Дослідження в математиці і механіці. — 2022. — Т. 27, вип. 1-2(39-40). — С. 96–110

УДК 517.928

Н. В. Шарай, В. М. Шинкаренко
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Одеський національний економічний університет

АСИМПТОТИЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Встановлюються умови існування одного класу розв'язків у двочленного неавтономного диференціального рівняння третього порядку з нелінійністю, близькою у деякому сенсі до лінійної. Із застосуванням априорних властивостей так званих $P_\omega(\lambda_0)$– розв'язків, отримано асимптотичні при $t \uparrow \omega$ ($\omega \le +\infty$) зображення для таких розв'язків та їх похідних першого та другого порядку у випадку $\lambda_0 = 0$. Твердження, що доведені для нелінійного рівняння, перенесено на лінійні диференціальні рівняння третього порядку з асимптотично малими коефіцієнтами. Зазначене дозволило, в деякій мірі, доповнити відомі результати щодо асимптотичних властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь третього порядку.

MSC: 34D05, 34E05.
Ключові слова: рівняння третього порядку, асимптотичні зображення, помірно змінна нелінійність, існування розв'язків.
DOI: 10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294310

Вступ

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t) y |\ln|y||^\sigma, \tag{1.1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ - неперервна функція, $-\infty < a < \omega \le +\infty^*$.

Проблема отримання умов існування розв'язків з певними властивостями для деяких класів диференціальних рівнянь третього порядку неодноразово піднімалась у роботах дослідників у галузі якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь. Основні результати досліджень понад три десятиліття назад сформульовано у монографіях І. Кігурадзе та Т. Чантурії

*Вважаємо, що $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $\omega - a < 1$ при $\omega < +\infty$.

Надійшла 11.06.2021

[1] та М. Грегуша [2]. Зважаючи на прикладні застосування та різноманітність проблематики, дослідження звичайних диференціальних рівнянь третього порядку є актуальним і в наш час.

Розв'язок y рівняння (1.1), який заданий і відмінний від нуля на проміжку $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, будемо називати $P_\omega(\lambda_0)$– розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0. \tag{1.2}$$

В роботах [3 – 5] для рівняння (1.1) були встановлені умови існуванняя $P_\omega(\lambda_0)$- розв'язків у випадку, якщо $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а також були одержани асимптотичні подання для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. При цьому встановлена кількість розв'язків із знайденим асимптотичним зображенням.

В роботі [6] для диференціального рівняння другого порядку вигляду (1.1) отримані умови існування та асимптотика $P_\omega(0)$-розв'язків.

Метою даної роботи є встановлення необхідних та достатніх умов існування у диференціального рівняння (1.1) $P_\omega(0)$– розв'зків, а також асимптотичного зображення при $t \uparrow \omega$ для всіх таких розв'зків та їх похідних до другого порядку включно.

2. Допоміжні твердження

Для отримання результатів щодо асимптотичного поводження розв'язків диференціального рівняння (1.1), сформулюємо дві леми, перша з яких пов'язана з апріорними асимптотичними властивостями $P_\omega(0)$–розв'язків, друга лема – з існуванням зникаючих в околі особливої точки розв'язків квазілінійних систем диференціальних рівнянь. Введемо необхідну у подальшому функцію

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

На підставі леми 10.6., яка доведена в роботі [7] (Глава 3, §10, стор. 143-144), можливо отримати наступне твердження

Лема 1. *Для кожного* $P_\omega(0)$– *розв'язку диференціального рівняння* (1.1) *мають місце при* $t \uparrow \omega$ *наступні асимптотичні співвідношення*

$$y(t) \sim \pi_\omega(t) y'(t), \quad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \tag{2.1}$$

У випадку існування скінченої або рівної $\pm\infty$ *границі* $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'''(t)}{y''(t)}$ *має місце співвідношення*

$$y'''(t) \sim -\frac{y''(t)}{\pi_\omega(t)} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.2}$$

