Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра алгебри, геометрії та диференціальних рівнянь

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«F-планарні відображення просторів афінної зв'язності»

«F-planar mappings of spaces of affine connection»

Виконала: здобувачка заочної форми навчання
спеціальність 111 Математика
Освітня програма «Математика»
Яблокова Ольга Василівна
Керівник __к.ф.-м.н., доцент, Курбатова І. М.__________
(наукова ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)
Рецензент _к.ф.-м.н., доцент, Шарай Н. В.____________
(наукова ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ _5_ від 25 листопада 2024 р.
Завідувач кафедри
________ _Євтухов В. М.
(підпис) (прізвище, ім'я)

Захищено на засіданні ЕК №_____
протокол № ___ від __________ р.
Оцінка____________/___ ___/___
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)
Голова ЕК
_________ ____________________
(підпис) (прізвище, ім'я)

Одеса – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Данна дипломна робота присвячена вивченню $F -$ планарних відображень просторів афінної зв'язності, які були введені в розгляд Сінюковим М. С. і Мікешем Й. Й. Цей клас відображень є природним узагальненням геодезичних, голоморфно-проективних та квазігеодезичних відображень афіннозв'язних та ріманових просторів, наділених афінорними структурами.

$F -$ планарні відображення просторів афінної зв'язності

$$f: A_n \to \bar{A}_n$$

можуть бути двох типів: повні та канонічні. В нашій роботі розглянуто канонічний тип.

За означенням $F -$ планарне відображення визначається лише на просторах з афінорною структурою F_i^h (в загальному випадку довільного типу). Ми досліджували спеціальний випадок, коли простір $A_n = V_n$, тобто є рімановим, і афінор F_i^h задає на ньому келерову структуру, а $\bar{A}_n$ - локально плоский. Простори, які допускають $F -$ планарне відображення на плоский простір, називають $F -$плоскими, а ті, що допускають канонічне $F -$ планарне відображення на плоский простір, називають канонічно $F -$плоскими

Для еліптично і гіперболічно келерових канонічно $F -$плоских просторів знайдена структура тензора Рімана:

$$R_{hijk}=\frac{K}{4}\left(g_{hj}g_{ik}-g_{hk}g_{ij}-eg_{h\bar{j}}g_{i\bar{k}}+eg_{h\bar{k}}g_{i\bar{j}}-2eg_{h\bar{i}}g_{j\bar{k}}\right)$$

Доведено, що вони є просторами сталої голоморфної кривини, а також симетричними, тобто їх тензор Рімана є коваріантно сталим.

Використовуючи формулу П. А. Широкова для метричного тензора g_{ij} симетричного ріманового простору в рімановій системі координат, можна отримати метрики для еліптичних та гіперболічних канонічно F −плоских келерових просторів. Ми знайшли в явному вигляді компоненти зворотної матриці g^{ij} до метричного тензора g_{ij} цих просторів.

РОЗДІЛ 1

F − ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

1.1. ПОНЯТТЯ ПРОСТОРУ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ. ТЕНЗОРИ РІМАНА І РІЧЧІ.

Означення 1. ***Простором*** A_n ***афінної зв'язності*** називається дійсний многовид $\boldsymbol{X_n}$ класу C^r, в якому визначено об'єкт афінної зв'язності Γ. Це означає, що в кожній локальній системі координат $(x^i), i = 1,2, \ldots, n$, на X_n задана сукупність функцій $\Gamma_{ij}^h(x)$, що змінюються при будь-якому перетворенні координат виду:

$$x'^i = x'^i\left(x^j\right), \qquad i, j = 1,2, \ldots, n,$$

згідно із законом:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha}\Gamma_{ij}^\alpha(x') = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^j} + \Gamma_{\beta\gamma}^k(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^j}.$$

Означення 2. Об'єкт

$$S_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h - \Gamma_{ji}^h$$

називають ***тензором скруту*** зв'язності Γ_{ij}^{h}.

Означення 3 .Якщо

$$\Gamma_{ij}^{h} \equiv \Gamma_{ji}^{h},$$

то A_n називається ***простором афінної зв'язності без скруту.***

Означення 4. ***Тензор Рімана*** зв'язності Γ - це тензор типу$\binom{1}{3}$ на A_n, який обчислюється за формулою:

$$R_{\cdot ijk}^{h} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{h}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^{h}}{\partial x^{k}} + \Gamma_{ik}^{\alpha}\Gamma_{j\alpha}^{h} - \Gamma_{ij}^{\alpha}\Gamma_{k\alpha}^{h}$$

і задовольняє умовам:

$R_{\cdot ijk}^{h} + R_{\cdot ikj}^{h} \equiv 0,$

$R_{\cdot ijk}^{h} + R_{\cdot jki}^{h} + R_{\cdot kij}^{h} \equiv 0,$ – тотожність Біанкі

$R_{\cdot ijk,m}^{h} + R_{\cdot ikm,j}^{h} + R_{\cdot imj,k}^{h} \equiv 0$ – диференціальна тотожність Біанкі, де «,» – знак коваріантної похідної за зв'язністю Г.

Означення 5. Тензор типу $\binom{0}{2}$

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{\cdot ij\alpha}$$

називається ***тензором Річчі*** простору A_n.

Означення 6. A_n називають ***еквіафінним простором,*** якщо його тензор Річчі симетричний:

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

Означення 7. ***Афінорна структура*** – це тензор типу $\binom{1}{1}$ на A_n, тобто упорядкований набір функцій $F_i^h(x)$, які при переході до нової системи координат (x') змінюється за законом:

$$F_i'^h(x') = F_\beta^\alpha(x)\frac{\partial x'^h}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i}$$

Означення 8. Афінорна структура F називається ***інтегровною*** (локально), якщо в деякому околі кожної точки многовиду існує така система координат, щодо якої всі компоненти F_i^h в цій області є сталими.

Відомо, що необхідною і достатньою ознакою локальної інтегровності F_i^h є існування на X_n симетричної афінної зв'язності Г, щодо якої ця структура абсолютно паралельна, тобто

$$F_{i,j}^h \equiv 0 \quad .$$

Ще один критерій інтегровності афінорної структури стверджує, що афінорна структура F_i^h інтегровна тоді і тільки тоді, коли її тензор Нейенхейса дорівнює нулю, тобто

$$N_{ij}^h = F_i^\alpha (F_{\alpha,j}^h - F_{j,\alpha}^h) - F_j^\alpha (F_{\alpha,i}^h - F_{i,\alpha}^h) = 0.$$

1.2. $F -$ ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРІВ АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ.

Розглянемо простір афінної зв'язності без скруту A_n, віднесений до системи координат $x^1,\ x^2, \dots, x^n$, в якому визначена афінорна структура $F_i^h(x) \neq a\delta_i^h$, де $\delta_i^h -$ символи Кронекра, $a -$ деякий інваріант.

Означення 1. Крива L, визначена рівняннями

$$x^h = x^h(t),$$
$$\lambda^h(t)^\alpha = \frac{dx^h}{dt}, \qquad (h = \overline{1,n}),$$

де $t -$ параметр, називається ***геодезичною лінією*** A_n, якщо її дотичний вектор при паралельному перенесенні вздовж неї зберігається, тобто вздовж неї виконуються умови:

$$\lambda^h, \alpha\lambda^\alpha = \rho(t)\lambda^h$$

Означення 2. Крива L, визначена рівняннями

$$x^h = x^h(t),$$
$$\lambda^h(t)^\alpha = \frac{dx^h}{dt}, \qquad (h = \overline{1,n}),$$

де $t -$ параметр, називається $\boldsymbol{F} -$ ***планарною,*** якщо її дотичний вектор при паралельному перенесені вздовж неї залишається в площині, утвореній дотичним вектором λ^h і вектором $\lambda^\alpha F_\alpha^h$.

У відповідності з цим означенням крива L є $F -$ планарною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lambda^h, \alpha\lambda^\alpha = \rho_1(t)\lambda^h + \rho_2(t)\lambda^\alpha F_\alpha^h,$$

де $\rho_1, \rho_2 -$ деякі (довільні) функції параметра t, комою позначається коваріантна похідна за зв'язністю A_n.

Клас F – планарних кривих простору A_n дуже великий. Через довільну точку у кожному напрямі проходить безліч F– планарних кривих, залежних від одної довільної функції.

Клас F – планарних кривих містить у собі:

а) геодезичні лінії (якщо $\rho_2 \equiv 0$)

б) планарні криві $[9, 10]$

в) квазігеодезичні криві $[9, 10]$

г) аналітичні планарні криві $[9, 10]$

Тепер нехай на просторі афінної зв'язності $\bar{A}_n$ визначено структурний афінор $\bar{F}_i^h$.

