до нової системи координат:

$$x'^i = x'^i(x^j),\ i,j = \overline{1,n}$$

змінюються таким чином:

$$g'_{ij}(x') = g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}.$$

На V_n за допомогою метричного тензора формулами

$$\Gamma^h_{ij} = g^{h\alpha}\Gamma_{ij,\alpha}$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j})$$

визначаються ***символи Крістофеля другого роду***, що є об'єктами афінної зв'язності Γ на V_n (її називають ***рімановою зв'язністю***).

За допомогою об'єкту зв'язності Γ на V_n будується ***тензор Рімана*** типа $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$:

$$R^h_{\cdot ijk} = -\frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{k\alpha} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{j\alpha}$$

що задовольняє умовам:

$$\begin{gathered} R^h_{\cdot ijk} + R^h_{\cdot ikj} = 0 \\ R^h_{\cdot (ijk)} = 0 \\ R^h_{\cdot i(jk,l)} = 0, \end{gathered} \tag{2.1}$$

де «,» – знак коваріантної похідної за зв'язністю Γ.

Тензор типа $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

$$R_{hijk} = g_{h\alpha} R^\alpha_{\cdot ijk}$$

називається ***тензором кривини*** V_n який окрім умов на тензор Рімана, задовольняє співвідношенням:

$$R_{hijk} + R_{ihjk} = 0$$

$$R_{hijk} + R_{hikj} = 0$$

$$R_{hijk} - R_{jkhi} = 0$$

Тензор типа $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$$R_{ij} = R^\alpha_{\cdot ij\alpha}$$

називається ***тензором Річчі*** простору V_n. Він за необхідністю симетричний:

$$R_{ij} = R_{ji},$$

а його слід:

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

називається ***скалярною кривиною*** простору V_n.

Символами Кронекера δ^h_i називається тензор типа $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, який задовольняє співвідношенню: $\delta^h_i = \begin{cases} 1, & h = i \\ 0, & h \neq i \end{cases}$

Секційна кривизна V_n в даному двовимірному напрямку $E_{2\{\lambda_1,\lambda 2\}}$ задається формулою:

$$K = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\gamma\lambda_2^\delta}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\gamma\lambda_2^\delta}$$

.

Рімановий простір V_n називається ***простором сталої кривини***, якщо в кожній точці $M(x) \in V_n$ секційна кривина стала, тобто $K(x) = const$.

Для того, щоб рімановий простір мав сталу кривину, необхідно і достатньо, щоб його тензор Рімана мав вигляд:

$$R_{hijk} = K\left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}\right)$$

Надалі нам знадобиться ***тотожність Річчі*** для тензора типу $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, що виражає в тензорній формі незалежність змішаних частинних похідних другого порядку компонент тензора від порядку диференціювання

$$F^h_{i,[jk]} = -F^h_{i,jk} + F^h_{i,kj} = -F^\alpha_i R^h_{\cdot ajk} + F^h_\alpha R^\alpha_{\cdot ijk}$$

Рімановий простір V_n називається (локально) ***приведеним***, якщо в деякому околі D кожної його точки M може бути вибрана така система координат $y^1, y^2, \ldots, y^n$ відносно якої основна метрична форма має вигляд:

$$I = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta, a, b, c = \overline{1,k},\, \alpha, \beta, \gamma = \overline{k+1, n}.$$

Тут g_{ab} передбачаються залежними тільки від $x^1, x^2, ..., x^k$, а $g_{\alpha\beta}$ – тільки від $x^{k+1}, x^{k+2}, ..., x^n$. Тим самим приведений рімановий простір V_n згідно означенню представляє собою добуток ріманового простору V_m (віднесеного до координат $x^1, x^2, ..., x^k$) з основною метричною формою $g_{ab}(x^c)dx^a dx^b$ на рімановий простір V_{n-m}(віднесеного до координат $x^{k+1}, x^{k+2}, ..., x^n$) з метричною формою $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta$.