Далі, розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_k' = h(t)\left[f_k(t, v_1, v_2, v_3) + \sum\limits_{i=1}^{3} c_{ki} v_i + V_k(v_1, v_2, v_3)\right] \ (k = 1, 2), \\ v_3' = H(t)\left[f_3(t, v_1, v_2, v_3) + \sum\limits_{i=1}^{3} c_{3i} v_i + V_n(v_1, v_2, v_3)\right], \end{cases} \tag{2.3}$$

в якій $c_{ki} \in \mathbb{R}$ $(k, i = 1, 2, 3)$, h, $H : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$– неперервно диференційовані функції, $f_k : [t_0, \omega[\times \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2, 3)$– неперервні функції, що задовольняють умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_k(t, v_1, v_2, v_3) = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

де

$$\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, |v_i| \le \frac{1}{2} \ \ (i = 1, 2, 3)\right\},$$

а $V_k : \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, 3)$– неперервно диференційовані функції такі, що

$$V_k(0, \ldots, 0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial V_k(t, 0, 0, 0)}{\partial v_i} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3). \tag{2.5}$$

У відповідності з теоремою 2.6 з работи В.М. Євтухова та А.М. Самойленка [8] для системи диференціальних рівнянь вигляду (2.3) має місце наступне твердження.

Лема 2. *Нехай функції* h *и* H *задовольняють умовам*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{H(t)}{h(t)} = 0, \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} H(\tau)\, d\tau = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{H(t)} \left(\frac{H(t)}{h(t)}\right)' = 0. \tag{2.6}$$

Нехай, окрім того, для матриць $C_3 = (c_{ki})_{k,i=1}^{3}$ *и* $C_2 = (c_{ki})_{k,i=1}^{2}$ *виконуються наступні умови:* $\det C_3 \ne 0$, *а* C_2 *не має власних значень з нульовою* *дійсною частиною. Тоді система диференціальних рівнянь* (2.3) *має принаймі один розв'язок* $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}$ $(t_0 \leq t_1 \leq \omega)$*, який прямує до нуля при* $t \uparrow \omega$*. Більш того, якщо серед власних значень матриці* C_2 *є* m *власних значень (з урахуванням кратних), дійсні частини яких містять знак, протилежний знаку функції* $h(t)$ *на проміжку* $[t_0, \omega[$*, то при виконанні на проміжку* $[t_0, \omega[$ *нерівності* $H(t)\,(\det C_3)\,(\det C_2) > 0$ *таких розв'язків у системи* (2.3) *існує* m*- параметрична сім'я, а при виконанні протилежної нерівності –* $(m+1)$*-параметрична сім'я.*

Основні результати

Для формулювання основного результату введемо допоміжні функції

$$P_1(t) = \int_{A_1}^{t} p(\tau)\,d\tau, \qquad P_2(t) = \int_{A_2}^{t} P_1(\tau)\,d\tau,$$

$$J_A(t) = \int_{A}^{t} \pi_\omega(\tau) p(\tau)\,|ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau, \qquad I(t) = \int_{a}^{t} J_A(\tau)\,d\tau,$$

де

$$A_1 = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega p(\tau)\,d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |P_1(\tau)|\,d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |P_1(\tau)|\,d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)| p(\tau)\,|ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)| p(\tau)\,|ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau < +\infty, \end{cases}$$

Теорема 1. *Припустимо, що існує (скінчений або рівний* $\pm\infty$*)*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_A'(t)}{J_A(t)} \tag{3.1}$$

Диференціальне рівняння (1.1) *має* $P_\omega(0)$*-розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)J_A(t)=0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)J_A'(t)}{J_A(t)}=-1, \quad \lim_{t\uparrow\omega}I(t)=\pm\infty. \tag{3.2}$$

При цьому кожен із таких розв'зків допускає наступні асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$:

$$\frac{y(t)}{y'(t)}=\pi_\omega(t)[1+o(1)], \tag{3.3}$$

$$\ln|y'(t)|=\alpha_0 I(t)[1+o(1)] \tag{3.4}$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\alpha_0 J_A(t)[1+o(1)]. \tag{3.5}$$