Означення 3. Відображення

$$f: (A_n, \Gamma_{ij}^h, F_i^h) \overset{\text{на}}{\rightarrow} (\bar{A}_n, \bar{\Gamma}_{ij}^h, \bar{F}_i^h)$$

називається ***F – планарним***, якщо в результаті його будь-яка F–планарна крива A_n переходить в $\bar{F}$ – планарну криву $\bar{A}_n$.

Говорять, що $F -$ планарне відображення $f\colon A_n \longrightarrow \bar{A}_n$ ***зберігає структуру***, якщо у загальній відносно відображення системі координат (x)

$$F_i^h(x) \equiv \bar{F}_i^h(x).$$

Мають місце

Теорема 1.2.1. F – планарні відображення A_n на $\bar{A}_n$ $(n > 3)$ зі збереженням структури характеризуються наступними умовами

$$P_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i + F_i^h \varphi_j + F_j^h \varphi_i,$$

де $\psi_i(x), \varphi_i(x) -$ деякі вектори, $P_{ij}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$.

Теорема 1.2.2. Будь-яке F – планарне відображення простору афінної зв'язності A_n на $\bar{A}_n$ $(n > 3)$ зберігає структуру.

$$F_i^h(x) \equiv \bar{F}_i^h(x).$$

1.3. ЗВ'ЯЗОК МІЖ КОМПОНЕНТАМИ ТЕНЗОРІВ РІМАНА ПРОСТОРІВ $\mathbf{A_n}$ ТА $\mathbf{\bar{A}_n}$ ПРИ F – ПЛАНАРНОМУ ВІДОБРАЖЕННІ.

При будь-якому відображенні $f\colon\ A_n \longrightarrow \bar{A}_n$ тензор Рімана просторів A_n та $\bar{A}_n$ пов'язані умовами:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + P_{ik,j}^h - P_{ij,k}^h + P_{ik}^\alpha P_{\alpha j}^h - P_{ij}^\alpha P_{\alpha k}^h \qquad (1.3.1)$$

де $P_{ij}^h = \bar{\Gamma}_{ij}^h - \Gamma_{ij}^h$ -тензор деформації зв'зності відображення.

Тензор деформації F – планарного відображення з Теореми 2.1:

$$P_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h + \varphi_i F_j^h + \varphi_j F_i^h. \qquad (1.3.2)$$

Підставимо (1.3.2) в формулу (1.3.1):

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \left(\psi_i \delta_k^h + \psi_k \delta_i^h + \varphi_i F_k^h + \varphi_k F_i^h\right)_{,j} -$$

$$-\left(\psi_i\delta_j^h+\psi_j\delta_i^h+\varphi_iF_j^h+\varphi_jF_i^h\right)_{,k}+$$

$$+(\psi_i\delta_k^\alpha+\psi_k\delta_i^\alpha+\varphi_iF_k^\alpha+\varphi_kF_i^\alpha)\times$$

$$\times\left(\psi_\alpha\delta_j^h+\psi_j\delta_\alpha^h+\varphi_\alpha F_j^h+\varphi_jF_\alpha^h\right)-$$

$$-\left(\psi_i\delta_j^\alpha+\psi_j\delta_i^\alpha+\varphi_iF_j^\alpha+\varphi_jF_i^\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\psi_\alpha\delta_k^h+\psi_k\delta_\alpha^h+\varphi_\alpha F_k^h+\varphi_kF_\alpha^h\right)$$

$$\bar{R}_{ijk}^h=R_{ijk}^h+$$

$$+\psi_{i,j}\delta_k^h+\psi_{k,j}\delta_i^h+\varphi_{i,j}F_k^h+\varphi_iF_{k,j}^h+\varphi_{k,j}F_i^h+\varphi_kF_{i,j}^h-$$

$$-\left(\psi_{i,k}\delta_j^h+\psi_{j,k}\delta_i^h+\varphi_{i,k}F_j^h+\varphi_iF_{j,k}^h+\varphi_{j,k}F_i^h+\varphi_jF_{i,k}^h\right)+$$

$$+\psi_i\psi_k\delta_j^h+\psi_i\psi_j\delta_k^h+\psi_i\varphi_kF_j^h+\psi_i\varphi_jF_k^h+\psi_k\psi_i\delta_j^h+$$

$$+\psi_k\psi_j\delta_i^h+\psi_k\varphi_iF_j^h+\psi_k\varphi_jF_i^h+\psi_\alpha F_k^\alpha\varphi_i\delta_j^h+\varphi_i\psi_jF_k^h+$$

$$+\varphi_\alpha F_k^\alpha\varphi_iF_j^h+F_k^\alpha F_\alpha^h\varphi_i\varphi_j+\psi_\alpha F_i^\alpha\varphi_k\delta_j^h+\varphi_k\psi_jF_i^h+$$

$$+\varphi_\alpha F_i^\alpha\varphi_kF_j^h+F_i^\alpha F_\alpha^h\varphi_k\varphi_j-$$

$$-(\psi_i\psi_j\delta_k^h+\psi_i\psi_k\delta_j^h+\psi_i\psi_jF_k^h+\psi_i\varphi_kF_j^h+\psi_j\psi_i\delta_k^h+$$

$$+\psi_j\psi_k\delta_i^h+\psi_j\varphi_iF_k^h+\psi_j\varphi_kF_i^h+\psi_\alpha F_j^\alpha\varphi_i\delta_k^h+\varphi_i\psi_kF_j^h+$$

$$+\varphi_\alpha F_j^\alpha\varphi_iF_k^h+F_j^\alpha F_\alpha^h\varphi_i\varphi_k+\psi_\alpha F_i^\alpha\varphi_j\delta_k^h+\varphi_j\psi_kF_i^h+$$

$$+\varphi_\alpha F_i^\alpha\varphi_iF_k^h+F_i^\alpha F_\alpha^h\varphi_j\varphi_k).$$

Після зведення подібних маємо

$$\bar{R}_{ijk}^h=R_{ijk}^h+\delta_i^h\left(\psi_{k,j}-\psi_{j,k}\right)+F_i^h\left(\varphi_{k,j}-\varphi_{j,k}\right)+$$

$$+\delta_k^h\left(\psi_{i.j}-\psi_i\psi_j-\psi_\alpha F_j^\alpha\varphi_i-\psi_\alpha F_i^\alpha\varphi_j\right)-$$
$$-\delta_j^h\left(\psi_{i,k}-\psi_k\psi_i-\psi_\alpha F_k^\alpha\varphi_i-\psi_\alpha F_i^\alpha\varphi_k\right)+ \qquad (1.3.3)$$
$$+F_k^h\left(\varphi_{i,j}-\varphi_\alpha F_j^\alpha\varphi_i-\varphi_\alpha F_i^\alpha\varphi_i\right)-$$
$$-F_j^h\left(\varphi_{i,k}-\varphi_\alpha F_k^\alpha\varphi_i-\varphi_\alpha F_i^\alpha\varphi_k\right)+F_{k,j}^h\varphi_i+\varphi_k F_{i,j}^h-$$
$$-\varphi_i F_{j,k}^h-\varphi_j F_{i,k}^h+F_k^\alpha F_\alpha^h\varphi_i\varphi_j-F_j^\alpha F_\alpha^h\varphi_i\varphi_k.$$

Позначимо:

$$\psi_{ij}=\psi_{i.j}-\psi_i\psi_j-\psi_\alpha F_j^\alpha\varphi_i-\psi_\alpha F_i^\alpha\varphi_j \qquad (1.3.4)$$
$$\varphi_{ij}=\varphi_{i,j}-\varphi_\alpha F_j^\alpha\varphi_i-\varphi_\alpha F_i^\alpha\varphi_j \qquad (1.3.5)$$

Отримаємо з (1.3.3):

$$\bar{R}_{ijk}^h=R_{ijk}^h+\delta_i^h\psi_{[kj]}+\delta_k^h\psi_{ij}-\delta_j^h\psi_{ik}+$$
$$+F_i^h\varphi_{[kj]}+F_k^h\varphi_{ij}-F_j^h\varphi_{ik}+$$
$$+\varphi_i\left(F_{k,j}^h-F_{j,k}^h\right)+\varphi_k F_{i,j}^h-\varphi_j F_{i,k}^h+$$
$$+F_k^\alpha F_\alpha^h\varphi_i\varphi_j-F_j^\alpha F_\alpha^h\varphi_i\varphi_k \qquad (1.3.6)$$

РОЗДІЛ 2

СПЕЦІАЛЬНІ АФІНОРНІ СТРУКТУРИ НА РІМАНОВИХ ПРОСТОРАХ

2.1. КЕЛЕРОВІ ПРОСТОРИ.

