

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. І. МЕЧНИКОВА

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра математичного аналізу

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

«Диференціальні властивості максимальної функції»

«Differential properties of the maximal function»

Виконала: здобувачка денної форми навчання
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Шихова Олена Віталіївна

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Шанін Р. В.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,
проф. Кореновський А. О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2023 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2023 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2023 р.

Зміст

Вступ	3
1 Означення і попередні результати	5
1.1 Властивості інтеграла Лебега і максимальна функція	5
1.2 Згортка та слабка похідна	9
2 Неперервність та максимальна функція	15
2.1 Умови неперервності максимальних функцій	15
2.2 Обмежена варіація і неперервність максимальної функції . . .	23
2.3 Характер точок розриву максимальної функції	27
2.4 Поведінка максимальної функції у точках розриву	32
3 Диференціальні властивості максимальної функції	36
3.1 Простори Соболева	36
3.2 Диференціальні властивості односторонніх максимальних функцій	41
3.3 Обмеженість максимального оператора у просторах Соболева	46
Висновки	51
Список літератури	52

Вступ

В роботі вивчаються диференціальні властивості максимальних функцій Гарді — Літлвуда.

Актуальність теми. Максимальна функція Mf вперше була розглянута в одновимірному випадку в роботі Гарді та Літлвуда 1930 року. В 1939 році у роботі Вінера ця функція була узагальнена на багатовимірний випадок. Наразі різні варіації максимальної функції мають численні застосування в різних розділах математики: теорії функцій, теорії операторів, гармонічному аналізі, тощо.

У середині 1930-х років Сергій Львович Соболев представив деякі функціональні простори, які стали дуже важливими для розвитку диференціальних рівнянь в частинних похідних, головним чином тих, що стосуються механіки неперервних середовищ та фізики. Ці простори зараз називаються просторами Соболева і застосовуються в диференціальних рівняннях в частинних похідних, математичній фізиці, гармонічному аналізі, теорії узагальнених функцій, тощо.

Мета та завдання роботи. Метою роботи є вивчення властивостей різних варіантів максимальної функції Гарді — Літлвуда, пов'язаних з неперервністю та диференційовністю. Досягненню мети сприяють наступні основні задачі магістерської роботи:

- 1) навести достатні умови неперервності максимальної функції та побудувати приклади, які показують, що ці умови не є необхідними;
- 2) навести критерій неперервності максимальної функції та побудувати приклади, що ілюструють і пояснюють умови цього критерію;
- 3) охарактеризувати поведінку максимальної функції в точках розриву та навести відповідні приклади;
- 4) дослідити поведінку максимальної функції в просторі функцій з обмеженою варіацією та побудувати відповідні приклади;
- 5) довести теореми про обмеженість максимального оператора в просторах Соболева та побудувати приклади, що ілюструють доведені теореми.

Структура роботи. Магістерська робота, загальним обсягом 52 сторінки, складається з вступу, трьох розділів, які поділяються на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, що містить 7 найменувань.

У першому розділі наведено основні результати, які знадобляться у подальшому.

У другому розділі наведені достатні умови неперервності максимальної функції та побудовані приклади, які показують, що ці умови не є необхідними; доведені критерії неперервності центрованої та нецентрованої максимальних функцій. Доведена теорема про характер точок розриву максимальної функції, розглянута поведінка максимальної функції у точках розриву, доведені достатні умови неперервності максимальної функції в одній точці в термінах функцій з обмеженою варіацією.

У третьому розділі сформульовано визначення простору Соболева $W^{1,p}$, розглянуті основні його властивості, наведені приклади. Доведена теорема про неперервність односторонніх максимальних функцій Гарді — Літлвуда у просторі $W^{1,1}(\mathbb{R})$, доведені теореми про обмеженість максимального оператора в просторах Соболева $W^{1,p}$.

РОЗДІЛ 1

Означення і попередні результати

1.1 Властивості інтеграла Лебега і максимальна функція

Нагадаємо деякі основні поняття та результати, що знадобляться для подальшого викладу.

Означення 1.1. Вимірна за Лебегом на множині $E \subseteq \mathbb{R}^n$ функція f називається локально сумовною на E та позначається $f \in L_{loc}(E)$, якщо f сумовна на всіх компактних підмножинах E .

Означення 1.2. Нехай функція $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Її нецентрована Mf та центрована $M_c f$ максимальні функції Гарді — Літлвуда визначаються наступним чином

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \right),$$

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \right),$$

де $B(x,r)$ — куля радіуса r з центром в точці x , а $|B(x,r)|$ — її міра.