Більш того, якщо умови (3.2) *виконані, тоді диференціальне рівняння* (1.1) *має дво-параметричну сім'ю розв'язків, яка має асимптотичні розвинення* (3.3) – (3.5) *при* $t\uparrow\omega$ *як у випадку* $\omega=+\infty$*, так і* $\omega<+\infty$*.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y:[t_y,\omega[\longrightarrow\mathbb{R}$– довільний $P_\omega(0)$–розв'язок диференціального рівняння (1.1). Тоді, в відповідності з означенням $P_\omega(0)$– розв'язку існує $t_0\in[t_y,\omega[$ таке, що $\ln|y(t)|\neq 0$ на проміжку $[t_0,\omega[$, і за лемою 2.1 виконуються асимптотичні співвідношення (2.1). Відповідно до першого із асимтотичних співвідношень (2.1) маємо асимптотичні зображення (3.3), з яких, зокрема, маємо

$$y(t)\sim\pi_\omega(t)y'(t), \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Це означає, що виконується зображення

$$\frac{y'(t)}{y(t)}\sim\frac{1}{\pi_\omega(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

Дане зображення, коли $\omega=+\infty$ (за означенням $\pi_\omega(t)=t$), суперечить останньому співвідношенню (2.1). При $\omega<+\infty$ якщо проінтегрувати, одержуємо

$$\ln|y(t)|\sim\ln|\pi_\omega(t)| \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

В силу цих асимптотичних співвідношень з (1.1) отримаємо

$$y'''(t)=\alpha_0 p(t)\pi_\omega(t)|\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma y'(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

тоді

$$\frac{y'''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 p(t)\pi_\omega(t)|\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.6}$$

Оскільки

$$\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)' = \frac{y'''(t)}{y'(t)}\left[1 - \frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)}\right],$$

і з означення $P_\omega(0)$– розв'язку

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = 0,$$

Звідки

$$\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)' \sim \frac{y'''(t)}{y'(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Тому асимптотичне співвідношення (3.6) можна записати у вигляді

$$\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)' = \alpha_0 p(t)\pi_\omega(t)\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Інтергруючи дане співвідношення від t_0 до t, одержуємо

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = c_0 + \alpha_0\int\limits_{t_0}^{t} p(\tau)\pi_\omega(\tau)|\ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma[1+o(1)]\,d\tau, \tag{3.7}$$

де c_0 стала, або з урахуванням вибору границі інтегрування A в функції J_A

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = c + \alpha_0 J_A(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

де

$$c = c_0 + \alpha_0\int\limits_{t_0}^{A} p(\tau)\pi_\omega(\tau)|\ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma[1+o(1)]\,d\tau.$$

У випадку, коли $A = a$, інтеграл у правій частині (3.7) прямує до $\pm\infty$ при $t\uparrow\omega$, і тоді (3.7) може бути переписано в вигляді

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 J_A(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{3.8}$$

Покажемо, що у випадку, коли інтеграл у правій частині (3.7) прямує до нуля при $t\uparrow\omega$, тоді також виконується співвідношення (3.8), тобто ми маємо

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = c + o(1) \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Це зображення, коли $\omega = +\infty$ (тобто $\pi_\omega(t) = t$), суперечить останньому співвідношенню (2.1), а якщо $\pi_\omega(t) < +\infty$, то шляхом інтегрування одержуємо

$$\ln|y'(t)| = c_1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \quad (c_1 = \text{const}),$$

що суперечить першій умові (2.1). Тому в кожному з двох можливих розглянутих випадків виконується асимптотичне співвідношення (3.8), тобто виконується (3.5), і за допомогою останнього з асимптотичних співвідношень із (2.1) виконується перша умова (3.2).

Крім того, з (3.7) та (3.5) випливає, що

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} = \frac{J_A'(t)}{J_A(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тоді

$$\frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)} = \frac{\pi_\omega(t)J_A'(t)}{J_A(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \tag{3.9}$$

і в силу існування границі (3.1) (скінченої або рівної $\pm\infty$) та користуючись лемою 2.1, приходимо до висновку, що з урахуванням (2.2), із (3.9) випливає справедливість другої з умов (3.2).