Означення. ***Рімановим простором*** $\boldsymbol{V_n}$ називається дійсний многовид X_n класу C^r, в якому визначено поле двічі коваріантного симетричного неособливого тензора g_{ij}, який називається метричним тензором простору. У кожній локальній системі координат на X_n його компоненти є відомими функціями класу C^{r-1} від координат поточної точки $M \in X_n$, що задовольняють умовам:

$$g_{ij}(x) \equiv g_{ji}(x),$$

$$g = det\left\|g_{ij}\right\| \neq 0$$

і при переході до нової системи координат:

$$x'^i = x'^i(x^j)$$

змінюються таким чином:

$$g'_{ij}(x') = g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}.$$

На V_n за допомогою метричного тензора формулами

$$\Gamma^h_{ij} = g^{h\alpha}\Gamma_{ij,\alpha}$$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

визначаються ***символи Крістоффеля другого роду***, що є об'єктами афінної зв'язності Γ на V_n (її називають ***рімановою зв'язністю***).

За допомогою об'єкту зв'язності Γ на V_n будується ***тензор Рімана*** типа $\binom{1}{3}$:

$$R^h_{\cdot ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{j\alpha} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{k\alpha}$$

що задовольняє умовам:

$$R^h_{\cdot ijk} + R^h_{\cdot ikj} \equiv 0,$$

$$R^h_{\cdot ijk} + R^h_{\cdot jki} + R^h_{\cdot kij} \equiv 0,$$

$$R^h_{\cdot ijk,m} + R^h_{\cdot ikm,j} + R^h_{\cdot imj,k} \equiv 0,$$

де «,» - знак коваріантної похідної за зв'язністю Γ.

Тензор типа $\binom{0}{4}$

$$R_{hijk} = g_{h\alpha} R^{\alpha}_{\cdot ijk}$$

називається ***тензором кривини*** $\boldsymbol{V_n}$, він окрім зазначених вище задовольняє співвідношенням:

$$R_{hijk} = -R_{ihjk},$$

$$R_{hijk} = R_{jkhi}.$$

Тензор типу $\binom{0}{2}$

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{\cdot ij\alpha}$$

називається ***тензором Річчі*** простору V_n. Він за необхідністю симетричний:

$$R_{ij} = R_{ji}$$

а його слід:

$$R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$$

називається ***скалярною кривиною*** $\boldsymbol{V_n}$.

Розглянемо випадки, коли $A_n \equiv V_n$, отже об'єкт афінної зв'язності A_n породжується метричним тензором g_{ij} ріманового простору V_n

Афінорну структуру F_i^h на V_n називають структурою:

а) ***еліптичного типу***, якщо $F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h$ (2.1.1)

b) ***гіперболічного типу***, якщо $F_\alpha^h F_i^\alpha = +\delta_i^h$ (2.1.2)

c) ***параболічного типу***, якщо $F_\alpha^h F_i^\alpha = 0$ (2.1.3)

Якщо афінорна структура F_i^h визначена на рімановому просторі $V_n(g_{ij})$, то її зазвичай узгоджують з метричним тензором g_{ij} у вигляді:

$$g_{h\alpha} F_i^\alpha = -g_{i\alpha} F_h^\alpha \quad (2.1.4)$$

або

$$g_{h\alpha} F_i^\alpha = +g_{i\alpha} F_h^\alpha \quad (2.1.5)$$

В першому випадку структуру F називають ***ермітовою***, а в другому – ***квазіермітовою.*** Ми будемо розглядати тільки ермітові структури.

Далі ми вважаємо афінор F коваріантно сталим в V_n, тобто виконується умова

$$F_{i,j}^h = 0 \quad (2.1.6)$$

Афінорна структура, яка задовольняє умовам (2.1.1),(2.1.4),(2.1.6), називається ***еліптично келеровою***; (2.1.2),(2.1.4),(2.1.6) – ***гіперболічно келеровою***; (2.1.3),(2.1.4),(2.1.6) – ***параболічно келеровою***.

Домовимося операцію згортання з афінором позначати наступним чином:

$$A_{\bar{j}} = A_\alpha \mathrm{F}_j^\alpha\ , \qquad A^{\bar{j}} = A^\alpha \mathrm{F}_\alpha^j$$

Якщо $F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h$, тоді

$$F_{\bar{\imath}}^h = F_i^{\bar{h}} = -\delta_i^h,$$

$$\mathrm{g}_{h\bar{\imath}} = -\mathrm{g}_{\bar{h}i}, \qquad \mathrm{g}_{\bar{h}\bar{\imath}} = +\mathrm{g}_{hi}$$

$$A_{\bar{\bar{j}}} = A_\alpha \mathrm{F}_\gamma^\alpha \mathrm{F}_j^\gamma = -A_j,\ \ A^{\bar{\bar{j}}} = A^\alpha \mathrm{F}_\alpha^\gamma \mathrm{F}_\gamma^j = -A^j.$$

Якщо $F_\alpha^h F_i^\alpha = +\delta_i^h$, тоді

$$F_{\bar{\imath}}^h = F_i^{\bar{h}} = +\delta_i^h,$$

$$\mathrm{g}_{h\bar{\imath}} = -\mathrm{g}_{\bar{h}i}, \qquad \mathrm{g}_{\bar{h}\bar{\imath}} = -\mathrm{g}_{hi}$$

$$A_{\bar{\bar{j}}} = A_\alpha \mathrm{F}_\gamma^\alpha \mathrm{F}_j^\gamma = +A_j\ ,\ \ A^{\bar{\bar{j}}} = A^\alpha \mathrm{F}_\alpha^\gamma \mathrm{F}_\gamma^j = +A^j$$

Якщо $F_\alpha^h F_i^\alpha = 0$, тоді

$$F_{\bar{\imath}}^h = F_i^{\bar{h}} = 0,$$

$$\mathrm{g}_{h\bar{\imath}} = -\mathrm{g}_{\bar{h}i}, \qquad \mathrm{g}_{\bar{h}\bar{\imath}} = 0,$$

$$A_{\bar{\bar{j}}} = A_\alpha \mathrm{F}_\gamma^\alpha \mathrm{F}_j^\gamma = 0\ ,\ \ A^{\bar{\bar{j}}} = A^\alpha \mathrm{F}_\alpha^\gamma \mathrm{F}_\gamma^j = 0.$$

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ТЕНЗОРІВ РІМАНА І РІЧЧІ КЕЛЕРОВИХ ПРОСТОРІВ.

1. ***Еліптично келерові простори.*** В ріманових просторах, наділених афінорною структурою, за умов

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = -\delta_i^h \quad (2.2.1)$$

$$F_{i,j}^h \equiv 0 \quad (2.2.2)$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \quad (2.2.3)$$

природним чином виникають умови на тензори Рімана та Річчі.

В даному випадку з огляду на

$$F_{i,j}^h \equiv 0,$$

очевидно,

$$F_{i,jk}^h \equiv 0$$

і, отже,

$$F_{i,[jk]}^h = F_{ij,k} - F_{i,kj} \equiv 0.$$

Застосовуючи тотожність Річчі, звідси отримуємо:

$$R_{\cdot\bar{\imath}jk}^{h} - R_{\cdot ijk}^{\bar{h}} = 0 \quad (2.2.4)$$

або відповідно до (2.2.1) :

$$R^{\bar{h}}_{\cdot\bar{\imath}jk} + R^{h}_{\cdot ijk} = 0$$

Опустимо в (2.2.4) індекс h за допомогою метричного тензора g_{hl} з урахуванням (2.2.3):

$$R_{h\bar{\imath}jk} + R_{\bar{h}ijk} = 0$$

Звідси після сполучення за індексом h маємо:

$$R_{\bar{h}\bar{\imath}jk} - R_{hijk} = 0\,.$$

Тоді очевидно, що правильна рівність:

$$R_{\bar{h}\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}} - R_{hijk} = 0\,.$$

Згорнемо тут з компонентами зворотного метричного тензора g^{hk} за індексами h, k:

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{\beta}} g^{\alpha\beta} = R_{\alpha ij\beta} g^{\alpha\beta}. \qquad (2.2.5)$$

Ліва частина цієї рівності дає нам:

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{\beta}} g^{\alpha\beta} = R_{\alpha\bar{\imath}\bar{\jmath}\beta} g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\imath}\bar{\jmath}\beta} g^{\alpha\beta} = R_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}.$$

Отже, з (2.2.5) матимемо:

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = R_{ij} \qquad (2.2.6)$$

або після сполучення за індексом i:

$$R_{\bar{i}j} = -R_{i\bar{j}} \qquad (2.2.7)$$

2. ***Гіперболічно келерові простори.*** В ріманових просторах, наділених афінорною структурою, за умов

$$F_{\alpha}^{h} F_{i}^{\alpha} = +\delta_{i}^{h} \qquad (2.2.8)$$

$$F_{i,j}^{h} \equiv 0. \qquad (2.2.9)$$

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \qquad (2.2.10)$$

природним чином виникають умови на тензори Рімана та Річчі.
З тотожності Річчі для афінора отримуємо:

$$R_{\cdot\bar{i}jk}^{h} - R_{\cdot ijk}^{\bar{h}} = 0 \qquad (2.2.11)$$

або відповідно до (2.2.8) :

$$R_{\cdot\bar{i}jk}^{\bar{h}} - R_{\cdot ijk}^{h} = 0$$

Опустимо в (2.2.11) індекс h за допомогою метричного тензора g_{hl} з урахуванням (2.2.10):

$$R_{h\bar{\imath}jk} + R_{\bar{h}ijk} = 0$$

Звідси після сполучення за індексом h маємо:

$$R_{\bar{h}\bar{\imath}jk} + R_{hijk} = 0\ .$$

Тоді очевидно, що правильна рівність:

$$R_{\bar{h}\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}} + R_{hijk} = 0\ .$$

Згорнемо тут з компонентами зворотного метричного тензора g^{hk} за індексами h, k:

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{\beta}} g^{\alpha\beta} = R_{\alpha ij\beta} g^{\alpha\beta}. \qquad (2.2.12)$$

Ліва частина цієї рівності дає нам:

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{\beta}} g^{\alpha\beta} = R_{\alpha\bar{\imath}\bar{\jmath}\beta} g^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = -R_{\alpha\bar{\imath}\bar{\jmath}\beta} g^{\alpha\beta} = -R_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}.$$

Отже, з (2.2.5) матимемо:

$$R_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = -R_{ij} \qquad (2.2.13)$$

або після сполучення за індексом i:

$$R_{\bar{\imath}j} = -R_{i\bar{\jmath}} \qquad (2.2.14)$$

РОЗДІЛ 3
F – ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ АФІННОЗВ'ЯЗНИХ ПРОСТОРІВ НА КЕЛЕРОВІ

3.1. ЗВ'ЯЗОК МІЖ КОМПОНЕНТАМИ ТЕНЗОРА РІМАНА ПРОСТОРІВ ПРИ F – ПЛАНАРНОМУ ВІДОБРАЖЕННІ КЕЛЕРОВОГО ПРОСТОРУ K_n НА ПРОСТІР АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ $\bar{A}_n$.

Розглянемо F – планарне відображення $f: K_n \to \bar{A}_n$, де K_n –келеровий простір. Тоді зв'язок між компонентами тензорів Рімана відображуваних просторів

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_i \psi_{[kj]} + \delta^h_k \psi_{ij} - \delta^h_j \psi_{ik} +$$
$$+F^h_i \varphi_{[kj]} + F^h_k \varphi_{ij} - F^h_j \varphi_{ik} +$$
$$+\varphi_i\left(F^h_{k,j} - F^h_{j,k}\right) + \varphi_k F^h_{i,j} - \varphi_j F^h_{i,k} +$$
$$+F^\alpha_k F^h_\alpha \varphi_i \varphi_j - F^\alpha_j F^h_\alpha \varphi_i \varphi_k ,$$

який ми отримали в третьому параграфі, набуває вигляду:

1) для ***еліптично келерового*** простору K_n, тобто при $F^h_\alpha F^\alpha_i = -\delta^h_i$:

$$\bar{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_i\left(\psi_{kj} - \psi_{jk} - \varphi_k\varphi_j + \varphi_j\varphi_k\right) +$$
$$+\delta^h_k\left(\psi_{ij} - \varphi_i\varphi_j\right) - \delta^h_j\left(\psi_{ik} - \varphi_i\varphi_k\right) + \qquad (3.1.1)$$

$$+F_i^h\left(\varphi_{kj}-\varphi_{jk}\right)+F_k^h\varphi_{ij}-F_j^h\varphi_{ik}$$

2) для ***гіперболічно келерового*** простору K_n, тобто при $F_\alpha^h F_i^\alpha = +\delta_i^h$:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_i^h\left(\psi_{kj}-\psi_{jk}+\varphi_k\varphi_j-\varphi_j\varphi_k\right)+$$
$$+\delta_k^h\left(\psi_{ij}+\varphi_i\varphi_j\right)-\delta_j^h\left(\psi_{ik}+\varphi_i\varphi_k\right)+ \qquad (3.1.2)$$
$$+F_i^h\left(\varphi_{kj}-\varphi_{jk}\right)+F_k^h\varphi_{ij}-F_j^h\varphi_{ik}$$

3) для ***параболічно келерового*** простору K_n, тобто при $F_\alpha^h F_i^\alpha = 0$ маємо:

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_i^h\left(\psi_{kj}-\psi_{jk}\right)+\delta_k^h\psi_{ij}- \qquad (3.1.3)$$
$$-\delta_j^h\psi_{ik}+F_i^h\left(\varphi_{kj}-\varphi_{jk}\right)+F_k^h\varphi_{ij}-F_j^h\varphi_{ik}$$

3.2. КАНОНІЧНІ F – ПЛАНАРНІ ВІДОБРАЖЕННЯ КЕЛЕРОВОГО ПРОСТОРУ НА ПЛОСКИЙ ПРОСТІР АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ.

Означення 1. F – планарне відображення $f\colon A_n \longrightarrow \bar{A}_n$ будемо називати ***канонічним,*** якщо в основних рівняннях

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{h}(x) = \Gamma_{ij}^{h}(x) + \delta_i^h\psi_j + \delta_j^h\psi_i + F_i^h\varphi_j + F_j^h\varphi_i,$$

вектор $\psi_i \equiv 0$, тобто

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{h}(x) = \Gamma_{ij}^{h}(x) + F_i^h\varphi_j + F_j^h\varphi_i \qquad (3.2.1)$$

Означення 2. Простір A_n називається ***F – плоским***, якщо він допускає F – планарне відображення на плоский простір $\bar{A}_n$.

Нагадаємо, що

Означення 3. Простір афінної зв'язності A_n називається ***плоским*** (або ***афінним***), якщо існує система координат, відносно якої всі компоненти афінної зв'язності $\Gamma_{ij}^{h}(x) \equiv 0$.

Критерій плоского $\boldsymbol{A_n}$. Простір A_n – плоский тоді і тільки тоді, коли його тензор Рімана задовольняє умові $R_{ijk}^{h}(x) \equiv 0$.

Далі будемо розглядати канонічні $\boldsymbol{F}$ – планарні відображення келерового простору $\boldsymbol{K_n}(\equiv \boldsymbol{A_n})$ на плоский простір афінної зв'язності $\overline{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}$, отже

$$\bar{R}^h_{ijk} \equiv 0\,. \tag{3.2.2}$$

Тоді із зв'язку між компонентами тензорів Рімана відображуваних просторів при F – планарному відображенні, який ми отримали в попередньому параграфі, знайдемо:

1) для ***еліптично келерового*** простору K_n, тобто при $F^h_\alpha F^\alpha_i = -\delta^h_i$:

$$R^h_{ijk} = \delta^h_k \varphi_i \varphi_j - \delta^h_j \varphi_i \varphi_k - \\ -F^h_i(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}) - F^h_k \varphi_{ij} + F^h_j \varphi_{ik} \tag{3.2.3}$$

2) для ***гіперболічно келерового*** простору K_n, тобто при $F^h_\alpha F^\alpha_i = +\delta^h_i$:

$$R^h_{ijk} = -\delta^h_k \varphi_i \varphi_j + \delta^h_j \varphi_i \varphi_k - \\ -F^h_i(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}) - F^h_k \varphi_{ij} + F^h_j \varphi_{ik} \tag{3.2.4}$$

3) для ***параболічно келерового*** простору K_n, тобто при $F^h_\alpha F^\alpha_i = 0$:

$$R^h_{ijk} = -F^h_i(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}) - F^h_k \varphi_{ij} + F^h_j \varphi_{ik} \tag{3.2.5}$$

3.3. ОСОБЛИВОСТІ КАНОНІЧНОГО F – ПЛАНАРНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЕЛІПТИЧНО КЕЛЕРОВОГО ПРОСТОРУ НА ПЛОСКИЙ ПРОСТІР АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ.