Дійсний диференційований многовид X_n класу C^r вважається наділеним ***афінорною структурою*** [6], якщо на ньому задано поле F тензора типу $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Афінорна структура F називається ***інтегрованою*** (локально) [6], якщо в деякому околі кожної точки многовиду існує така система координат, щодо якої всі компоненти F^h_i в цій області є сталими. Відомо, що необхідною і достатньою ознакою локальної інтегрованості F^h_i є існування на X_n симетричної афінної зв'язності Γ, щодо якої ця структура абсолютно паралельна [6], тобто

$$F^h_{i,j} = 0$$

У літературі, як правило, розглядаються афінорні структури при різних алгебраїчних і диференціальних умовах. Так, наприклад, структура F^h_i така, що

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = \mathrm{e}\delta^h_i$$

називається ***e-структурою*** (***еліптичного типу*** при $e = -1$, ***параболічного типу*** при $e = 0$, структурою ***гіперболічного типу*** - при $e = 1$) [6].

Домовимося операцію згортання з афінором позначати наступним чином:

$$S_{\bar{i}} = S_\alpha F^\alpha_i,$$

$$S^{\bar{i}} = S^\alpha F^i_\alpha.$$

В сучасній літературі, присвяченій вивченню афінорних структур на рімановому просторі, як правило, афінорна структура узгоджується з метрикою. Ми розглядаємо структуру четвертого порядку на рімановому просторі (V_n, g_{ij}), яка задовольняє таким алгебраїчним умовам:

$$F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\gamma F^\gamma_i \pm F^h_\alpha F^\alpha_i = 0.$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \ (F_{ij} = g_{i\alpha} F^\alpha_j)$$

В подальшому будемо розглядати тільки випадок

$$F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\gamma F^\gamma_i - F^h_\alpha F^\alpha_i = 0$$

Домовимося цю структуру називати ***структурой Яно-Хоу-Чена*** або YHC$^-$-структурою.

Будемо вважати розглянуті в подальшому афінорні структури абсолютно паралельними (коваріантно сталими) в V_n, тобто

$$F^h_{i,j} \equiv 0$$

3. Властивості тензорів Рімана і Річчі ріманових просторів з абсолютно параленьною YHC^{-}-структурою

Розглянемо рімановий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h), на якому визначена афінорна структура F виду:

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_\gamma^\beta F_i^\gamma - F_\alpha^h F_i^\alpha = 0 \tag{3.1}$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \; (F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha) \tag{3.2}$$

$$F_{i,j}^h \equiv 0 \tag{3.3}$$

В ріманових просторах, наділених YHC^{-} структурою при умові коваріантної сталості афінора F природним чином виникають умови на тензори Рімана і Річчі.

В нашому випадку, з огляду на $F_{i,j}^h \equiv 0$, маємо $F_{i,jk}^h \equiv 0$ і, значить, $F_{i,[jk]}^h = F_{i,jk}^h - F_{i,kj}^h \equiv 0$. Застосовуючи тотожність Річчі, звідси отримуємо:

$$R^{h}_{\cdot\,\bar{i}jk} - R^{\overline{h}}_{\cdot\,ijk} = 0 \tag{3.4}$$

або відповідно до (2.1):

$$R_{h\bar{i}jk} + R_{\overline{h}ijk} = 0, \tag{3.4$'$}$$

Зробимо в (3.4) сполучення за індексом k враховуючи (3.2):

$$R_{h\bar{i}j\overline{k}} + R_{\overline{h}ij\overline{k}} = 0$$

Згідно $(3.4')$, маємо:

$$R_{h\overline{ij}k} - R_{\overline{h}ij\overline{k}} = 0. \tag{3.5}$$

Звідси на підставі алгебраїчної тотожності Бьянкі після альтернування по i,j маємо:

$$R_{h[\overline{ij}]k} = R_{hk\overline{ji}} \tag{3.6}$$

та

$$R_{\overline{h}[ij]\overline{k}} = R_{\overline{hk}ji} \tag{3.7}$$

З (3.5) отримуємо:

$$R_{h[\overline{ij}]k} - R_{\overline{h}[ij]\overline{k}} = 0,$$

але, згідно (3.6) та (3.7), отримаємо, що

$$R_{\overline{hi}jk} = R_{hi\overline{jk}}.$$

Тоді, враховуючи $(3.4')$:

$$R_{\overline{\overline{\overline{h}}}ijk} = R_{hij\overline{\overline{\overline{k}}}} \tag{3.8}$$