Між центрованою та нецентрованою максимальними функціями Гарді — Літлвуда для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконується наступне очевидне співвідношення:

$$M_c f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n M_c f(x). \quad (1.1)$$

Елементарні властивості Mf сформульовані у наступній теоремі, яку ми наводимо без доведення.

Теорема 1.1. *Оператор Mf має наступні властивості:*

- 1) $Mf(x) \geq 0$ для будь-яких $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
- 2) *субадитивність:* для будь-яких $f_1, f_2 \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$M(f_1 + f_2)(x) \leq M(f_1)(x) + M(f_2)(x);$$

3) *додатна однорідність*: $M(\lambda f) = |\lambda| Mf$ для будь-яких $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ та $\lambda \in \mathbb{R}$.

Нагадаємо, що функція f називається напівнеперервною знизу на $\mathbb{R}$, якщо множина $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \lambda\}$ відкрита для будь-якого λ (див. [1, р. 229, Означення 5.5.1]).

В наступній лемі показано, що максимальні функції напівнеперервні знизу.

Лема 1.1. *Нехай $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Тоді функції Mf і M_cf напівнеперервні знизу.*

Доведення. Доведемо лему спочатку для функції Mf . Оскільки $Mf(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то достатньо показати, що множина

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$$

відкрита для будь-якого $\lambda \geq 0$. Нехай $x \in E_\lambda$. Потрібно показати, що існує така куля B_x , що $x \in B_x \subseteq E_\lambda$. Оскільки $x \in E_\lambda$, то $Mf(x) > \lambda$ і, отже, існує така куля B_0 , що $x \in B_0$ і

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \right) \geq \frac{1}{|B_0|} \int_{B_0} |f(t)| dt > \lambda.$$

Покладемо $B_x = B_0$. Тоді для будь-якого $z \in B_x$ маємо

$$Mf(z) = \sup_{B \ni z} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \right) \geq \frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(t)| dt > \lambda.$$

Це означає, що $B_x \subseteq E_\lambda$. Таким чином, Mf напівнеперервні знизу.

Покажемо тепер, що M_cf напівнеперервні знизу. Оскільки $M_cf(x) \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то достатньо показати, що множина

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_cf(x) > \lambda\}$$

відкрита для будь-якого $\lambda \geq 0$. Нехай $x \in E_\lambda$. Потрібно показати, що існує така куля $B_x = B(x, r_x)$, що $B_x \subseteq E_\lambda$. Оскільки $x \in E_\lambda$, то $M_cf(x) > \lambda$ і,

отже, існує таке $r > 0$, що

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy > \lambda.$$

Оберемо $r_1 > r$ так, щоб виконувалося

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy > \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy > \lambda.$$

Покладемо $r_x = r_1 - r > 0$ і покажемо, що $B_x = B(x, r_x) \subseteq E_\lambda$.

Нехай $z \in B_x$. Тоді виконується нерівність $|z - x| < r_x = r_1 - r$. Покажемо, що $B(x, r) \subset B(z, r_1)$. Справді, нехай $y \in B(x, r)$. Тоді

$$|y - z| \leq |y - x| + |x - z| < r + (r_1 - r) = r_1$$

і, таким чином, $y \in B(z, r_1)$. Звідси випливає, що $B(x, r) \subset B(z, r_1)$ і

$$\begin{aligned} Mf(z) &= \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|B(z, r)|} \int_{B(z, r)} |f(y)| dy \right) \geq \frac{1}{|B(z, r_1)|} \int_{B(z, r_1)} |f(y)| dy \\ &> \frac{1}{|B(x, r_1)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy > \lambda. \end{aligned}$$

Таким чином, $B_x \subseteq E_\lambda$ і лема доведена повністю. $\square$

Відома теорема Гарді, Літлвуда і Вінера, доведення якої можна знайти у [6, с. 15], стверджує наступне:

Теорема 1.2 (Максимальна теорема). *Якщо $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, де $1 < p \leq \infty$, то Mf також належить $L^p(\mathbb{R}^n)$ та виконується нерівність*

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad (1.2)$$

де C_p — константа, що залежить тільки від p та від розмірності n . Якщо $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то для будь-якого $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx,$$

де константа C залежить тільки від розмірності n .

Зауваження 1.1. Важливо зазначити, що теорема 1.2 справедлива також і для центрованої максимальної функції завдяки нерівності (1.1).