Нагадаємо, що тотожність Річчі для афінора еліптично келерового простору має вигляд

$$-R^{h}_{\bar{\imath}jk} + R^{\bar{h}}_{ijk} = 0 \,, \qquad (3.3.1)$$

а для тензора Рімана еліптично келерового простору, який допускає канонічне F-планарне відображення на плоский простір афінної зв'язності, ми раніше отримали:

$$\begin{aligned} R^{h}_{ijk} = \delta^{h}_{k}\varphi_{i}\varphi_{j} - \delta^{h}_{j}\varphi_{i}\varphi_{k} - \\ -F^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) - F^{h}_{k}\varphi_{ij} + F^{h}_{j}\varphi_{ik} \end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

Підставимо (3.3.2) в тотожність Річчі для афінора F^{h}_{i}:

$$R^{\bar{h}}_{ijk} = F^{h}_{k}\varphi_{i}\varphi_{j} - F^{h}_{j}\varphi_{i}\varphi_{k} + \delta^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) + \delta^{h}_{k}\varphi_{ij} - \delta^{h}_{j}\varphi_{ik},$$

$$R^{h}_{\bar{\imath}jk} = \delta^{h}_{k}\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{j} - \delta^{h}_{j}\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{k} + \delta^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) - F^{h}_{k}\varphi_{\bar{\imath}j} + F^{h}_{j}\varphi_{\bar{\imath}k},$$

$$-R^{h}_{\bar{\imath}jk} + R^{\bar{h}}_{ijk} = -\delta^{h}_{k}\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{j} + \delta^{h}_{j}\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{k} - \delta^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) +$$
$$+F^{h}_{k}\varphi_{\bar{\imath}j} - F^{h}_{j}\varphi_{\bar{\imath}k} + +F^{h}_{k}\varphi_{i}\varphi_{j} - F^{h}_{j}\varphi_{i}\varphi_{k} +$$
$$+\delta^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) + \delta^{h}_{k}\varphi_{ij} - \delta^{h}_{j}\varphi_{ik} = 0$$

Після зведення подібних знаходимо:

$$0 = -\delta^{h}_{k}\left(\varphi_{ij} - \varphi_{i}\varphi_{j}\right) + \delta^{h}_{j}(\varphi_{ik} - \varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{k}) -$$
$$-F^{h}_{k}\left(\varphi_{\bar{\imath}j} + \varphi_{i}\varphi_{j}\right) + F^{h}_{j}\left(\varphi_{\bar{\imath}k} + \varphi_{i}\varphi_{j}\right). \qquad (3.3.3)$$

Якщо позначити

$$\left.\begin{aligned} C_{ij} &= \varphi_{ij} - \varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{j} \\ C_{\bar{\imath}j} &= \varphi_{\bar{\imath}j} + \varphi_{i}\varphi_{j} \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.4)$$

то попереднє співвідношення прийме вигляд

$$-\delta^{h}_{k}C_{ij} + \delta^{h}_{j}C_{ik} - F^{h}_{k}C_{\bar{\imath}j} + F^{h}_{j}C_{\bar{\imath}k} = 0 \qquad (3.3.5)$$

Згорнемо (3.3.5) за h, k (тобто $h = k = \alpha$) і отримаємо

$$-nC_{ij} + C_{ij} - 0 + C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = 0$$

або

$$(n-1)C_{ij} - C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = 0 \tag{3.3.6}$$

Виконаємо тут сполучення за індексами i, j:

$$(n-1)C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} - C_{ij} = 0$$

Додамо два останніх рівняння:

$$(n-2)\left(C_{ij} + C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}\right) = 0$$

Тоді при $n \neq 2$ із (3.3.6) витікає

$$C_{ij} = 0$$

Отже

$$\varphi_{ij} - \varphi_{\bar{\imath}}\varphi_j = 0$$

і (3.3.4) дають нам

$$\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_j = \varphi_{ij}$$

і

$$\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{\bar{\jmath}} = \varphi_{i\bar{\jmath}}.$$

Звідси зокрема

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\bar{\imath}j} = \varphi_{\bar{\jmath}i}\\ \varphi_{i\bar{\jmath}} = \varphi_{j\bar{\imath}}\end{aligned}\right\} \qquad (3.3.7)$$

(так як $\varphi_i\varphi_j = \varphi_j\varphi_i \quad \varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{\bar{\jmath}} = \varphi_{\bar{\jmath}}\varphi_{\bar{\imath}}$)

Тепер (3.3.2) набуває вигляду:

$$R_{ijk}^h = -\delta_k^h\varphi_{\bar{\imath}j} + \delta_j^h\varphi_{\bar{\imath}k} -$$

$$-F_i^h\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) - F_k^h\varphi_{ij} + F_j^h\varphi_{ik} \qquad (3.3.8)$$

Згорнемо тут по h і k:

$$R_{ij} = -n\varphi_{\bar{\imath}j} + \varphi_{\bar{\imath}j} - \left(\varphi_{\bar{\imath}j} - \varphi_{j\bar{\imath}}\right) - 0 + \varphi_{i\bar{\jmath}}$$

звідси на підставі (3.3.7) випливає

$$R_{ij} = -n\varphi_{\bar{\imath}j} + 2\varphi_{i\bar{\jmath}} \qquad (3.3.9)$$

Тепер (3.3.9) згорнемо с g^{ij} і отримаємо з огляду на те, що

$$R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R,$$

$R -$ скалярна кривина простору V_n

$$R = -(n+2)\varphi_{\overline{\alpha}\beta}\mathrm{g}^{\alpha\beta} \tag{3.3.10}$$

Зауважимо, що

$$\varphi_{i\bar{j}}\mathrm{g}^{ij} = \varphi_{ij}\mathrm{g}^{i\bar{j}} = -\varphi_{ij}\mathrm{g}^{\bar{i}j} = -\varphi_{\bar{i}j}\mathrm{g}^{ij}$$

В (3.3.9) поставимо рисочки над $\overline{ij}$:

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = n\varphi_{i\bar{j}} - 2\varphi_{\bar{i}j} \tag{3.3.11}$$

Зауважимо, що в еліптично келеровому просторі

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = R_{ij},$$

Віднімаючи (3.3.9) з (3.3.11) з урахуванням (3.3.7), маємо:

$$0 = n\varphi_{i\bar{j}} - 2\varphi_{\bar{i}j} - \left(-n\varphi_{\bar{i}j} + 2\varphi_{i\bar{j}}\right),$$

$$(n-2)\left(\varphi_{i\bar{j}} + \varphi_{\bar{i}j}\right) = 0$$

Звідси

$$\varphi_{i\bar{j}} = -\varphi_{\bar{i}j}$$

Тепер (3.3.9) дають нам

$$R_{ij} = -(n+2)\varphi_{\bar{i}j} \qquad (3.3.12)$$

$$\varphi_{\bar{i}j} = -\frac{1}{n+2}R_{ij}$$

і тому

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{n+2}R_{\bar{i}j} \qquad (3.3.13)$$

Підставимо (3.3.13) в (3.3.8) і отримаємо:

$$R^h_{ijk} = \qquad (3.3.14)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} - 2F^h_i R_{\bar{k}j} - F^h_k R_{\bar{i}j} + F^h_j R_{\bar{i}k}\right]$$

Опустимо індекс h вниз:

$$g_{h\alpha}R^{\alpha}_{ijk} = R_{hijk} = \qquad (3.3.15)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[g_{hk}R_{ij} - g_{hj}R_{ik} - 2F_{hi}R_{\bar{k}j} - F_{hk}R_{\bar{i}j} + F_{hj}R_{\bar{i}k}\right]$$

Тепер згорнемо (3.3.15) с g^{ij}:

$$R_{hk}=\frac{1}{n+2}\left[R\mathrm{g}_{hk}-R_{hk}+2R_{kh}-0+R_{hk}\right]$$

Звідси знаходимо:

$$R_{hk}=\frac{R}{n}\mathrm{g}_{hk} \qquad (3.3.16)$$

а із (3.3.13)

$$\varphi_{ij}=\frac{1}{n+2}R_{\bar{\imath}j}=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{R}{n}\cdot\mathrm{g}_{\bar{\imath}j}=\frac{R}{n(n+2)}F_{ji}$$

$$\varphi_{\bar{\imath}j}=-\frac{1}{n+2}R_{ij}=-\frac{1}{n+2}\cdot\frac{R}{n}\cdot\mathrm{g}_{ij}=-\frac{R}{n(n+2)}\mathrm{g}_{ij}$$

Підставимо отримані вирази в (3.3.15):

$$R_{hijk}= \qquad (3.3.17)$$

$$\frac{1}{n+2}\cdot\frac{R}{n}\left[\mathrm{g}_{hk}\mathrm{g}_{ij}-\mathrm{g}_{hj}\mathrm{g}_{ik}-2F_{hi}F_{jk}-F_{hk}F_{ji}+F_{hj}F_{ki}\right]$$

Позначимо

$$\frac{1}{n+2}\cdot\frac{R}{n}=K$$

і формула (3.3.17) прийме вид:

$$R_{hijk}= \qquad (3.3.18)$$

$$K\left[g_{hk}g_{ij}-g_{hj}g_{ik}-2g_{h\bar{\imath}}g_{j\bar{k}}-g_{h\bar{k}}g_{j\bar{\imath}}+g_{h\bar{\jmath}}g_{k\bar{\imath}}\right]$$

Розглянемо одну із властивостей тензора кривини R_{hijk} – диференціальну тотожність Біанкі:

$$R_{hi(jk,l)}=R_{hijk,l}+R_{hikl,j}+R_{hilj,k}=0$$

де (j,k,l) – результат циклювання .