А з визначення YHC$^-$-структури $(3.1) - (3.3)$ випливає:

$$R_{\overline{\overline{\overline{\overline{h}}}}ijk} = R_{\overline{\overline{\overline{h}}}ijk},$$

тогда, с учетом (3.8), получаем, что

$$R_{\overline{\overline{\overline{h}}}ij\overline{\overline{\overline{k}}}} = R_{\overline{\overline{\overline{h}}}\,i\,\overline{\overline{\overline{j}}}k}$$

Згортаючи $(3.4')$ з метричним тензором g^{jk}:

$$R_{\overline{h}i} = -R_{h\overline{i}}, \tag{3.9}$$

і сполучимо за h:

$$R_{\overline{\overline{\overline{h}}}i} = -R_{\overline{h}\overline{i}}$$

За властивостю $(3.4')$, отримаємо:

$$R_{\overline{\overline{\overline{h}}}i} = R_{h\overline{\overline{\overline{i}}}}$$

Таким чином, отримали, що з властивості $(3.4')$ випливає: операція сполучення для тензора Рімана володіє косою симетрією для першого індексу з другим і для третього індексу з четвертим. Схожий висновок для властивості (3.9) - опреация сполучення для тензора Річчі володіє косою симетрією.

4. Канонічний вид афінора в ріманових просторах з абсолютно параленьною YHC⁻-структурой

Нехай ρ – власне значення афінора, $\overset{1}{F}$ відповідне власному вектору λ, тобто:

$$F^h_\alpha \lambda^\alpha = \rho \lambda^h, \tag{4.1}$$

Згортаючи цю рівність з F^h_k за індексом h тричі, отримуємо:

$$F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\gamma F^\gamma_\delta \lambda^\delta = \rho F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_\gamma \lambda^\gamma = \rho^2 F^h_\alpha F^\alpha_\beta \lambda^\beta = \rho^3 F^h_\alpha \lambda^\alpha = \rho^4 \lambda^h, \tag{4.2}$$

тоді, скориставшись (2.1), отримаємо: $\rho^4 = \rho^2$, і, значить, власні значення афінора F такі:

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = 1, \rho_3 = -1.$$

Нехай їх кратність k_1, k_2, k_3. Причому $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

У відповідності до вище вказаного, в кожній точці x простору V_n матриця афінора за допомогою спеціального вибору базиса дотичного простору $T_{x_{V_n}}$ може бути приведена до виду:

$$(F^h_i) = \begin{array}{l} k_{1_1}\{ \\ k_{1_2}\{ \\ k_2\ \{ \\ k_3\ \{ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{k_3} \end{pmatrix}, k_{1_1} = k_{1_2} = \tfrac{1}{2}(n - k_2 - k_3) \tag{4.3}$$

Звідси випливає, що $F^\alpha_\alpha = k_2 - k_3$, а при $k_2 = k_3 : F^\alpha_\alpha = 0$.

Надалі будемо користуватися саме цією системою координат і називати її адаптованою до аффінору. Для $\overset{2}{F}$ маємо в даному базисі

$$(\overset{2}{F}{}_i^h) = \begin{array}{l} k_{1_1}\{ \\ k_{1_2}\{ \\ k_2\ \{ \\ k_3\ \{ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{k_3} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

причому $\overset{2}{F}{}_\alpha^\alpha = k_2 + k_3$.

Для $\overset{3}{F}$ маємо в даному базисі

$$(\overset{3}{F}{}_i^h) = \begin{array}{l} k_{1_1}\{ \\ k_{1_2}\{ \\ k_2\ \{ \\ k_3\ \{ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{k_3} \end{pmatrix},$$

причому $\overset{3}{F}{}_\alpha^\alpha = k_2 - k_3$, а при $k_2 = k_3 : \overset{3}{F}{}_\alpha^\alpha = 0$.

5. Метричний тензор ріманових просторів з абсолютно параленьною YHC^{-}-структурою в адаптованій системі координат

В випадку абсолютно параленьної структури F приводиться до виду, вказаному в попередньому параграфі, в деякому околі кожної точки простору, оскільки структура в цьому випадку інтегрована. В такій спеціальній системі координат набуває специфіки матриця метричного тензора.

