*Вісник Одеськ. держ. ун-ту.– 2003.– Т. 8, вип. 2. Фіз.-мат. науки.– С. 108–112*

УДК 517.911.5

**А. Н. Витюк**
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С МНОГОЗНАЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Доповідь зроблено на засіданні наукового семінару
“Диференціальні включення та оптимальне керування” ОНУ 08.10.2002 р.

Доведено теорему існування та єдиності для диференціальних рівнянь з многозначними розв’язками $\left(D_0^\alpha Y\right)(x) = F\left(x, Y(x)\right)$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$, $Y_0 \in \operatorname{conv} R^n$, де $\alpha \in (0,1)$ і $\left(D_0^\alpha Y\right)(x)$ – похідна Рімана – Ліувілля порядку $\alpha$.

Доказана теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений с многозначными решениями $\left(D_0^\alpha Y\right)(x) = F\left(x, Y(x)\right)$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$, $Y_0 \in \operatorname{conv} R^n$, где $\alpha \in (0,1)$ и $\left(D_0^\alpha Y\right)(x)$ – производная Римана – Лиувилля порядка $\alpha$.

Uniqueness and existence theorem for differential equations with set-valued solutions $\left(D_0^\alpha Y\right)(x) = F\left(x, Y(x)\right)$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$, $Y_0 \in \operatorname{conv} R^n$, where $\alpha \in (0,1)$ and $\left(D_0^\alpha Y\right)(x)$ is a Riemann – Liouville derivative of order $\alpha$, is proved.

Дифференциальные уравнения с производной Хукухары изучали F. S. De Blasi, F. Iervolino, M. Kisielewicz, A. A. Толстоногов и другие (см. [1]).

В настоящей работе определяется понятие производной дробного порядка от многозначного отображения в смысле Римана – Лиувилля и приведены условия существования и единственности решения дифференциального уравнения дробного порядка с многозначными решениями в классе непрерывных многозначных отображений.

**1.** Ниже используются следующие о б о з н а ч е н и я.

Пусть $R^n$ – пространство векторов размерности $n$ с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом $\theta$; $C(P,Y)$, $AC(P,Y)$, $L(P,Y)$ – пространства непрерывных, абсолютно непрерывных, суммируемых отображений $f : P \to Y$; $\operatorname{comp} R^n \left(\operatorname{conv} R^n\right)$ – совокупность непустых и компактных (выпуклых и компактных подмножеств) $R^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$.

Для $A, B \in \operatorname{comp} R^n$ и $\lambda \in R^1$ полагаем $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Разностью множеств $A$ и $B$ называем такое множество $C \in \operatorname{comp} R^n$, что $A = B + C$; $S = \left\{v \in R^n : \|v\| = 1\right\}$, $R_+ = [0, +\infty)$.

Пусть $\varphi, \psi \in R^n$. Тогда $(\varphi, \psi)$ – их скалярное произведение, а $c(A, \psi)$ – опорная функция [1] множества $A$ в направлении вектора $\psi$. Многозначное отображение (м. о.) $F : J \to \operatorname{comp} R^n$ интегрально ограничено на $J\left(J = (0, a], \bar{J} = [0, a]\right)$, если существует функция $m(x) \in L(J, R_+)$ такая, что $|F(x)| \le m(x)$ почти всюду (п. в.) на $J$. М. о. $F(x) : \bar{J} \to \mathrm{conv}\, R^n$ имеет в точке $x_0$ производную Хукухары [2], если существует такое множество $D_H F(x) \in \mathrm{conv}\, R^n$, что в метрике Хаусдорфа

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta}\left(F(x_0 + \delta) - F(x_0)\right) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta}\left(F(x_0) - F(x_0 - \delta)\right) = D_H F(x_0).$$

**2.** Пусть м. о. $F(x) : \bar{J} \to \mathrm{conv}\, R^n$ измеримо и интегрально ограничено. Через $S(F)$ обозначим множество селекторов м. о. $F(x)$, которое не пусто [1]. Тогда

$$\left(I_0^\alpha F\right)(x) = \left\{\left(I_0^\alpha f\right)(x) : f \in S(F)\right\}$$

называем *интегралом Римана – Лиувилля порядка* $\alpha > 0$ *от м. о.* $F(x)$. Заметим, что $\left(I_0^0 F\right)(x) = F(x)$ для п. в. $x \in J$, а $\left(I_0^1 F\right)(x) = \int_0^x F(t)dt$ – интеграл Аумана.

Справедливы следующие утверждения, доказательства которых приведены в работе [4].