Застосуємо диференціальну тотожність Біанкі до тензора кривизни (3.3.18):

$$K_{,l}\left(g_{hk}g_{ij}-g_{hi}g_{ik}-2g_{h\bar{\imath}}g_{j\bar{k}}-g_{h\bar{k}}g_{j\bar{\imath}}+g_{h\bar{\jmath}}g_{k\bar{\imath}}\right)+$$
$$+K_{,j}(g_{hl}g_{ik}-g_{hk}g_{il}-2g_{h\bar{\imath}}g_{k\bar{l}}-g_{h\bar{l}}g_{k\bar{\imath}}+g_{h\bar{k}}g_{l\bar{\imath}})+$$
$$+K_{,k}\left(g_{hj}g_{il}-g_{hl}g_{ij}-2g_{h\bar{\imath}}g_{l\bar{\jmath}}-g_{h\bar{\jmath}}g_{l\bar{\imath}}+g_{h\bar{l}}g_{j\bar{\imath}}\right)=0$$

Згорнемо цю рівність с g^{hk}:

$$K_{,l}\left(ng_{ij}-g_{ij}+2g_{\bar{\jmath}\bar{\imath}}-0+g_{ij}\right)+$$
$$+K_{,j}(g_{il}-ng_{il}-2g_{il}-g_{li}+0)+$$
$$+K_{,j}g_{il}-K_{,l}g_{ij}-2K_{,\bar{\imath}}g_{l\bar{\jmath}}-K_{,\bar{\jmath}}g_{l\bar{\imath}}+K_{,\bar{l}}g_{j\bar{\imath}}=0$$

і далі ще раз згорнемо с g^{ij}:

$$K_{,l}\cdot n(n+2)-K_{,l}(n+2)+K_{,l}-nK_{,l}-2K_{,l}-K_{,l}+0=0$$

Зведемо подібні:

$$(n^2-4)K_{,l}=0$$

Отже якщо $n\neq 2$, то $K_{,l}=0$, тобто $K=const.$

Тоді після коваріантного диференціювання (3.3.18) маємо:

$$R_{hijk,l}=0, \qquad (3.3.19)$$

Тому наш еліптично келеровий простір − симетричний.

Ми довели теорему:

Теорема 3.3.1. Якщо еліптично келеровий простір K_n допускає канонічне $F-$ планарне відображення на плоский простір афінної зв'язності A_n, то він є симетричним, тобто

$$R_{hijk,l}=0,$$

і його тензор кривини має вигляд

$$R_{hijk}=K\left[g_{hk}g_{ij}-g_{hj}g_{ik}-2g_{h\bar{i}}g_{j\bar{k}}-g_{h\bar{k}}g_{j\bar{i}}+g_{h\bar{j}}g_{k\bar{i}}\right].$$

3.4. ОСОБЛИВОСТІ КАНОНІЧНОГО F – ПЛАНАРНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ГІПЕРБОЛІЧНО КЕЛЕРОВОГО ПРОСТОРУ НА ПЛОСКИЙ ПРОСТІР АФІННОЇ ЗВ'ЯЗНОСТІ

Нагадаємо, що тотожність Річчі для афінора гіперболічно келерового простору має вигляд

$$-R^{h}_{\bar{i}jk} + R^{\bar{h}}_{ijk} = 0, \tag{3.4.1}$$

а для тензора Рімана гіперболічно келерового простору, який допускає канонічне F-планарне відображення на плоский простір афінної зв'язності, ми раніше отримали:

$$R^{h}_{ijk} = -\delta^{h}_{k}\varphi_i\varphi_j + \delta^{h}_{j}\varphi_i\varphi_k -$$
$$-F^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) - F^{h}_{k}\varphi_{ij} + F^{h}_{j}\varphi_{ik} \tag{3.4.2}$$

Підставимо (3.4.2) в тотожність Річчі для афінора F^{h}_{i}:

$$R^{\bar{h}}_{ijk} = -F^{h}_{k}\varphi_i\varphi_j + F^{h}_{j}\varphi_i\varphi_k -$$

$$-\delta^{h}_{i}\left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) - \delta^{h}_{k}\varphi_{ij} + \delta^{h}_{j}\varphi_{ik},$$

$$R^{h}_{\bar{i}jk} = -\delta^{h}_{k}\varphi_{\bar{i}}\varphi_j + \delta^{h}_{j}\varphi_{\bar{i}}\varphi_k -$$

$$-\delta_i^h(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}) - F_k^h \varphi_{\bar{\imath}j} + F_j^h \varphi_{\bar{\imath}k}$$

$$-R_{\bar{\imath}jk}^h + R_{ijk}^{\bar{h}} = \delta_k^h \varphi_{\bar{\imath}} \varphi_j - \delta_j^h \varphi_{\bar{\imath}} \varphi_k + \delta_i^h \left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) +$$
$$+F_k^h \varphi_{\bar{\imath}j} - F_j^h \varphi_{\bar{\imath}k} - F_k^h \varphi_i \varphi_j + F_j^h \varphi_i \varphi_k -$$
$$-\delta_i^h(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}) - \delta_k^h \varphi_{ij} + \delta_j^h \varphi_{ik} = 0$$

Після зведення подібних знаходимо:

$$0 = +\delta_k^h(-\varphi_{\bar{\imath}} \varphi_j + \varphi_{ij}) - \delta_j^h(-\varphi_{\bar{\imath}} \varphi_k + \varphi_{ik}) +$$
$$-F_k^h(\varphi_{\bar{\imath}j} - \varphi_i \varphi_j) + F_j^h(\varphi_{\bar{\imath}k} - \varphi_i \varphi_j) \, . \qquad (3.4.3)$$

Якщо позначити

$$\left.\begin{aligned} C_{ij} &= \varphi_{ij} - \varphi_{\bar{\imath}} \varphi_j \\ C_{\bar{\imath}j} &= \varphi_{\bar{\imath}j} - \varphi_i \varphi_j \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.4)$$

то попереднє співвідношення прийме вигляд

$$\delta_k^h C_{ij} - \delta_j^h C_{ik} - F_k^h C_{\bar{\imath}j} + F_j^h C_{\bar{\imath}k} = 0 \qquad (3.4.5)$$

Згорнемо (3.4.5) за h, k (тобто $h = k = \alpha$) і отримаємо

$$nC_{ij} - C_{ij} - 0 + C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = 0$$

або

$$(n-1)C_{ij} + C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = 0 \tag{3.4.6}$$

Виконаємо тут сполучення за індексами i, j:

$$(n-1)C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} + C_{ij} = 0$$

Додамо два останніх рівняння:

$$n\left(C_{ij} + C_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}\right) = 0$$

Тоді при $n \neq 2$ із (3.4.6) витікає

$$C_{ij} = 0$$

Отже

$$\varphi_{ij} - \varphi_{\bar{\imath}}\varphi_j = 0$$

і (3.4.4) дають нам

$$\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_j = \varphi_{ij}$$

і

$$\varphi_{\bar{\imath}}\varphi_{\bar{\jmath}} = \varphi_{i\bar{\jmath}}.$$

Звідси зокрема

$$\left.\begin{matrix}\varphi_{\bar{\imath}j} = \varphi_{\bar{\jmath}i} \\ \varphi_{i\bar{\jmath}} = \varphi_{j\bar{\imath}}\end{matrix}\right\} \qquad (3.4.7)$$

(так як $\varphi_i \varphi_j = \varphi_j \varphi_i \quad \varphi_{\bar{\imath}} \varphi_{\bar{\jmath}} = \varphi_{\bar{\jmath}} \varphi_{\bar{\imath}}$)

Тепер (3.4.2) набуває вигляду:

$$R_{ijk}^{h} = -\delta_k^h \varphi_{\bar{\imath}j} + \delta_j^h \varphi_{\bar{\imath}k} -$$

$$-F_i^h \left(\varphi_{kj} - \varphi_{jk}\right) - F_k^h \varphi_{ij} + F_j^h \varphi_{ik} \qquad (3.4.8)$$

Згорнемо тут по h і k:

$$R_{ij} = -n\varphi_{\bar{\imath}j} + \varphi_{\bar{\imath}j} - \left(\varphi_{\bar{\imath}j} - \varphi_{j\bar{\imath}}\right) - 0 + \varphi_{i\bar{\jmath}}$$

звідси на підставі (3.4.7) випливає

$$R_{ij} = -n\varphi_{\bar{\imath}j} + 2\varphi_{i\bar{\jmath}} \qquad (3.4.9)$$

Тепер (3.4.9) згорнемо с g^{ij} і отримаємо з огляду на те, що

$$R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R,$$

$$R = -(n+2)\varphi_{\overline{\alpha}\beta}g^{\alpha\beta} \qquad (3.4.10)$$

$R -$ скалярна кривина простору V_n .