Означення 1.3. Нехай функція $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$. Тоді її лівостороння та правостороння максимальні функції Гарді — Літлвуда визначаються наступним чином:

$$M_l f(x) = \sup_{s>0} \left(\frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy \right),$$

$$M_r f(x) = \sup_{t>0} \left(\frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(y)| dy \right).$$

Для односторонніх максимальних функцій справедливо наступне співвідношення.

Твердження 1.1. Нехай $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Тоді

$$Mf(x) = \max \{M_l f(x), M_r f(x)\}.$$

Доведення. З одного боку, маємо очевидні нерівності

$$M_l f(x) \leq Mf(x) \text{ і } M_r f(x) \leq Mf(x),$$

з яких випливає, що $Mf(x) \geq \max \{M_l f(x), M_r f(x)\}$. З іншого боку, для $s, t > 0$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+t} \int_{x-s}^{x+t} |f(y)| dy &= \frac{s}{s+t} \cdot \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy + \frac{t}{s+t} \cdot \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{s}{s+t} M_l f(x) + \frac{t}{s+t} M_r f(x) \\ &\leq \max \{M_l f(x), M_r f(x)\}, \end{aligned}$$

звідки випливає, що $Mf(x) \leq \max \{M_l f(x), M_r f(x)\}$. Отже,

$$Mf(x) = \max \{M_l f(x), M_r f(x)\}.$$

□

Більш детально деякі властивості односторонніх максимальних функцій буде розглянуто у розділі 3.

В подальшому нам знадобиться наступна теорема, доведення якої можна знайти у [3, с. 95].

Теорема 1.3 (Теорема Лебега про диференціювання інтегралів). *Для будь-якої локально інтегровної функції f на $\mathbb{R}^n$ справедлива наступна рівність*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x)$$

для майже всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Зауваження 1.2. Одне із перших і важливих застосувань максимальної функції Гарді — Літлвуда полягало саме в доведенні теореми 1.3.

1.2 Згортка та слабка похідна

Далі сформулюємо ряд визначень та результатів, на які будуть опиратися доведення теорем у наступних розділах.

Означення 1.4. Згорткою функцій u і v називається наступна функція

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)v(y) dy.$$

Означення 1.5. Функція $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається ліпшицевою, якщо існує така стала C , що нерівність

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

виконується для всіх $x, y \in \Omega$. Найменша з таких сталих C називається сталою Ліпшиця для функції f на Ω . Функція f називається локально ліпшицевою, якщо вона є ліпшицевою на кожному компактi $K \subset \Omega$.

Означення 1.6. Нехай функцій f визначена в області Ω і

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\}}.$$

Якщо $\text{supp } f \subset \Omega$, то кажуть, що функція f має компактний носій в Ω . Якщо функція нескінченно диференційовна і має компактний носій в Ω , то будемо писати $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Елементи простору $C_0^\infty(\Omega)$ називають тестовими функціями.

Приклад 1.1. Функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4-x^2}}, & \text{якщо } x \in (-2; 2), \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-2; 2) \end{cases}$$

має компактний носій, $\text{supp } f = [-2; 2]$, і є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$, тобто $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Графік $f(x)$ показано на рисунку 1.

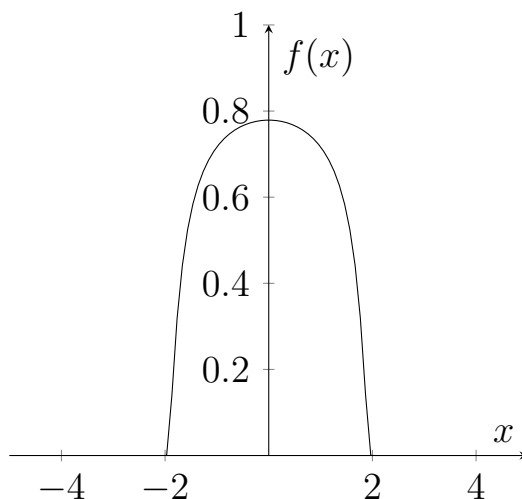


Рис. 1

Означення 1.7. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, де α_i — невід’ємні цілі числа, називається мультиіндексом. Довжиною $|\alpha|$ мультиіндекса α називається

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Якщо $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то позначимо

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

та

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Означення 1.8. Нехай область $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ та α — мультиіндекс. Якщо для кожної функції $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ виконується рівність

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi(x) v(x) dx,$$

то функцію $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ називають слабкою похідною функції f порядку α і позначають $v = D^\alpha f = f_\alpha$. У одновимірному випадку, коли $\alpha = 1$ будемо писати $D^1 f = Df$.