**Теорема 1.** *Если м. о.* $F(x) : J \to \mathrm{comp}\, R^n$ *измеримо и интегрально ограничено, то интеграл Римана – Лиувилля порядка* $\alpha > 0$ *от м. о.* $F(x)$ *определен п. в. на* $J$, *является выпуклым множеством и*

$$\left(I_0^\alpha I_0^\beta F\right)(x) = \left(I_0^{\alpha+\beta} F\right)(x),\ \beta > 0, \tag{1}$$

$$C\left(\left(I_0^\alpha F\right)(x), \psi\right) = \left(I_0^\alpha C(F, \psi)\right)(x), \psi \in R^n. \tag{2}$$

Определим понятие производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ от м. о. $F(x)$. Если м. о. $F(x) : J \to \mathrm{comp}\, R^n$ измеримо и интегрально ограничено, а м. о. $F_{1-\alpha}(x) = \left(I_0^{1-\alpha} F\right)(x)$ п. в. на $J$ имеет производную Хукухары, то $\left(D_0^\alpha F\right)(x) = D_H F_{1-\alpha}(x)$ называем *производной Римана – Лиувилля порядка* $\alpha$ *от* $F(x)$.

**Теорема 2.** *Пусть м. о.* $F(x) : \bar{J} \to \mathrm{conv}\, R^n$ *абсолютно непрерывно и для любых* $x_1, x_2 \in \bar{J}$, $x_1 < x_2$, $F(x_2) = F(x_1) + T(x_1, x_2)$, *где* $T(x_1, x_2) \in \mathrm{conv}\, R^n$. *Тогда п. в. на* $\bar{J}$ *существует производная Римана – Лиувилля* $\left(D_0^\alpha F\right)(x)$.

**3.** Далее речь пойдет об условиях разрешимости дифференциального уравнения

$$\left(D_0^\alpha Y\right)(x) = F(x, Y(x)),\ 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

решение которого удовлетворяет начальному условию

$$Y_{1-\alpha}(0) = Y_0,\ Y_0 \in \mathrm{conv}\, R^n. \tag{4}$$

Предположим, что м. о. $F(x, Y) : \bar{J} \times \mathrm{conv}\, R^n \to \mathrm{conv}\, R^n$ удовлетворяет условиям:

(а) $F(\cdot, Y) : \bar{J} \to \mathrm{conv}\, R^n$ измеримо для каждого $Y \in \mathrm{conv}\, R^n$;

(б) $F(x, \cdot) : \mathrm{conv}\, R^n \to \mathrm{conv}\, R^n$ непрерывно для каждого $x \in \bar{J}$;

(в) существует функция $m(x) \in L(J, R_+)$ такая, что $|F(x,Y)| \le m(x)$, причем

$$\left(I_0^\alpha m\right)(x) \in C\left(J, R^1\right), \; \lim_{x \to 0^+} \left(I_0^\alpha m\right)(x) = 0 . \tag{5}$$

Пусть $\gamma(x) = \left(I_0^\alpha m\right)(x)$. Согласно (5), положив $\gamma(0) = 0$, получим, что $\gamma(x) \in C\left(\bar{J}, R_+\right)$.

**Определение 1.** Под решением задачи (3), (4) понимаем м. о. $Y(x) : J \to \operatorname{conv} R^n$ такое, что:

1) $Y(x) \in C\left(J, \operatorname{conv} R^n\right)$;
2) $Y_{1-\alpha}(x) \in AC\left(\bar{J}, \operatorname{conv} R^n\right)$, $Y_{1-\alpha}(0) = Y_0$;
3) $\left(D_0^\alpha Y\right)(x) = F(x, Y(x))$ для п. в. $x \in \bar{J}$.

**Теорема 3.** *Пусть м. о.* $F(x,Y) : \bar{J} \times \operatorname{conv} R^n \to \operatorname{conv} R^n$ *удовлетворяет условиям* (а), (б), (в). *Для того чтобы* $Y(x) : J \to \operatorname{conv} R^n$ *было решением задачи* (3), (4), *необходимо и достаточно, чтобы* $Y(x)$ *удовлетворяло уравнению*

$$Y(x) = \frac{x^{\alpha-1} Y_0}{\Gamma(\alpha)} + \left(I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x). \tag{6}$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть $Y(x)$ – решение задачи (3), (4). В силу определения производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha$ от м. о. $Y(x)$ получим

$$Y_{1-\alpha}(x) = Y_0 + \left(I_0^1 F(x,Y)\right)(x). \tag{7}$$

Используя (2), непосредственно проверяем, что $\left(I_0^{1-\alpha} \Phi\right)(x) = Y_0$, где $\Phi(x) = \dfrac{x^{\alpha-1} Y_0}{\Gamma(\alpha)}$, а $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера. Теперь в соответствии с соотношением (1) можно (7) представить в виде

$$\left(I_0^{1-\alpha} Y\right)(x) = \left(I_0^{1-\alpha} \Phi\right)(x) + \left(I_0^{1-\alpha} I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x). \tag{8}$$