Зауважимо, що

$$\varphi_{i\bar{j}}g^{ij} = \varphi_{ij}g^{i\bar{j}} = -\varphi_{ij}g^{\bar{i}\bar{j}} = -\varphi_{\bar{i}j}g^{ij}$$

В (3.4.9) поставимо рисочки над $\overline{ij}$:

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = -n\varphi_{i\bar{j}} + 2\varphi_{\bar{i}j} \qquad (3.4.11)$$

Зауважимо, що в гіперболічно келеровому просторі

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = -R_{ij},$$

Додаючі (3.4.9) до (3.4.11) з урахуванням (3.4.7), маємо:

$$0 = -n\varphi_{i\bar{j}} + 2\varphi_{\bar{i}j} + \left(-n\varphi_{\bar{i}j} + 2\varphi_{i\bar{j}}\right),$$

$$(n-2)\left(\varphi_{i\bar{j}} + \varphi_{\bar{i}j}\right) = 0$$

Звідси

$$\varphi_{i\bar{j}} = -\varphi_{\bar{\imath}j}$$

Тепер (3.4.9) дають нам

$$R_{ij} = -(n+2)\varphi_{\bar{\imath}j} \qquad (3.4.12)$$

$$\varphi_{\bar{\imath}j} = -\frac{1}{n+2}R_{ij}$$

і тому

$$\varphi_{ij} = -\frac{1}{n+2}R_{\bar{\imath}j} \qquad (3.4.13)$$

Підставимо (3.4.13) в (3.4.8) і отримаємо:

$$R^h_{ijk} = \qquad (3.4.14)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[\delta^h_k R_{ij} - \delta^h_j R_{ik} + 2F^h_i R_{\bar{k}j} + F^h_k R_{\bar{\imath}j} - F^h_j R_{\bar{\imath}k}\right]$$

Опустимо індекс h вниз:

$$\mathrm{g}_{h\alpha}R^{\alpha}_{ijk} = R_{hijk} = \qquad (3.4.15)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[\mathrm{g}_{hk}R_{ij} - \mathrm{g}_{hj}R_{ik} + 2F_{hi}R_{\bar{k}j} + F_{hk}R_{\bar{\imath}j} \pm R_{\bar{\imath}k}\right]$$

Тепер згорнемо (3.4.15) с g^{ij}:

$$R_{hk} = \frac{1}{n+2}[Rg_{hk} - R_{hk} + 2R_{kh} + 0 - R_{hk}]$$

Звідси знаходимо:

$$R_{hk} = \frac{R}{n} g_{hk} \tag{3.4.16}$$

а із (3.4.13)

$$\varphi_{ij} = -\frac{1}{n+2} R_{\bar{\imath}j} = -\frac{1}{n+2} \cdot \frac{R}{n} \cdot g_{\bar{\imath}j} = -\frac{R}{n(n-2)} F_{ji}$$

$$\varphi_{\bar{\imath}j} = -\frac{1}{n+2} R_{ij} = -\frac{1}{n+2} \cdot \frac{R}{n} \cdot g_{ij} = -\frac{R}{n(n+2)} g_{ij}$$

Підставимо отримані вирази в (3.4.15):

$$R_{hijk} = \tag{3.4.17}$$

$$\frac{1}{n+2} \cdot \frac{R}{n} \left[g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik} + 2F_{hi}F_{jk} + F_{hk}F_{ji} - F_{hj}F_{ki}\right]$$

Позначимо

$$\frac{1}{n+2} \cdot \frac{R}{n} = K$$

і формула (3.4.17) прийме вид:

$$R_{hijk} = \tag{3.4.18}$$

$$K\left[g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik} + 2g_{h\bar{\imath}}g_{j\bar{k}} + g_{h\bar{k}}g_{j\bar{\imath}} - g_{h\bar{\jmath}}g_{k\bar{\imath}}\right]$$

Розглянемо одну із властивостей тензора кривини R_{hijk} – диференціальну тотожність Біанкі:

$$R_{hi(jk,l)} = R_{hijk,l} + R_{hikl,j} + R_{hilj,k} = 0$$

де (j, k, l) – результат циклювання .

Застосуємо диференціальну тотожність Біанкі до тензора кривизни (3.4.18):

$$K_{,l}\left(g_{hk}g_{ij} - g_{hi}g_{ik} + 2g_{h\bar{\imath}}g_{j\bar{k}} + g_{h\bar{k}}g_{j\bar{\imath}} - g_{h\bar{\jmath}}g_{k\bar{\imath}}\right) +$$
$$+K_{,j}(g_{hl}g_{ik} - g_{hk}g_{il} + 2g_{h\bar{\imath}}g_{k\bar{l}} + g_{k\bar{\imath}} - g_{h\bar{k}}g_{l\bar{\imath}}) +$$
$$+K_{,k}\left(g_{hj}g_{il} - g_{hl}g_{ij} + 2g_{h\bar{\imath}}g_{l\bar{\jmath}} + g_{h\bar{\jmath}}g_{l\bar{\imath}} - g_{h\bar{l}}g_{j\bar{\imath}}\right) = 0$$

Згорнемо цю рівність с g^{hk}:

$$K_{,l}\left(ng_{ij} - g_{ij} + 2g_{\overline{j\imath}} + 0 + g_{ij}\right) +$$

$$+K_{,j}(g_{il} - ng_{il} - 2g_{il} - g_{li} - 0) +$$

$$+K_{,j}g_{il} - K_{,l}g_{ij} + 2K_{,\bar{\imath}}g_{l\bar{\jmath}} + g_{l\bar{\imath}} - K_{,\bar{l}}g_{j\bar{\imath}} = 0$$

і далі ще раз згорнемо с g^{ij}:

$$K_{,l} \cdot n(n+1) - K_{,l}(n+1) - 2K_{,l} - K_{,l} - 0 = 0$$

Зведемо подібні:

$$(n^2 - 4)K_{,l} = 0$$

Отже якщо $n \neq 2$, то $K_{,l} = 0$, тобто $K = const$.

Тоді після коваріантного диференціювання (3.4.18) маємо:

$$R_{hijk,l} = 0, \qquad (3.4.19)$$

Тому наш гіперболічно келеровий простір – симетричний.

Ми довели теорему:

Теорема 3.4.1. Якщо гіперболічно келеровий простір K_n допускає канонічне $F -$ планарне відображення на плоский простір афінної зв'язності A_n, то він є симетричним, тобто

$$R_{hijk,l} = 0,$$

і його тензор кривини має вигляд

$$R_{hijk} = K\left[g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik} + 2g_{h\bar{\imath}}g_{j\bar{k}} + g_{h\bar{k}}g_{j\bar{\imath}} - g_{h\bar{\jmath}}g_{k\bar{\imath}}\right].$$

3.5. МЕТРИКА ЕЛІПТИЧНИХ І ГІПЕРБОЛІЧНИХ КЕЛЕРОВИХ КАНОНІЧНО F-ПЛОСКИХ ПРОСТОРІВ.

У келеровому просторі K_n поряд з класичною кривизною риманова простору в даній точці для даного двовимірного напрямку розглядається ***голоморфна кривизна***, яка є кривизною в точці $M(x)$ для двовимірного напрямку, що визначається векторами λ^h і $\lambda^\alpha F_\alpha^h \equiv \lambda^{\bar{h}}$:

$$k = \frac{R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\lambda^\alpha\lambda^{\bar{\beta}}\lambda^\gamma\lambda^{\bar{\delta}}}{(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}-g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\lambda^\alpha\lambda^{\bar{\beta}}\lambda^\gamma\lambda^{\bar{\delta}}} \tag{3.5.1}$$

Келеровий простір називається ***простором сталої голоморфної кривизни***, якщо його голоморфна кривизна не залежить ні від точки, ні від напрямку λ^h. З (3.5.1) випливає, що K_n $(n > 2)$ є простором сталої голоморфної кривизни k тоді і тільки тоді, коли його тензор кривизни представляється у вигляді

$$R_{hijk} = KG_{hijk}, \tag{3.5.2}$$

де $G_{hijk} = g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij} - eg_{h\bar{j}}g_{i\bar{k}} + eg_{h\bar{k}}g_{i\bar{j}} - 2eg_{h\bar{i}}g_{j\bar{k}}$,

$$K = \frac{k}{4}.$$

Вираз тензора Рімана, який ми отримали для еліптично і гіпербрлічно келерового простору, який допускає канонічне $F -$

планарне відображення на плоский простір афінної зв'язності A_n, співпадає з (3.5.2) (при $e = -1$ - (3.3.18) і $e = +1$ - (3.4.18)). Отже канонічно F −плоскі келерові простори еліптичного і гіперболічного типу є просторами сталої голоморфної кривини.