Зауваження 1.3. Зазначимо, що якщо функція диференційовна, то вона має слабку похідну, яка дорівнює звичайній похідній. Проте існують функції, які мають слабку похідну, але не диференційовні в звичайному сенсі.

Розглянемо деякі приклади знаходження слабкої похідної.

Приклад 1.2. Знайти слабку похідну функції $u(x) = |x|$ на $\mathbb{R}$.

Розв'язання. Нехай $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тоді ми маємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi'(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами інтеграли справа, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx &= -x \varphi(x) \Big|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + x \varphi(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign } x \cdot \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

У результаті слабка похідна $u(x) = |x|$ має вигляд

$$Du(x) = \text{sign } x.$$

□

Приклад 1.3. Знайти слабку похідну функції

$$\begin{cases} 1+x, & \text{якщо } -1 < x \leq 0, \\ 1-x, & \text{якщо } 0 < x < 1, \end{cases}$$

якщо $\Omega = (-1,1)$.

Розв'язання. Нехай $\varphi \in C_0^\infty(-1,1)$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u D\varphi \, dx &= \int_{-1}^0 u D\varphi \, dx + \int_0^1 u D\varphi \, dx \\ &= \int_{-1}^0 (1+x) D\varphi \, dx + \int_0^1 (1-x) D\varphi \, dx \\ &= [(1+x)\varphi]|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \varphi \, dx + [(1-x)\varphi]|_0^1 - \int_0^1 (-1)\varphi \, dx \\ &= - \int_{-1}^0 \varphi \, dx - \int_0^1 (-1)\varphi \, dx = - \int_{-1}^1 v \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$Du(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (-1,0], \\ -1, & \text{якщо } x \in (0,1). \end{cases}$$

□

Приклад 1.4. Знайти слабку похідну функції $u(x) = \sqrt{|x|}$.

Розв'язання. Нехай $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u \varphi' \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|x|} \varphi' \, dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{-x} \varphi' \, dx + \int_0^{\infty} \sqrt{x} \varphi' \, dx. \end{aligned}$$

Використовуємо метод інтегрування частинами для вищезазначеного виразу

(тобто, якщо $\sqrt{x} = U$, $\varphi' dx = dV$, то $\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dU$, $\varphi = V$) і отримуємо

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|x|} \varphi' dx &= \sqrt{-x} \varphi|_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi dx}{2\sqrt{-x}} + \sqrt{x} \varphi|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\varphi dx}{2\sqrt{x}} \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi dx}{2\sqrt{-x}} - \int_0^{\infty} \frac{\varphi dx}{2\sqrt{x}} \\
 &= - \left(- \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi dx}{2\sqrt{-x}} - \int_0^{\infty} \frac{\varphi dx}{2\sqrt{x}} \right) \\
 &= - \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\varphi \operatorname{sign} x dx}{2\sqrt{-x}} - \int_0^{\infty} \frac{\varphi \operatorname{sign} x dx}{2\sqrt{x}} \right) \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi \operatorname{sign} x dx}{2\sqrt{|x|}}.
 \end{aligned}$$

Таким чином,

$$Du(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x|}}.$$

□

Зазначимо, що із означення слабкої похідної не випливає, що вона існує для будь-якої функції. Наведемо приклад функції, яка не має слабкої похідної.

Приклад 1.5. Показати, що функція

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

не має слабкої похідної.

Розв'язання. Припустимо, що існує функція $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ така, що для будь-якої $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ справедлива рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \varphi(x) dx.$$

Перетворимо ліву частину попередньої рівності та отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{\infty} u(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0),$$

а звідси випливає, що

$$\int_0^{\infty} v(x)\varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Із абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{-r}^r |v(x)| dx = 0.$$

Звідси випливає, що існує таке $\delta > 0$, що

$$\int_{-\delta}^{\delta} |v(x)| dx \leq \frac{1}{2}.$$

Нехай функція $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ така, що $\text{supp } v \subset [-\delta, \delta]$ та $\max v = v(0) = 1$. Тоді

$$1 = v(0) = \int_0^{+\infty} v(x)\varphi(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} v(x)\varphi(x) dx \leq \max v \int_{-\delta}^{\delta} |v(x)| dx \leq \frac{1}{2}.$$

Отримали суперечність. Таким чином, функція u не має слабкої похідної. $\square$

Наступна лема присвячена питанню існування слабкої похідної у інтеграла зі змінною границею інтегрування.

Лема 1.2. Нехай $f \in L(\mathbb{R})$ і

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Тоді $DF = f$.