Интеграл Римана – Лиувилля от левой и правой частей (8) дает

$$\left(I_0^1 Y\right)(x) = \left(I_0^1 I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x) + \left(I_0^1 \Phi\right)(x). \tag{9}$$

Так как [2] $D_H \left(I_0^1 V\right)(x) = V(x)$ для п. в. $x \in \bar{J}$, то производная Хукухары от левой и правой частей (9) дает (6).

Достаточность. Пусть м. о. $Y(x) : J \to \operatorname{conv} R^n$ удовлетворяет уравнению (6). Докажем, что $Y(x)$ является решением задачи (3), (4). Предварительно докажем, что

$$Y(x) \in C\left(J, \operatorname{conv} R^n\right).$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\left(I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x) \in C\left(J, \operatorname{conv} R^n\right).$$

Пусть $x_1, x_2 \in J$, $\;x_1 < x_2$. Тогда, если $\rho(x) = c\left(F(x, Y(x)), \Psi\right)$, то

$$B = h\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_2}(x_2 - t)^{\alpha-1}F(t, Y(t))dt, \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_1}(x_1 - t)^{\alpha-1}F(t, Y(t))dt\right) \le$$

$$\le \max_{\psi\in S}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_1}\left|(x_2 - t)^{\alpha-1} - (x_1 - t)^{\alpha-1}\right|\cdot|\rho(t)|dt + \max_{\psi\in S}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x_2}(x_2 - t)^{\alpha-1}|\rho(t)|dt .$$

Так как $|\rho(t)| \le |F(t, Y(t))|\cdot\|\psi\| \le m(t)$, то

$$B \le |\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x_2}(x_2 - t)^{\alpha-1}m(t)dt . \tag{10}$$

Воспользовавшись тем, что $(x_2 - t)^{\alpha-1}m(t) \in L((x_1, x_2), R_+)$, абсолютной непрерывностью интеграла Лебега и соотношением (10), получим, что $Y(x) \in C(J, \operatorname{conv} R^n)$, т.е. $Y(x)$ удовлетворяет первому условию определения 1.

Из соотношения $Y_{1-\alpha}(x) = Y_0 + (I_0^1 F(x, Y))(x)$ следует, что $Y(x)$ удовлетворяет второму и третьему условиям определения 1. Теорема 3 доказана.

**Теорема 4**. *Если м. о.* $F(x, Y): \bar{J} \times \operatorname{conv} R^n \to \operatorname{conv} R^n$ *удовлетворяет условиям* (а), (б), (в), *то множество решений задачи* (3), (4) *не пусто.*

**Доказательство.** Пусть $Y^{(0)}(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}Y_0}{\Gamma(\alpha)}$. Рассмотрим последовательность

$$Y^{(m+1)}(x) = Y^{(0)}(x) + I_0^\alpha F\left(x, Y^{(m)}(x)\right), \ m = 0,1,2,\ldots . \tag{11}$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что $Y^{(m)}(x)$, $m = 0,1,2,\ldots$ удовлетворяют первым двум условиям определения 1. Введем в рассмотрение последовательность $\left\{T^{(m)}(x)\right\}$, где $T^{(m)}(x) = x^{1-\alpha}Y^{(m)}(x)$. Так как

$$h\left(T^{(m)}(x), \frac{Y_0}{\Gamma(\alpha)}\right) \le \left|x^{1-\alpha}\left(I_0^\alpha F\left(x, Y^{(m)}\right)(x)\right)\right| \le \frac{a^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x - t)^{\alpha-1}m(t)dt ,$$

то $\lim\limits_{x\to 0^+} h\left(T^{(m)}(x), \dfrac{Y_0}{\Gamma(\alpha)}\right) = 0$. Поэтому, полагая $T^{(m)}(0) = \dfrac{Y_0}{\Gamma(\alpha)}$, получим, что $T^{(m)}(x) \in C(\bar{J}, \operatorname{conv} R^n)$. Проверим, что множество $T^{(m)}(x)$, $m = 0,1,2,\ldots$ удовлетворяет условиям теоремы Арцела [3]. Имеем $\left|T^{(m)}(x)\right| \le \dfrac{|Y_0|}{\Gamma(\alpha)} + a^{1-\alpha}\max\limits_{\bar{J}}\gamma(x)$.