Згідно (3.2), дослідимо структуру метричного тензора використовуючи результати попереднього розділу. Позначимо

$$(g_{hi}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

З визначення метричного тензора випливає:

$$A_{ij} = A^T_{ji}. \tag{5.1}$$

Запишемо умову (3.2) в матричній формі:

$$(g_{h\alpha}F^{\alpha}_{i}) = -(g_{i\alpha}F^{\alpha}_{h}),$$

де

$$(F^h_i) = \begin{array}{c} k_{1_1}\{ \\ k_{1_2}\{ \\ k_2\,\{ \\ k_3\,\{ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{k_3} \end{pmatrix}$$

Залежність між блоками метричного тензора така:

$$A_{12} = -A_{21},\, A_{33} = -A_{33},\, A_{44} = -A_{44},$$

$$A_{13} = A_{14} = A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0,$$

враховуючи (5.1), отримаємо, що

$$A_{12} = -A_{21},$$

$$A_{13} = A_{14} = A_{22} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{33} = A_{41} = A_{42} = A_{44} = 0.$$

Отже маємо:

$$(g_{ih}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ -A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{43} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

6. Символи Крістоффеля ріманових просторів з абсолютно параленьною ҮНС$^{-}$ -структурою в адаптованій системі координат

Розглянемо рімановий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h), на якому визначена афінорна структура F виду (3.1) - (3.3).

З огляду на те, що афінор $\overset{1}{F}$ коваріантно сталий в V_n, отримаємо специфіку об'єкта в ріманової зв'язності Γ в даній системі координат. Розіб'ємо систему рівнянь

$$\overset{2}{F}{}^h_{i,j} = \frac{\partial \overset{2}{F}{}^h_i}{\partial x^j} + \overset{2}{F}{}^\alpha_i \, \Gamma^h_{j\alpha} - \overset{2}{F}{}^h_\alpha \, \Gamma^\alpha_{ji} = 0 \tag{6.1}$$

$$i, j, h, \alpha = \overline{1, n}$$

на групи, вважаємо

$$a_1, b_1, c_1, d_1, ... = \overline{1, k_1},$$

$$a_2, b_2, c_2, d_2, ... = \overline{k_1 + 1, n}.$$

Враховуючи, що в вибраній системі координат компоненти афінора мають вигляд (4.4), вірні наступні рівності:

$$\frac{\partial \overset{2}{F}{}^h_i}{\partial x^j} = 0,$$

$$\overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_1} = \overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_2} = \overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_1} = 0,$$

$$\overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_2} = \delta^{a_2}_{b_2},$$

$$\overset{2}{F}{}^h_{i,j} = \frac{\partial \overset{2}{F}{}^h_i}{\partial x^j} + \overset{2}{F}{}^\alpha_i \, \Gamma^h_{j\alpha} - \overset{2}{F}{}^h_\alpha \, \Gamma^\alpha_{ji} = 0,$$

маємо:

1) при $h = a_1, i = b_1, j = c_1$:

$$\overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_1,c_1} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_1} \, \Gamma^{a_1}_{c_1 d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_1} \, \Gamma^{a_1}_{c_1 d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_1} \, \Gamma^{d_1}_{c_1 b_1} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_2} \, \Gamma^{d_2}_{c_1 b_1} = 0 \Rightarrow \overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_1,c_1} = 0,$$

2) при $h = a_1, i = b_1, j = c_2$:

$$\overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_1,c_2} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_1} \, \Gamma^{a_1}_{c_2 d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_1} \, \Gamma^{a_1}_{c_2 d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_1} \, \Gamma^{d_1}_{c_2 b_1} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_2} \, \Gamma^{d_2}_{c_2 b_1} = 0 \Rightarrow \overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_1,c_2} = 0,$$

3) при $h = a_1, i = b_2, j = c_1$:

$$\overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_2,c_1} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_2} \, \Gamma^{a_1}_{c_1 d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_2} \, \Gamma^{a_1}_{c_1 d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_1} \, \Gamma^{d_1}_{c_1 b_2} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_2} \, \Gamma^{d_2}_{c_1 b_2} = 0 \Rightarrow \Gamma^{a_1}_{c_1 b_2} = 0,$$