Доведення. Оскільки функція $f(t)\varphi'(x)$ належить $L^1(\mathbb{R}^2)$, то, за теоремою Фубіні,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^x f(t)\varphi'(x) dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_t^{\infty} \varphi'(x) dx \right) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt, \end{aligned}$$

звідки і випливає потрібна нам рівність. $\square$

РОЗДІЛ 2

Неперервність та максимальна функція

У цьому розділі ми вивчимо питання неперервності максимальної функції і отримаємо умови, за яких максимальна функція неперервна.

2.1 Умови неперервності максимальних функцій

Почнемо цей розділ із простої теореми, що дає нам достатню умову неперервності максимальної функції.

Теорема 2.1. *Якщо $1 < p < \infty$ та $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, то $Mf \in C(\mathbb{R}^n)$.*

Доведення. Дійсно, якщо $x, h \in \mathbb{R}^n$ та $\varepsilon > 0$, то існує таке $r_\varepsilon < \infty$, що справедлива нерівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f_h(y) - f(y)| \, dy &\leq \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f_h(y) - f(y)|^p \, dy \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{\|f_h - f\|_p}{|B(x, r)|^{1/p}} \leq \frac{2\|f\|_p}{|B(x, r)|^{1/p}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

коли $r > r_\varepsilon$, де $f_h(x) = f(x + h)$. З іншої сторони, якщо $0 < r \leq r_\varepsilon$, то існує таке $\delta > 0$, що

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f_h(y) - f(y)| \, dy \leq \sup_{B(x, r_\varepsilon)} |f_h - f| < \varepsilon,$$

коли $|h| < \delta$. Звідси випливає, що $M(f_h - f)(x) \leq \varepsilon$ для $|h| < \delta$ та

$$|(Mf)_h(x) - Mf(x)| \leq M(f_h - f)(x) \leq \varepsilon,$$

коли $|h| < \delta$. А це свідчить про те, що Mf неперервна в точці x . □

В попередній теоремі показано, що з неперервності функції з додатковою умовою належності до простору $L^p(\mathbb{R}^n)$ випливає неперервність макси-

мальної функції. Цей результат буде посилено в теоремі 2.4.

Наступна теорема — це критерій неперервності максимальної функції.

Теорема 2.2. *Нехай $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ та $Mf(a) < \infty$. Нецентрована максимальна функція Гарді — Літлвуда Mf є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}^n$ тоді і лише тоді, коли існує функція $\tilde{f}$ така, що:*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad (2.1)$$

майже всюди на $\mathbb{R}^n$, та

$$\limsup_{x \rightarrow a} |\tilde{f}(x)| \leq Mf(a). \quad (2.2)$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідність. Покажемо, що функція

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} Mf(x), & \text{якщо } |f(x)| > Mf(x), \\ f(x), & \text{якщо } |f(x)| \leq Mf(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

задовольняє умови теореми.

За умовою теореми $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тоді, згідно з теоремою Лебега про диференціювання інтегралів, майже кожна точка $x \in \mathbb{R}^n$ є точкою Лебега для функції f , і, отже, маємо наступну рівність:

$$|f(x)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

Звідки отримуємо, що

$$|f(x)| \leq Mf(x).$$

З визначення функції $\tilde{f}$ випливає, що $\tilde{f} = f$ майже всюди і

$$|\tilde{f}(x)| \leq Mf(x)$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^n$. Якщо Mf є неперервною в точці a , то приходимо до висновку, що

$$\limsup_{x \rightarrow a} |\tilde{f}(x)| \leq \limsup_{x \rightarrow a} Mf(x) = Mf(a).$$

Необхідність доведена.

Доведемо достатність від супротивного. Припустимо, що Mf не є неперервною в точці a . Тоді можливий один з наступних випадків:

1) Існує константа $\alpha > 0$ така, що

$$\liminf_{x \rightarrow a} Mf(x) \leq Mf(a) - \alpha.$$

2) Існує константа $\beta > 0$ така, що

$$\limsup_{x \rightarrow a} Mf(x) > Mf(a) + \beta. \quad (2.4)$$

За лемою 1.1 функція Mf є напівнеперервною знизу і тому перша ситуація неможлива. Отже, достатньо довести, що випадок 2) також неможливий. Ця ситуація еквівалентна наступній: існує послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ та $\beta > 0$ такі, що $x_k \rightarrow a$ та

$$Mf(x_k) > Mf(a) + \beta.$$

Із (2.1) і (2.2) випливає, що для кожного x_k існує така куля $B_k = B(y_k, r_k)$, що $x_k \in B_k$ і

$$\begin{aligned} Mf(a) + \beta < Mf(x_k) &< \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |f(y)| dy + \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |\tilde{f}(y)| dy + \frac{\beta}{2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