Если $x_1, x_2 \in \bar{J}$, $x_1 < x_2$, а $\rho_m(t) = c\left(F\left(t, Y^{(m)}(t)\right), \psi\right)$, то

$$h\left(T^{(m)}(x_1), T^{(m)}(x_2)\right) =$$

$$= \max_{\psi\in S}\left|\frac{x_2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_2}(x_2 - t)^{\alpha-1}\rho_{m-1}(t)dt - \frac{x_1^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_1}(x_1 - t)^{\alpha-1}\rho_{m-1}(t)dt\right| \le$$

$$\le \frac{a^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}|\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| + 2\int_{x_1}^{x_2}(x_2 - t)^{\alpha-1}m(t)dt + \frac{(x_2 - x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\max_{\bar{J}}\gamma(x) .$$

Отсюда следует, что множество $T^{(m)}(x):\bar{J}\to \operatorname{conv}R^n$, $m=0,1,2,\ldots$ равностепенно непрерывно. В силу теоремы Арцела существует подпоследовательность (обозначим ее также), равномерно сходящаяся к непрерывному отображению $T:\bar{J}\to \operatorname{conv}R^n$. Тогда для каждого $x\in J$ $\lim\limits_{m\to\infty} Y^{(m)}(x)=Y(x)$, $Y(x)=x^{\alpha-1}T(x)$. А так как $(x-t)^{\alpha-1}\left|F\left(t,Y^{(m)}(x)\right)\right|\le (x-t)^{\alpha-1}m(t)$, то [1] в метрике Хаусдорфа для $x\in J$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\left(t,Y^{(m)}(t)\right)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}F\left(t,Y(t)\right)dt .$$

Окончательно из (11) для $x\in J$ получаем $Y(x)=\dfrac{x^{\alpha-1}Y_0}{\Gamma(\alpha)}+\left(I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x)$. В силу теоремы 3 $Y(x)$ – решение задачи (3), (4).

**Теорема 5.** *Пусть м. о.* $F(x,Y):\bar{J}\times\operatorname{conv}R^n\to\operatorname{conv}R^n$ *удовлетворяет условиям* (а), (б), (в) *и условию Липшица, т. е. для любых* $Y,U\in\operatorname{conv}R^n$,

$$h\left(F(x,Y),F(x,U)\right)\le Kh\left(Y,Z\right), \tag{12}$$

*причем* $Ka^\alpha<\Gamma(1+\alpha)$. *Тогда задача* (3), (4) *имеет единственное решение*.

**Доказательство.** Пусть $Y(x)$, $Y_1(x)$ – два решения задачи (3), (4), а

$$z(x)=h\left(Y(x),Y_1(x)\right)=h\left(\left(I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x),\left(I_0^\alpha F(x,Y)\right)(x)\right).$$

Отсюда с учетом условия (в) следует, что $z(x)\in C\left(\bar{J},R_+\right)$. Кроме того, в силу (12)

$$z(x)\le\frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}z(t)\,dt . \tag{13}$$

Пусть $T=\max\limits_{\bar{J}} z(x)$. Из (13) получаем $T\le\left(KTa^\alpha\right)/\Gamma(\alpha+1)$, т.е. $Ka^\alpha\ge\Gamma(1+\alpha)$, что противоречит условию $Ka^\alpha<\Gamma(1+\alpha)$. Теорема 5 доказана.

**Заключение.** Таким образом, в работе получены достаточные условия существования и единственности решения задачи (3),(4) в классе непрерывных многозначных отображений.

1. **Благодатских В.Н., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. мат. ин-та АН СССР.– 1985.– Т. 169.– С. 194–252.
2. **Hakuhara M.** Integration des applications measurable don't la valuer est un compact convexe // Func. Ekvacioj.– 1967.– V. 10, № 16.– P. 205–223.
3. **Hakuhara M.** Sur l'application mesurables don't la valuer est un compact convexe // Func. Ekvacioj.– 1967.– V. 10, № 10.– P. 43–66.
4. **Витюк А. Н.** Дробное дифференцирование многозначных отображений // Доповіді НАН України.– 2003.– № 10.– С. 75–78.

Получено 21.10.2002 г.