Ми також довели, що K стала і тому має місце умова

$$R^h_{ijk,l} = 0.$$

Ріманові простори, у яких виконується ця умова, є симетричними просторами.

Для симетричних просторів П. О. Широков отримав таку формулу для відновлення метричного тензора в околі деякої точки $M(x_0)$ ріманового простору:

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{(2k+2)!} m^{(k)}_{ij}, \qquad (3.5.3)$$

де

$$m^{(1)}_{ij} = m_{ij}, \quad m^{(k+1)}_{ij} = m^{(k)}_{i\alpha} m_{\beta j} \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}, \quad m_{ij} = \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta} y^\alpha y^\beta,$$

$\overset{\circ}{g}_{ij}, \overset{\circ}{g}^{ij}, \overset{\circ}{R}_{i\alpha j\beta}$ – значення компонент метричного, йому зворотного і Ріманова тензорів точці x_0, y^h – ріманові координати в точці x_0.

На підставі цих формул легко переконатися, що метричний тензор g_{ij} просторів сталої голоморфної кривизни має вигляд:

$$\begin{gathered} g_{ij} = \frac{2}{ky}\overset{\circ}{g}_{ij}\left(1 - \cos\sqrt{ky}\right) + \\ +\frac{1}{y} y_i y_j \left(1 - \frac{2}{ky}\left(1 - \cos\sqrt{ky}\right)\right) + \\ +\frac{e}{y}\bar{y}_i\bar{y}_j \frac{1}{2ky}\left(3 + \cos 2\sqrt{ky} - 4\cos\sqrt{ky}\right), \end{gathered} \tag{3.5.4}$$

де

$$y = \overset{\circ}{g}_{ij} y^i y^j, \quad y_i = \overset{\circ}{g}_{i\alpha} y^{\alpha}, \qquad \bar{y}_i = y_{\alpha}\overset{\circ}{F}{}_i^{\alpha},$$

$\overset{\circ}{F}{}_i^h -$ компоненти структурного тензора F_i^h у точці x_0.

Примітка: а) Якщо у формулах (3.5.4) підкорені вирази негативні, використовуємо відому формулу, що зв'язує косинус і гіперболічний косинус: $\cos i\varphi = \cosh \varphi$.

Далі шукатимемо компоненти тензора g^{ij}, зворотного метричному тензору g_{ij}. Тензор g_{ij} має вигляд:

$$\mathrm{g}_{ij} = A\overset{\circ}{\mathrm{g}}_{ij} + By_iy_j + C\bar{y}_i\bar{y}_j \tag{3.5.5}$$

де

$$A = \frac{2}{ky}\left(1 - \cos\sqrt{ky}\right);$$

$$B = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{2}{ky}\left(1 - \cos\sqrt{ky}\right)\right);$$

$$C = \frac{e}{y}\frac{1}{2ky}\left(3 + \cos 2\sqrt{ky} - 4\cos\sqrt{ky}\right).$$

Нехай

$$\mathrm{g}^{ij} = \tfrac{1}{A}\overset{\circ}{\mathrm{g}}{}^{ij} + \alpha y^iy^j + \beta\bar{y}^i\bar{y}^j + \gamma\left(y^i\bar{y}^j + \bar{y}^iy^j\right) \tag{3.5.6}$$

Підставимо (3.5.5) та (3.5.6) в формулу

$$\mathrm{g}^{i\alpha}\mathrm{g}_{\alpha j} = \delta_j^i \tag{3.5.7}$$

$$\mathrm{g}^{i\alpha}\mathrm{g}_{\alpha j} = \delta_j^i + \left(\alpha A + \frac{B}{A} + \alpha By\right)y^iy_j +$$

$$+\left(\beta A + \frac{C}{A} + e\beta Cy\right)\bar{y}^i\bar{y}_j +$$

$$+(A\gamma + C\gamma y)y^i\bar{y}_j + (A\gamma + B\gamma y)\bar{y}^iy_j = \delta_j^i$$

Звідси отримаємо систему лінійних рівнянь відносно α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha A + \frac{B}{A} + \alpha B y = 0 \\ \beta A + \frac{C}{A} + e\beta C y = 0 \\ \left.\begin{matrix} A\gamma + C\gamma y = 0 \\ A\gamma + B\gamma y = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha A + \frac{B}{A} + \alpha B y = 0 \\ \beta A + \frac{C}{A} + e\beta C y = 0 \\ \gamma y (C - B) = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему з трьох рівнянь, ми знаходимо наступні значення:

$$\alpha = -\frac{B}{A(A + By)};$$

$$\beta = -\frac{C}{A(A + eCy)};$$

$$\gamma = 0$$

Підставимо ці значення в (3.5.6) і отримаємо:

$$\mathrm{g}^{ij} = \frac{1}{A}\overset{\circ}{\mathrm{g}}{}^{ij} - \frac{B}{A(A + By)} y^i y^j - \frac{C}{A(A + eCy)} \bar{y}^i \bar{y}^j$$

$$\mathrm{g}^{ij} = \frac{1}{A}\overset{\circ}{\mathrm{g}}{}^{ij} - \frac{B}{A(A+By)} y^i y^j - \frac{C}{A(A+eCy)} \bar{y}^i \bar{y}^j,$$

де $\bar{y}^i = y^\alpha \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}^i_\alpha$.

ВИСНОВКИ

Основні результати моєї роботи такі:

- доведено, що структура тензора кривини канонічно F – плоского келерового простору має вигляд:

$$R_{hijk} = K\left(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij} - e\mathrm{F}_{hj}\mathrm{F}_{ik} + e\mathrm{F}_{hk}\mathrm{F}_{ij} - \mathrm{F}_{hi}\mathrm{F}_{jk}\right),$$

зокрема, канонічно F – плоскі келерові простори обов'язково являються просторами сталої голоморфної кривини K, а також симетричними просторами;

- знайдено всі метрики канонічно F – плоских келерових просторів в спеціальній системі координат.
- знайдено компоненти тензора g^{ij}, зворотного метричному тензору g_{ij} канонічно F – плоского келерового простору у вигляді:

$$g^{ij} = \frac{1}{A}\overset{\circ}{g}{}^{ij} - \frac{B}{A(A+By)}y^i y^j - \frac{C}{A(A+eCy)}\bar{y}^i\bar{y}^j,$$

де $\bar{y}^i = y^\alpha \overset{\circ}{\mathrm{F}}{}^i_\alpha$.

ЛІТЕРАТУРА.

1. Курбатова І.М. Диференціальна геометрія: метод. посіб. Одеса: ОНУ, 2020. 66с.
2. Курбатова І.М., Шарай Н.В. Голоморфно-проективні відображення келерових просторів: метод.посіб. Одеса: ОНУ, 2024. 69с.
3. Лейко С.Г. Топологія: конспект лекцій. Одеса: ОНУ, Астропринт, 2006, 124с.
4. Лейко С.Г., Диференціальна геометрія: конспект лекцій. Одеса, ОНУ, Астропринт, 1999. 114с.
5. Пришляк О., Лукова Н. Диференціальна геометрія і топологія: курс лекцій. Київ, КНУ, 2011,120с.
6. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія: навч.посіб. Київ, КНУ, 2004.120с.
7. О.О.Пришляк. Диференціальна топологія: метод. пос./ К.: ВЦ ì Київський університетî, 2000. 40с.
8. Josef Mikes, Alena Vanzurova, Irina Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations: monograph. Olomouc, Palacky University Press, 2009.p.304.
9. Josef Mikes, Volosdymyr Kiosak, Alena Vanzurova. Geodesic Mappings of Manifolds with affine connection: monograph. Olomouc, Palacky University Press, 2008.p.220.
10. Josef Mikes, Elena Stepanova, Alena Vanzurova. Differential Geometry of Special Mappings: monograph. Olomouc, Palacky University Press, 2015.p.570.
11. Олена Дажук (ОНУ, Одеса, Україна), Ірина Курбатова (ОНУ, Одеса, Україна), Ольга Яблокова (ОНУ, Одеса, Україна). Узагальнені аналоги теореми Яно-Вестлейка. *International Scientific Conference Algebraic and Geometric Methods of*

Analysis: тез.доп., м.Одеса, 27-30 травня 2024 р./ Одеськ. нац. технолог. ун-т. Одеса, 2024. С.136.
URL: https://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf

12. Ольга Яблокова (ОНУ, Одеса, Україна), Ірина Курбатова (ОНУ, Одеса, Україна), Олена Дажук (ОНУ, Одеса, Україна). Канонічні F-планарні відображення. *International Scientific Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis:* тез.доп., м.Одеса, 27-30 травня 2024 р./ Одеськ. нац. технолог. ун-т. Одеса, 2024. С.144.
URL: https://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2024/agma2024-theses.pdf