Крім того, інтегриручи співвідношення (3.8) на промежутку від t_0 до t, отримуємо

$$\ln|y'(t)| = c + \alpha_0 \int\limits_{t_0}^{t} J_A(\tau)[1 + o(1)]\, d\tau.$$

Оскільки, за означенням $P_\omega(0)$ -розв'язків, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \ln|y'(t)| = \pm\infty$, тоді третя з умов (3.2) виконана і це співвідношення може бути записано як (3.4).

Достатність Нехай умови (3.2) виконані. Покажемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (1.1) має $P_\omega(0)$ -розв'язки, що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.3)-(3.5) і дамо відповідь на питання про кількість розв'язків з такими властивостями.

Оскільки виконується тотожність

$$\pi_\omega(t)J_A(t) = \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)} I(t),$$

тоді з умов (3.2) випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)} = 0. \tag{3.10}$$

Крім того, за правилом Лопіталя

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|}=\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)J_A(t)=0. \tag{3.11}$$

Застосовуючи до рівняння (1.1) перетворення

$$\begin{gathered}\tfrac{y(t)}{y'(t)}=\pi_\omega(t)[1+v_1(t)]\quad,\\[2ex] \tfrac{y''(t)}{y'(t)}=\alpha_0J_A(t)[1+v_2(t)],\\[2ex] \ln|y'(t)|=\alpha_0I(t)[1+v_3(t)],\end{gathered}\tag{3.12}$$

одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1'=-\frac{v_1}{\pi_\omega(t)}-\alpha_0J_A(t)(1+v_1)(1+v_2),\\[2ex] v_2'=-\frac{J_A'(t)}{J_A(t)}(1+v_2)-\alpha_0J_A(t)(1+v_2)^2+\\ +\frac{J_A'(t)}{J_A(t)}(1+v_1)\frac{|\ln|\pi_\omega(t)(1+v_1)||^\sigma}{|\ln|\pi_\omega(t)||^\sigma}|1+\alpha_0\frac{I(t)(1+v_3)}{\ln|\pi_\omega(t)(1+v_1)|}|^\sigma,\\[2ex] v_3'=\frac{J_A(t)}{I(t)}(1+v_2)-\frac{J_A(t)}{I(t)}(1+v_3).\end{cases}$$

Позначимо

$$h(t)=\frac{1}{\pi_\omega(t)},\quad H(t)=\frac{J_A(t)}{I_(t)},\quad \delta_1(t)=\alpha_0\pi_\omega(t)J_A(t),$$

$$\delta_2(t)=\frac{\pi_\omega(t)J_A'(t)}{J_A(t)}+1,\quad \delta_3(t)=-\frac{\alpha_0I(t)}{\ln|\pi_\omega(t)|},\quad \delta_4(t,v_1)=\frac{\ln|1+v_1|}{\ln|\pi_\omega(t)|}$$

та перепишемо одержану систему диференціальних рівнянянь у вигляді

$$\begin{cases} v_1' &= h(t)\left[f_1(t,v_1,v_2,v_3)-v_1\right]\quad,\\[2ex] v_2' &= h(t)\left[f_2(t,v_1,v_2,v_3)-v_1+v_2\right],\\[2ex] v_3' &= H(t)\left[v_2-v_3\right],\end{cases}\tag{3.13}$$

де функції $f_1(t,v_1,v_2,v_3)$, $f_2(t,v_1,v_2,v_3)$ мають вигляд

$$f_1(t,v_1,v_2,v_3)=\delta_1(t)(1+v_2)^2-\delta_2(t)(1+v_2),$$

$$f_2(t,v_1,v_2,v_3)=\delta_1(t)(1+v_2)^2-\delta_2(t)(1+v_2)+(1+v_1)\cdot$$
$$\cdot\left[1+\frac{\pi_\omega(t)J_A'(t)}{J_A(t)}|1+\delta_4(t,v_1)|^\sigma|1+\frac{\delta_3(t)(1+v_3)}{1+\delta_4(t,v_1}|^\sigma\right].$$

