Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної алгебри та дискретної математики

Дипломна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«L-функція Ранкіна-Сельберга параболічних форм»**

«Rankin-Selberg L-function of cups forms»

Виконала: студентка заочної форми навчання
спеціальності 111 Математика
Хома Анастасія Максимівна
Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Савастру О. В. ________
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Варбанець С. П.

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ ___ від ____________ 2019 р.
Завідувач кафедри
_________ ________________

Захищено на засіданні ЕК № ____________
Протокол № ___ від ____________ 2019 р.
Оцінка ________ / ________ / ________
Голова ЕК
_________ ______________________

Одеса — 2019 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Як узагальнення зета-функції Рімана, L-функція стала одним із центральних об'єктів у теорії чисел. Теорія L-функцій розвилася в один із важливих допоміжних засобів аналітичної теорії чисел. Велику роль грає у додатках дослідження нулів L-функцій.

В аналітичній теорії чисел L-функція грає таку ж роль, як і ζ-функція при розв'язку задач теорії чисел, а саме задач, пов'язаних з розподілом простих чисел в арифметичних прогресіях, і задач, пов'язаних з оцінкою арифметичних сумм.

L-функція – це мероморфна функція на комлнесній площині, пов'язана з однією з декількох категорій математичних об'єктів. L-ряди – це ряди Діріхле, зазвичай сходяться на півплощині, що можуть породжувати L-функцію за допомогою аналітичного подовження. У класичних випадках вже відомо, що корисна інформація міститься у значеннях та поведінці L-функції в точках, де ряди не збігаються. Загальний термін L-функція включає в собі безліч відомих видів зета-функцій. Клас Сельберга – це спроба збору основних властивостей L-функцій у набор аксіом, заохочуючи таким чином вивчення властивостей класу, а не окремих функцій.

Теоретико-методологічна основа дослідження. L-фунція розглядалася багатьмя відомими вченими, такими як Роберт Ранкін, Атле Сельберг, Горо Шимура, Олесандр Івіч та інші.

Об'єкт дослідження — L-функція Ранкіна-Сельберга параболічних форм.

Предмет дослідження — Побудова наближень функціональних рівнянь та скороченні суми типу Воронного.

Цілі дослідження:

- розглянути загальні поняття L-функції;
- дослідити зв'язок рядів Дирихле з L-функцією;
- побудувати наближенні функціональні рівняння;
- розглянути середні Рісса коефіцієнтів рядів Ранкіна-Сельбега;
- дослідити проблему Ранкіна-Сельберга в коротких інтервалах.

Науково-досліджувальні методи. В роботі використовуються методи алгебри и теорії чисел, метод твірних рядів Дирихле, метод згортки.

ВИСНОВКИ

Провівши дослідження по даній темі, ми переконалися в тому, що, теорія L-функцій параболічних форм є однією з найбільш хвилюючих об'єктів в теорії чисел. Вона включає, наприклад, два найважливіших здобутки математики XX століття, перше – це доказ гіпотез Вейля та гіпотези Рамануджана від Делінье на початку 1970-х років, використовуючи широкий розвиток сучасної алгебраїчної геометрії, розпочатий самим Вейлем і переслідуваний Гротендіком, а по-друге, докази гіпотези Шимура-Таніяма-Вейля від Джона Вілза та ін., що, серед іншого, наводить доказ останньої теореми Ферма. Сюди також входять дві з семи проблем на 1 мільйон доларів за двадцять перше століття, спочатку гіпотеза Рімана, а друга – гіпотеза Берези-Свіннертон Дієра (описує набір раціональних рішень рівнянь, що визначають еліптичну криву), широко визнана однією з найскладніших математичних проблем.