тобто

$$Mf(a) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |\tilde{f}(y)| dy. \quad (2.6)$$

Якщо ми покажемо, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0, \quad (2.7)$$

то отримаємо, що для кулі B_k існує така точка $\bar{x}_k \in B_k$, що

$$\left| \tilde{f}(\bar{x}_k) \right| \geq \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |\tilde{f}(y)| dy > Mf(a) + \frac{\beta}{2}. \quad (2.8)$$

Звідси випливає, що

$$|\bar{x}_k - a| \leq |\bar{x}_k - x_k| + |x_k - a| \leq 2r_k + |x_k - a|. \quad (2.9)$$

Оскільки $r_k \rightarrow 0$ і $x_k \rightarrow a$, то з (2.9) випливає, що $\bar{x}_k \rightarrow a$. Із нерівності (2.8) випливає, що

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \tilde{f}(\bar{x}_k) \right| > Mf(a) + \frac{\beta}{2}. \quad (2.10)$$

Отримали, що нерівність (2.10) суперечить нерівності (2.2).

Залишилося довести, що (2.7) виконується. Якщо (2.7) не виконується, тобто r_k не прямує до 0, коли $k \rightarrow \infty$, то

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k > 0. \quad (2.11)$$

Звідси випливає, що можна побудувати таку підпоследовність, позначимо її також як $\{r_k\}$ для ясності, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = c \in (0, \infty]. \quad (2.12)$$

Нехай $\hat{x}_k$ буде центром B_k та $\rho_k = r_k + |x_k - a|$. Тоді ми легко можемо сказати, що $a \in B(\hat{x}_k, \rho_k)$. З нерівності (2.6) випливає, що

$$\begin{aligned} Mf(a) &\geq \frac{1}{|B(\hat{x}_k, \rho_k)|} \int_{B(\hat{x}_k, \rho_k)} |\tilde{f}(y)| dy \geq \frac{|B_k|}{|B(\hat{x}_k, \rho_k)|} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |\tilde{f}(y)| dy \\ &\geq \frac{|B_k|}{|B(\hat{x}_k, \rho_k)|} \left(Mf(a) + \frac{\beta}{2} \right), \end{aligned}$$

що призводить до суперечності, оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|B_k|}{|B(\hat{x}_k, \rho_k)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_n r_k^n}{c_n (r_k + |x_k - a|)^n} = 1,$$

коли $x_k \rightarrow a$, та виконується (2.12). Звідси випливає, що нерівність (2.11) не може виконуватися і теорема доведена. $\square$

Аналогічний результат можна отримати і для центрованої наксимальної функції.

Теорема 2.3. Нехай $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ та $M_c f(a) < \infty$. Центрована максимальна функція Гарді — Літлвуда $M_c f$ є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}^n$ тоді і лише

тоді, коли існує функція $\tilde{f}$ така, що:

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

майже всюди на $\mathbb{R}^n$, та

$$\limsup_{x \rightarrow a} |\tilde{f}(x)| \leq M_c f(a).$$

Далі, використовуючи теореми 2.2 та 2.5, отримуємо просту достатню умову неперервності нецентрованої та центрованої максимальних функцій. Ця теорема є посиленням результату теореми 2.1.

Теорема 2.4. Нехай функція $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ та неперервна в точці a . Якщо $f(x) = g(x)$ майже всюди для $x \in \mathbb{R}^n$, то Mf і $M_c f$ неперервні в точці a .

Доведення. Оберемо $\tilde{f} = g$. Тоді ми отримуємо, що

$$\limsup_{x \rightarrow a} |\tilde{f}(x)| = |\tilde{f}(a)| \leq M_c f(a) \leq Mf(a).$$

Застосовуючи до f теорему 2.2 для Mf або теорему 2.3 для $M_c f$, отримаємо, що Mf та $M_c f$ неперервні в точці a . $\square$

Зараз ми побудуємо приклади, які ілюструють поведінку максимальних функцій в простих випадках і, зокрема, показують, що неперервність функції не є необхідною умовою для неперервності її максимальних функцій.

Приклад 2.1. Знайти центровану, нецентровану, правосторонню та лівосторонню максимальні функції для функції $f(x) = \chi_{[0;\infty)}(x)$ та дослідити їх на неперервність.