Оскільки виконуються умови (3.2) та (3.11), для функцій $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{t\uparrow\omega}\delta_i(t)=0 \quad (i=1,2,3) \tag{3.14}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega}\delta_4(t,v_1)=0 \quad \text{рівномірно при} \quad v_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]. \tag{3.15}$$

Зважаючи на отримані граничні співвідношення, ми вибираємо число $t_0\in\,]a,\omega[$, таким чином, що для $t\in[t_0,\omega[$ та $|v_1|\le\frac{1}{2}$, $|v_3|\le\frac{1}{2}$ виконуються наступні нерівності

$$|\delta_4(t,v_1)|\le\frac{1}{2},\quad \left|\frac{\delta_3(t)(1+v_3)}{1+\delta_4(t,v_1)}\right|\le\frac{1}{2}.$$

Далі розглянемо систему рівнянь на множині

$$\Omega=[t_0,\omega[\times\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}},\quad \text{де}\quad \mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}=\left\{(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3:\,|v_i|\le\frac{1}{2},\ i=1,2,3\right\}$$

і t_0– деяке число з проміжка $[a,\omega[$.

Праві частини системи неперервні на цій множині, функції h,H неперервно-дифернційовані на інтервалі $[t_0,\omega)$, а за умовами (3.14), (3.15)

$$\lim_{t\uparrow\omega}f_k(t,v_1,\dots,v_3)=0 \quad \text{рівномірно при} \quad (v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3_{\frac{1}{2}}\ (k=1,2).$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь (3.13) є квазілінійною системою диференціальних рівнянь типу (2.3). Покажемо, что для цієї системи виконується всі умови леми 2.2. Враховуючи вигляд функцій I та J_A

$$\int_{t_0}^{t}H(\tau)\,d\tau\sim\ln|J_A(t)|\longrightarrow\pm\infty \quad \text{коли} \quad t\uparrow\omega.$$

Окрім того,

$$\frac{H(t)}{h(t)}=\frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)},\quad \frac{1}{H(t)}\left(\frac{H(t)}{h(t)}\right)'=1+\frac{\pi_\omega(t)J_A'(t)}{J_A(t)}-\frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}$$

і тому, враховуючи другу з умов (3.2) і умову (3.10), отримуємо співвідношення

$$\frac{H(t)}{h(t)} = \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}, \quad \frac{1}{H(t)}\left(\frac{H(t)}{h(t)}\right)' = 1 + \frac{\pi_\omega(t)J'_A(t)}{J_A(t)} - \frac{\pi_\omega(t)J_A(t)}{I(t)}$$

тобто для системи (3.13) виконуються умови (2.4) леми 2.2.

Помітимо, що матриці C_2 та C_3 розміру 2×2 та 3×3 (відповідно) з леми 2.2 у випадку системи диференціальних рівнянь (3.13) мають вигляд

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Власними значеннями матриці C_2 є корені алгебраїчного рівняння

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$

тобто числа $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -1 < 0$. Крім того,

$$\det C_2 = -1, \quad \det C_3 = 1.$$

Таким чином, для системи диференціальних рівнянь (3.13) виконуються всі умови леми 2.2. Згідно цієї леми система диференцільних рівнянь (3.13) має принаймі один розв'язок $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[\longrightarrow R^3$ $(t_1 \in [t_0, \omega[)$, який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Більш того, оскільки серед власних значень матриці C_2 є одне від'ємне і одне додатнє число та $\det C_2 = -1$, $\det C_3 = 1$, то згідно твердженням леми 2.2, якщо виконується нерівність $h(t) > 0$ $(h(t) < 0)$ на проміжку $[t_0, \omega[$, тоді система диференціальних рівнянь (3.13) має однопараметричну сім'ю розв'язків, які зникають при $t \to \omega$ у випадку, коли $H(t) < 0$ на $[t_0, \omega[$, і двопараметричну сім'ю розв'язків, у випадку, коли $H(t) > 0$ на $[t_0, \omega[$.