В нашій роботі ми розглядали L-функцію Ранкіна-Сельберга параболічних форм, яка має широке застосування в аналітичній теорії чисел. Було розглянуто загальні поняття L-функції її зв'язок з рядами Дирихле, побудували наближенні функціональні рівняння, розглянули середні Рісса коефіцієнтів рядів Ранкіна-Сельбега та дослідили проблему Ранкіна-Сельберга в коротких інтервалах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. E. Carletti, G. Monti Bragadin and A. Perelli. On general L-functions. Acta Arith. 66 (1994), 147-179.
2. K. Chandrasekharan and R. Narasimhan. The approximate functional equation for a class of zeta-functions. Math. Ann. 152 (1963), 30-64.
3. K. Chandrasekharan and R. Narasimhan. On the mean value of the error term for a class of arithmetical functions. Acta Math. 112 (1964), 41-67.
4. P. Deligne, La conjecture de Weil, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 43 (1974), 273-307.
5. E. P. Golubeva and O. M. Fomenko. Values of Dirichlet series associated with modular forms at the points s = 12; 1. Zap. Nauchn. Sem. LOMI 134 (1984), 117-137 (English translation J. Soviet Math. 36 (1987), 79-93).
6. J. L. Hafner. On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions. In Analytic Number Theory (ed. M. I. Knopp). Lecture Notes in Math., vol. 899, (Springer-Verlag, 1981), pp. 148-165.
7. G.H. Hardy and J.E. Littlewood, The approximate functional equation for $\zeta(s)$ and $\zeta 2(s)$, Proc. London Math. Soc. (2)29(1929), 81-97.
8. M.N. Huxley, Exponential sums and the Riemann zeta function V, Proc. London Math. Soc. (3) 90(2005), 1-41.
9. A. Ivic, The Riemann Zeta-Function, John Wiley and Sons, New York, 1985 (2nd ed. Dover, Mineola, New York, 2003).
10. A. Ivic, The mean values of the Riemann zeta-function, LNs 82, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay 1991 (distr. by Springer Verlag, Berlin etc.).
11. A. Ivic, An approximate functional equation for a class of Dirichlet series, J. Analysis (Madras, India) 3 (1995), 241-252.
12. A. Ivic. Large values of certain number-theoretic error terms. Acta Arith. 56 (1990), 135-159.
13. A. Ivic, Estimates of convolutions of certain number-theoretic error terms, Intern. J. Math. and Math. Sciences, Vol. 2004, No. 1(2004), 1-23.
14. A. Ivic, Convolutions and mean square estimates of certain number-theoretic

error terms, Publs. Inst. Math. 80(94)(2006), 141-156.

15. A. Ivic, On some mean square estimates in the Rankin-Selberg problem, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 1(2007), 1-11.
16. A. Ivic, On the fourth moment in the Rankin-Selberg problem, Archiv Math. 90(2008), 412-419.
17. A. Ivic, On the divisor function and the Riemann zeta-function in short intervals, The Ramanujan Journal, Volume 19, Issue 2 (2009), 207-224.
18. A. Ivic, On the mean square of the divisor function in short intervals, Journal de Th´eorie des Nombres de Bordeaux 21(2009), 195-205.
19. A. Ivic and J. Wu, On the general additive divisor problem, see preprint at arXiv:1106.4744.
20. A. Ivic, K. Matsumoto and Y. Tanigawa, On Riesz mean of the coefficients of the Rankin–Selberg series, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 127(1999), 117-131.
21. A. Ivic, On the Rankin-Selberg problem in short intervals, (2011)
22. M. Jutila. A Method in the theory of exponential sums. Lectures on Math. and Phys., vol. 80 (Tata Inst. Fund. Res., Springer, 1987).
23. M. Jutila, On the divisor problem for short intervals, Ann. Univer. Turkuensis Ser. AI 186(1984), 23-30.
24. A. Kaczorowski and A. Perelli, The Selberg class: a survey, in "Number Theory in Progress, Proc. Conf. in honour of A. Schinzel (K. Gy¨ory et al. eds)", de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 953-992.
25. E. Landau, Uber die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen II, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen 1915, 209-243.
26. E. Landau. Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Uber die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid). Sitzungsberichte der Kgl. Preuβ. Akad. Wiss. Berlin 31 (1915), 458-476 (Collected Works, Vol. 6, Thales Verlag, pp. 200-218).
27. Li, Hongze and Wu, Jie, The universality of symmetric power L-functions and their Rankin- Selberg L-functions, J. Math. Soc. Japan 59(2007), 371-392.
28. A. Perelli. On the prime number theorem for the coefficients of certain modular forms. In Elementary and analytic theory of numbers (ed. H. Iwani-

ec). Banach Center Publications, vol. 17 (PWN-Polish Scientific Publishers, 1985), pp. 405-410.

29. R. A. Rankin. An Ω-result for the coefficients of cusp forms. Math. Ann. 203 (1973), 239-250.
30. R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms, Proc. Cambridge Phil. Soc. 35(1939), 357-372.
31. A. Sankaranarayanan, Fundamental properties of symmetric square L-functions I, Illinois J. Math. 46(2002), 23-43.
32. A. Selberg, Bemerkungen uber eine Dirichletsche Reihe, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist, Arch. Math. Naturvid. 43(1940), 47-50.
33. A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in "Proc. Amalfi Conf. Analytic Number Theory 1989 (E. Bombieri et al. eds.)", University of Salerno, Salerno, 1992, pp. 367–385.
34. G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. 31(1975), 79-98.
35. P. Shiu. A Brun-Titchmarsh theorem for multiplicative functions. J. reine angew. Math. 31 (1980), 161-170.
36. E. C. Titchmarsh. The theory of the Riemann zeta-function (Oxford, 1951).
37. A. Walfisz. Uber die Koeffizientensummen einiger Modulformen. Math. Ann. 108 (1933),75-90.
38. R. Wiebelitz, Uber approximative Funktionalgleichungen der Potenzen der Riemannschen Zeta-funktion, Math. Nachr. 6(1951-1952), 263-270.
39. W. Zhang, On the divisor problem, Kexue Tongbao (in Chinese) 33 (1988), 1484–1485.