Розв'язання. Легко бачити, що $Mf(x) = 1$. Дійсно, по-перше, для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, маємо

$$Mf(x) = \sup_{[a;b] \ni x} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) \leq \sup_{[a;b] \ni x} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b dy \right) = 1.$$

З іншої сторони, якщо $x \geq 0$, то

$$Mf(x) = \sup_{[a;b] \ni x} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) \geq \sup_{b>x} \left(\frac{1}{b} \int_0^b f(y) dy \right) = 1.$$

Якщо ж $x < 0$, то

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{[a;b] \ni x} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) \geq \sup_{b>0} \left(\frac{1}{b+|x|} \int_x^b f(y) dy \right) \\ &= \sup_{b>0} \left(\frac{b}{b+|x|} \right) = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, функція Mf неперервна, а функція f розривна.

Обчислимо тепер $M_c f$. Якщо $x > 0$, то

$$M_c f(x) = \sup_{\delta>0} \left(\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \right) = \frac{1}{2x} \int_0^{2x} f(y) dy = 1.$$

Якщо ж $x \leq 0$, то

$$\begin{aligned} M_c f(x) &= \sup_{\delta>0} \left(\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \right) = \sup_{\delta>|x|} \left(\frac{1}{2\delta} \int_0^{x+\delta} f(y) dy \right) \\ &= \sup_{\delta>|x|} \frac{\delta - |x|}{2\delta} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\delta - |x|}{2\delta} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо $M_c f(x) = \chi_{(0;\infty)}(x) + \frac{1}{2}\chi_{(-\infty;0]}(x)$. Цей приклад показує, що нецентрована і центрована максимальні функції можуть мати різну поведінку з точки зору властивості неперервності.

Знайдемо тепер $M_r f$. Якщо $x \geq 0$, то очевидно, що

$$M_r f(x) = \sup_{\delta>0} \left(\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(y) dy \right) = 1.$$

Якщо ж $x < 0$, то

$$\begin{aligned} M_r f(x) &= \sup_{\delta>0} \left(\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(y) dy \right) = \sup_{\delta>|x|} \left(\frac{1}{\delta} \int_0^{x+\delta} f(y) dy \right) \\ &= \sup_{\delta>|x|} \frac{\delta - |x|}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\delta - |x|}{\delta} = 1. \end{aligned}$$

Таким чином, правостороння максимальна функція $M_r f$ неперервна.

Нарешті, для функції $M_l f$ у випадку $x > 0$ маємо

$$M_l f(x) = \sup_{\delta > 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^x f(y) dy \right) = \sup_{0 < \delta < x} \left(\frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^x f(y) dy \right) = 1.$$

У випадку $x \leq 0$ маємо

$$M_l f(x) = \sup_{\delta > 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^x f(y) dy \right) = 0,$$

оскільки функція f дорівнює 0 для $x < 0$. Таким чином, лівостороння максимальна функція $M_l f$ розривна. $\square$

Приклад 2.2. Знайти центровану та нецентровану максимальні функції для функції $g(x) = \chi_{[-1;1]}(x)$ та дослідити їх на неперервність.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу, можна показати, що

$$Mg(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-x}, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } x \in [-1; 1], \\ \frac{2}{1+x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Таким чином, нецентрована максимальна функція Mg неперервна.

Для центрованої максимальної функції маємо

$$M_c g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 1, & \text{якщо } x \in (-1; 1), \\ \frac{1}{x+1}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Односторонні максимальні функції мають вигляд:

$$M_l g(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 1, & \text{якщо } x \in (-1; 1], \\ \frac{2}{x+1}, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$$

та

$$M_r g(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-x}, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } x \in [-1; 1), \\ 0, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases} \quad \square$$

Таким чином, для функції g всі її максимальні функції, крім нецентрованої, розривні.

Побудуємо тепер приклад розривної функції для якої всі максимальні функції збігаються і неперервні.

Приклад 2.3. Знайти максимальні функції для функції f , якщо

$$f(x) = \chi_{(-\infty; 0)}(x) + x\chi_{[0; 1]}(x) + \chi_{(1; \infty)}(x),$$

та дослідити їх на неперервність.