Для остаточного вирішення питання про кількість зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків у системи (3.13) необхідно визначити знаки функцій h и H на проміжку $[t_0, \omega[$.

Оскільки $h(t) = \pi_\omega^{-1}(t)$, тоді з визначення функції π_ω маємо

$$\operatorname{sign} h(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для функції H у відповідності з означенням функції I маємо

$$H(t) = \frac{J_A(t)}{I(t)} = \frac{|J_A(t)|}{\int\limits_a^t |J_A(\tau)|\, d\tau} \text{якщо} \quad t \in [t_0, \omega).$$

Користуючись одержаними умовами для функцій h та H, отримаємо наступні фінальні висновки щодо кількості зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків у системи диференціальних рівнянь (3.13):

1) якщо $\omega = +\infty$, то при $\sigma < 1$ система диференціальних рівнянь (3.13) має однопараметричну сім'ю зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків, а при $\sigma > 1$ – принаймні один такий розв'язок;

2) якщо $\omega < +\infty$, то при $\sigma < 1$ система диференціальних рівнянь (3.13) має трипараметричну сім'ю зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків, а при $\sigma > 1$ – двопараметричну сім'ю таких розв'язків.

Користуючись перетвореннями (3.12), кожному розв'язку $(v_k)_{k=1}^3 : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ системи диференціальних рівнянь (3.13), який прямує до нуля, відповідає розв'язок $y : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ диференціального рівняння (1.1), який при $t \uparrow \omega$ має асимптотичні зображення (3.3)-(3.5). Користуючись цими зображеннями та умовою (3.2), неважко довести, що кожний такий розв'язок є $P_\omega(0)$ – розв'язком диференціального рівняння (1.1).

Теорему повністю доведено.

Зауваження *При перевірці виконання умов* (3.2) *можливо вважати, що в силу першої з цих умов, друга та третя умови еквівалентні відповідно умовам*

$$\lim_{t \uparrow \omega} p(t) \pi_\omega^3(t) \left| \ln |\pi_\omega(t)| \right|^\sigma = 0, \qquad \int\limits_a^\omega \pi_\omega(\tau) p(\tau) \left| ln |\pi_\omega(\tau)| \right|^\sigma d\tau, = +\infty.$$

Наведемо приклад застосування доведеної теореми для рівнянь більш загального виду. Звернемо увагу на те, що теорема 3.1 охоплює випадок $\sigma = 0$, тобто коли диференціальне рівняння (1.1) є лінійним диференціальним рівнянняМем вигляду

$$y''' = \alpha_0\, p(t)\, y. \tag{3.16}$$

Для рівняння (3.16) із теореми 3.1 з урахуванням зауваження має місце наступний наслідок.

Наслідок 1. *Припустимо, що існує (скінчена або рівна $\pm\infty$) границя* (3.1). *Для існування у диференціального рівняння* (3.16) $P_\omega(0)$*-розв'язків необхідно і достатньо виконання умов*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega^2(t)p(t)}{\int\limits_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau)\,d\tau}=-1,\ \int\limits_a^\omega|\pi_\omega(\tau)|^2p(\tau)\,d\tau=+\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\pi_\omega^3(t)p(t)=0. \tag{3.17}$$

При цьому, кожний з таких $P_\omega(0)$*-розв'язків допускає наступні асимптотичні зображення при* $t\uparrow\omega$:

$$\frac{y(t)}{y'(t)}=\pi_\omega(t)[1+o(1)], \tag{3.18}$$

$$\ln|y'(t)|=\alpha_0\int\limits_a^\omega|\pi_\omega(\tau)|^2p(\tau)\,d\tau[1+o(1)] \tag{3.19}$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)}=\alpha_0p(t)\pi_\omega^2(t)[1+o(1)]. \tag{3.20}$$

Більш того, якщо умови (3.17) *виконані, тоді диференціальне рівняння* (3.16) *має двопараметричну сім'ю розв'язків, яка має асимптотичні зображення* (3.18) – (3.20) *при* $t\uparrow\omega$ *у випадках* $\omega=+\infty$, *а також коли* $\omega<+\infty$.