4) при $h = a_1, i = b_2, j = c_2$:
$\overset{2}{F}{}^{a_1}_{b_2,c_2} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_2}\,\Gamma^{a_1}_{c_2d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_2}\,\Gamma^{a_1}_{c_2d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_1}\,\Gamma^{d_1}_{c_2b_2} - \overset{2}{F}{}^{a_1}_{d_2}\,\Gamma^{d_2}_{c_2b_2} = 0 \Rightarrow \Gamma^{a_1}_{c_2b_2} = 0,$
5) при $h = a_2, i = b_1, j = c_1$:
$\overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_1,c_1} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_1}\,\Gamma^{a_2}_{c_1d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_1}\,\Gamma^{a_2}_{c_1d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_1}\,\Gamma^{d_1}_{c_1b_1} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_2}\,\Gamma^{d_2}_{c_1b_1} = 0 \Rightarrow \Gamma^{a_2}_{c_1b_1} = 0,$
6) при $h = a_2, i = b_1, j = c_2$:
$\overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_1,c_2} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_1}\,\Gamma^{a_2}_{c_2d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_1}\,\Gamma^{a_2}_{c_2d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_1}\,\Gamma^{d_1}_{c_2b_1} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_2}\,\Gamma^{d_2}_{c_2b_1} = 0 \Rightarrow \Gamma^{a_2}_{c_2b_1} = 0,$
7) при $h = a_2, i = b_2, j = c_1$:
$\overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_2,c_1} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_2}\,\Gamma^{a_2}_{c_1d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_2}\,\Gamma^{a_2}_{c_1d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_1}\,\Gamma^{d_1}_{c_1b_2} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_2}\,\Gamma^{d_2}_{c_1b_2} = 0 \Rightarrow \overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_2,c_1} = 0,$
8) при $h = a_2, i = b_2, j = c_2$:
$\overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_2,c_2} = \overset{2}{F}{}^{d_1}_{b_2}\,\Gamma^{a_2}_{c_2d_1} + \overset{2}{F}{}^{d_2}_{b_2}\,\Gamma^{a_2}_{c_2d_2} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_1}\,\Gamma^{d_1}_{c_2b_2} - \overset{2}{F}{}^{a_2}_{d_2}\,\Gamma^{d_2}_{c_2b_2} = 0 \Rightarrow \overset{2}{F}{}^{a_2}_{b_2,c_2} = 0,$
З цих умов безпосередньо випливає, що

$$\Gamma^{a_1}_{c_1b_2} = \Gamma^{a_1}_{c_2b_2} = \Gamma^{a_2}_{c_1b_1} = \Gamma^{a_2}_{c_2b_1} = 0. \tag{6.2}$$

7. Специфіка ріманових просторів з абсолютно параленьною ҮНС$^{-}$-структурою

Розглянемо рімановий простір(V_n, g_{ij}, F_i^h), на якому визначена афінорна структура F виду $(3.1)-(3.3)$.

З огляду на (6.2) зв'язок між символами Крістоффеля I і II рода маємо:

$$\Gamma^{a_1}_{c_1 b_2} = \Gamma^{a_1}_{c_2 b_2} = \Gamma^{a_2}_{c_1 b_1} = \Gamma^{a_2}_{c_2 b_1} = 0.$$

Із структури метричного тензора (5.2) випливає, що $|g_{a_1 b_1}| \neq 0,\ |g_{a_2 b_2}| \neq 0$, тому остання рівність говорить про те, що

$$\Gamma_{c_1 b_2, d_1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{c_1 b_2}}{\partial x^{d_1}} + \frac{\partial g_{b_2 d_1}}{\partial x^{c_1}} + \frac{\partial g_{d_1 c_1}}{\partial x^{b_2}}\right) = \frac{\partial g_{d_1 c_1}}{\partial x^{b_2}} = 0.$$

Можемо зробити висновок, що $g_{a_1 b_1}$ не залежить від змінних (x^{c_2}), тобто

$$g_{a_1 b_1} = g_{a_1 b_1}(x^{c_1}).$$

Далі із

$$\Gamma_{c_2 b_2, d_1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{c_2 b_2}}{\partial x^{d_1}} + \frac{\partial g_{b_2 d_1}}{\partial x^{c_2}} + \frac{\partial g_{d_1 c_2}}{\partial x^{b_2}}\right) = \frac{\partial g_{c_2 b_2}}{\partial x^{d_1}} = 0 \Rightarrow g_{a_2 b_2} = g_{a_2 b_2}(x^{c_2}).$$

Можемо зробити висновок, що $g_{a_2 b_2}$ не залежить від змінних (x^{c_1}), тобто

$$g_{a_2 b_2} = g_{a_2 b_2}(x^{c_2}).$$

Розглянемо псевдорімановий простір V_{2k_1} з метричним тензором

$$(g_{ab}(x^c)) = \begin{pmatrix} g_{A_1\, B_1} & g_{A_1\, B_1+k_1} \\ -g_{A_1\, B_1+k_1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

і афінорною структурою

$$F_b^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{k_1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

$$A_1, B_1 = \overline{1, k_1},$$

$$a, b, c = \overline{1,n}.$$

Безпосереднім обчисленням перевіряється, що афінор F^a_b і V_{2k_1} задовольняє умовам

$$F^a_\alpha F^\alpha_b = 0,$$

$$F^a_{b\wr c} = 0,$$

$$F_{ab} + F_{ba} = 0,$$

де "$\wr$"- знак коваріантної похідної по зв'язності V_{2k_1}. Таким чином, $(V_{2k_1}, g_{ab}(x^c), F^a_b)$ являється келеровим простором параболічного типу відносно афінора F^a_b, при цьому $(7.1), (7.2)$ вигляд матриць $g_{ab}(x^c)$ і F^a_b в системі координат x^c, - адаптованою до афінора F^a_b.

Розглянемо псевдоріамановий простір V_{n-2k_1} з метричним тензором

$$(g_{pq}(x^r)) = \begin{pmatrix} 0 & g_{A_2\,B_2} \\ g_{B_2\,A_2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

і афінорною структурою

$$F^p_q = \begin{pmatrix} E_{k_2} & 0 \\ 0 & -E_{k_3} \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

$$A_2, B_2 = \overline{1, n - 2k_1 - k_3},$$

$$p,q,r = \overline{1,n}.$$

Безпосереднім обчисленням перевіряється, що афінор F^p_q і V_{n-2k_1} задовольняє умовам

$$F^p_\alpha F^\alpha_q = \delta^p_q,$$

$$F^p_{q\wr r} = 0,$$

$$F_{pq} + F_{qp} = 0,$$

де "$\wr$"- знак коваріантної похідної по зв'язності V_{n-2k_1}. Таким чином, $(V_{n-2k_1}, g_{pq}(x^r), F^p_q)$ являється келеровим простором гіперболічного типу відносно афінора F^p_q, при цьому $(7.3), (7.4)$ вигляд матриць $g_{pq}(x^r)$ і F^p_q в системі координат x^r, - адаптованою до афінора F^p_q.

Має місце

Теорема 1. *Псевдоріамановий простір* (V_n, g_{ij}, F^h_i)*, в якому афінор* F^h_i *задовольняє умовам* $(3.1), (3.3)$ *, локально приводимий і представляє собою добуток*

$$(V_n, g_{ij}(x^h), F_i^h(x^h)) = (V_{2k_1}, g_{ab}(x^c), F_b^a) \times (V_{n-2k_1}, g_{pq}(x^r), F_q^p),$$

де келеровий простір V_{2k_1} *параболічного типу з метричним тензором* $g_{ab}(x^c)$ *і афінором* $F_b^a(x^c)$*,* $a, b, c = \overline{1, n-2k_1}$*, який в адаптованій до* F_b^a *системі координат* (x^c) *має вигляд* $(7.1), (7.2)$ *і келеровий простір* V_{n-2k_1} *гіперболічного типу з метричним тензором* $g_{pq}(x^r)$ *і афінором* $F_q^p(x^r)$*,* $p, q, r = \overline{n-2k_1+1, n}$*, який в адаптованій до* F_q^p *системі координат* (x^r) *має вигляд* $(7.3), (7.4)$*.*

8. Про існування абсолютно паралельної афінорної YHC$^-$ -структури на рімановому просторі сталої кривини

Розглянемо (V_n, g_{ij}, F_i^h) сталої кривини і з'ясуємо, чи може на ньому існувати афінорна структура, що задовольняє умовам $(3.1) - (3.3)$.