Висновки

У роботі встановлено необхідні та достатні умови існування у диференціального рівняння (1.1) $P_\omega(0)$– розв'зків, а також асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$ для всіх таких розв'зків та їх похідних до другого порядку включно.

Результати, сформульовані у Наслідку 3.1. у випадку $\omega=+\infty$ доповнюють результати для лінійних диференціальних рівнянь з асимптотично малими коефіцієнтами, що наведені в роботі [1] (дивись [1], Розділ 1).

Актуальність подальших досліджень вбачаємо у встановлені умов існування та асимптотиці $P_\omega(\lambda_0)$– розв'зків для рівнянь з узагальненим виглядом нелінійності.

Список літератури

1. **Kiguradze I.** Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations / I. Kiguradze, T. A. Chanturia. – Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 1993. – 331 p.
2. **Gregus M.** Third order linear differential equations / M. Gregus. – Boston: Reidel Publ., 1987.
3. **Sharai N.** Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // J. Math. Sci. (N.Y.). – 2016. – Vol. 215, No. 3. – P. 408–420.
4. **Шарай Н. В.** Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным / Н. В. Шарай // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2010. – Т. 15, №18. – С. 88–101.
5. **Sharai N.** Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations / N. Sharai, V. Shinkarenko // QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3. – 2018. – P. 165–169.
6. **Mousa Jaber Abu Elshour** Asymptotic representations of the solutions of a class of second order nonautonomous differential equations / Abu Elshour Mousa Jaber // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 44, P. 59–68.
7. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов. – Диссертация д-ра физ.-мат. наук: [спец.] 01.01.02 Дифференциальные уравнения. Одесский нац. ун-т имени И.И. Мечникова. Одесса, 1997. – 295 с.
8. **Evtukhov V. M.** Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point / V. M. Evtukhov, A. M. Samoilenko // Ukrainian Math. J. – 2010. – Vol. 62, No. 1, P. 56–86.

Sharai N.V., Shinkarenko V.M.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF SOME CLASSES OF SOLUTIONS THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

Summary

The conditions for the existence of one class of solutions of a binomial non-autonomous differential equation of the third order with a nonlinearity close in some sense to a linear one are established. Using the a priori properties of the so-called $P_\omega(\lambda_0)$–solutions, asymptotic at $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) images were obtained for such solutions connections and their derivatives of the first and second order in the case $\lambda_0 = 0$. The propositions proved for the nonlinear equation are transferred to linear differential equations of the third order with asymptotically small coefficients. This made it possible, to some extent, to supplement the known results regarding the asymptotic properties of solutions of linear differential equations of the third order.

Key words: equations of the third order, asymptotic images, moderately variable nonlinearity, existence of solutions .

REFERENCES

1. Kiguradze I., Chanturia T. (1993). *Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations.* Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, 331 p.
2. Gregus M. (1987). *Third order linear differential equations.* Boston: Reidel Publ.
3. Sharai N., Shinkarenko V. (2016). Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations. *J. Math. Sci. (N.Y.),* Vol. 215, No. 3, P. 408–420.
4. Sharai N.V. (2010). Asimptoticheskoe povedenie reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij tret'ego porjadka, blizkih k linejnym. [Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations of third order]. *Vestn. Odessk. Nac. Un., Mat. i Meh.* Vol.15, No. 18, P. 88–101.
5. Sharai N., Shinkarenko V. (2018). Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations. *QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3,* P. 165–169.
6. Mousa Jaber Abu Elshour (2008). Asymptotic representations of the solutions of a class of second order nonautonomous differential equations. Memoris on Differential Equations and Mathematical Physics. Vol. 44, P. 59–68.
7. Evtukhov V. M. (1998). Asimptoticheskie predstavleniya resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Asymptotic representations of solutions of

non-autonomous ordinary differential equations.] *(D.Sc. Thesis) Differential equations. Kyiv: institute of Mathematics of NASU.*

8. Evtukhov V. M., Samoilenko A. M. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point. *Ukrainian Math. J.* Vol. 62, No. 1, P. 56–86.