Тензор Рімана в просторі сталої кривини має вигляд

$$R_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}). \tag{8.1}$$

З (8.1) випливає:

$$R_{h\bar{i}jk} = K(g_{hj}g_{\bar{i}k} - g_{hk}g_{\bar{i}j})$$
$$R_{\overline{h}ijk} = K(g_{\overline{h}j}g_{ik} - g_{\overline{h}k}g_{ij}) \tag{8.2}$$

В §3 були отримані властивості тензора Рімана ріманового простору з YHC$^-$-структурою. Зокрема

$$R_{h\bar{i}jk} + R_{\overline{h}ijk} = 0,$$

З огляду на (8.2) ця рівність виглядає таким чином:

$$K(g_{hj}g_{\bar{i}k} - g_{hk}g_{\bar{i}j}) + K(g_{\overline{h}j}g_{ik} - g_{\overline{h}k}g_{ij}) = K(g_{hj}g_{\bar{i}k} - g_{hk}g_{\bar{i}j} + g_{\overline{h}j}g_{ik} - g_{\overline{h}k}g_{ij}) = 0$$

Згортаючи отриману рівність з тензором g^{ik} за індексами i, k отримаємо

$$K(ng_{\overline{h}j} - g_{\overline{h}j} - g_{\overline{h}j}) = K(n-2)g_{\overline{h}j} = 0.$$

Звідси випливає, що або $g_{\overline{h}j} = 0$, або $K = 0$ при $n \neq 2$. Але $g_{\overline{h}j} \neq 0$, а $n \geq 4$ в цілому для простору з афінором при умовах (3.1).

Отже $K = 0$.

Теорема 2. *Ріманові простори сталої кривини, відмінні від пласких, не допускають коваріантно сталу YHC$^-$- структуру.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. J.Mikes, A.Vanzurova, I.Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations//Palacky University, Faculty of Science, 2009.
2. Raad Kadem. О 2F-планарных отображениях пространств аффинной связности. Abstracts of the Colloquiumon Differential Geometry, Eger, Hungary, 20-25, 1089.
3. Беклемишев Д. В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой// Итоги науки: Геометрия, 1963. М.: ВИНИТИ 1965. С.165-212.
4. Вишневский В.В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации// Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения/ ВИНИТИ. М.,2002. Т.73. С.5-64.
5. Коновенко Н.Г. 2F-планарные отображения римановых пространств, сохраняющих обобщенную f-структуру.Лаптевские чтения:Сборник трудов Международного геометрического семинара имени Г.Ф.Лаптева, Пенза, 59-64,2004.
6. Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств// М.: Наука,1979. – 256 с.
7. Синюков Н.С., Курбатова И.Н., Микеш Й. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств// ОГУ, Одесса. 1985.- 70с.
8. Микеш Й., Синюков Н.С. О квази-планарных отображениях пространств аффинной связности. Известия ВУЗов, Математика, 27(1): 55-61, 1983.
9. Josef Mikes, Alena Vanzurova, Irina Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations. Palacky University Press, 2009.
10. Yano Kentaro, Houh Chorng-Shi, Chen Bang-Yen. Structures defined by a tensor field of type (1,1) satisfying $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$. Tensor, 1972, 23, No 1, 81—87.
11. Курбатова І.М., Хаддад М., Пересторонина К. Об одном типе квадриструктур на римановом пространстве. - Тез.доп. Міжнародної конференції «Алгебраїчні і геометричні методи аналіза» Одеса, 2018.

12. Соловьев А. А. YHC-структура на псевдоримановых многообразиях // Actual problems of science and practice. Abstracts of XVI International Scientific and Practical Conference. — Stockholm, Sweden. — 2021. — Pp. 146-147.

13. Соловьев А. А. О некоторой специальной квадриструктуре на псевдоримановых многообразиях // The XVIII International Science Conference «Perspective directions for the development of science and practice». — Athens, Greece. — 2021. — Pp. 154-155.