Розв'язання. Нехай $a < 0$ та $b > 1$. Тоді ми маємо

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy = \frac{b + |a| - 1/2}{b + |a|}.$$

Якщо тепер $\alpha < 0$ і $\beta > 1$, то із попередньої рівності отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{a < 0 \text{ і } b > 1} \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right) &= \sup_{a < 0} \left(\frac{1}{\beta-a} \int_a^\beta f(y) dy \right) \\ &= \sup_{b > 1} \left(\frac{1}{b-\alpha} \int_\alpha^b f(y) dy \right) = 1 \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \leq 1$$

для будь-яких $a, b, a < b$, то

$$Mf(x) = M_cf(x) = M_rf(x) = M_lf(x) = 1.$$

Таким чином, всі максимальні функції для функції f неперервні. □

2.2 Обмежена варіація і неперервність максимальної функції

Переглянемо корисні та зручні достатні умови, отримані з теореми 2.2, які легко дозволяють зробити висновок, що функція Mf неперервна у точці a . Ці умови описуються у термінах локальних властивостей функції. Щоб перейти до їх розгляду, необхідно нагадати визначення функції обмеженої варіації на числовій прямій.

Означення 2.1. Вимір на $\mathbb{R}$ функція f називається функцією з обмеженою варіацією на відрізку $[a, b]$, якщо вона визначена для всіх $x \in [a, b]$ та

$$V_f[a, b] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \right\} < \infty,$$

де супремум береться по всіх розбиттях інтервалу $[a, b]$.

Зазначимо, що обмежена варіація є локальною властивістю, хоча вона визначена на всьому інтервалі. У зв'язку з цим обмежена варіація в точці визначається таким чином.

Означення 2.2. Нехай $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Говорять, що функція f має обмежену варіацію в точці a , позначається як $f \in BV_{loc}(a)$, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$V_f[a - \varepsilon, a + \varepsilon] < \infty.$$

Більш того, говорять, що функція f має обмежену варіацію справа у точці a , позначається як $f \in BV_{loc}(a^+)$, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$V_f[a, a + \varepsilon] < \infty.$$

Аналогічно, функція f має обмежену варіацію зліва в точці a , позначається як $f \in BV_{loc}(a^-)$, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$V_f[a - \varepsilon, a] < \infty.$$

За допомогою наведених вище означень сформулюємо достатню умову непе-

первності максимальної функції в одній точці.

Теорема 2.5. *Якщо $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(a)$, то Mf неперервна в точці a .*

Доведення. Якщо ми зможемо знайти функцію $\tilde{f}$ таку, що $\tilde{f} = f$ майже всюди і виконується нерівність

$$\limsup_{x \rightarrow a} |\tilde{f}(x)| \leq Mf(a), \quad (2.13)$$

то згідно з теоремою 2.2, ми отримуємо, що Mf неперервна в точці a . Нехай функція $\tilde{f}$ визначена як у (2.3), тобто

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} Mf(x), & \text{якщо } |f(x)| > Mf(x), \\ f(x), & \text{якщо } |f(x)| \leq Mf(x). \end{cases}$$

Маємо, що $\tilde{f} = f$ майже всюди. Тому достатньо лише довести нерівність (2.13). Оскільки $f \in BV_{loc}(a)$, то існує додатне число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$V_f[a - \varepsilon, a + \varepsilon] < \infty. \quad (2.14)$$

Припустимо, що (2.13) не виконується. Тоді існує послідовність $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, для якої кожен $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $x_n \rightarrow a$, та існує $\beta > 0$ таке, що

$$Mf(a) + \beta < |\tilde{f}(x_n)|. \quad (2.15)$$

З (2.15) випливає, що

$$Mf(a) + \beta < |\tilde{f}(x_n)| \leq M\tilde{f}(x_n) = Mf(x_n)$$

виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Без втрати загальності можемо припустити, що $\{x_n\}$ зростає та збігається до a . В іншому випадку, має існувати підпослідовність $\{x_n\}$, яка спадає та збігається до a . За визначенням Mf , для кожного x_n існує куля B_n радіуса $r_n > 0$ така, що $x_n \in B_n$ та

$$Mf(a) + \beta < Mf(x_n) = M\tilde{f}(x_n) < \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} |\tilde{f}(y)| dy + \frac{\beta}{2}. \quad (2.16)$$

Оскільки $\tilde{f} = f$ майже всюди, то з (2.16) ми отримуємо, що

$$Mf(a) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} |f(y)| dy. \quad (2.17)$$

Як і у (2.7) припустимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Для кожного B_n , згідно з (2.17), існує точка $\bar{x}_n \in B_n$, така що

$$Mf(a) + \frac{\beta}{2} < \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} |f(y)| dy \leq |f(\bar{x}_n)|. \quad (2.18)$$

Ми можемо заключити, що $\bar{x}_n < a$. В іншому випадку, оскільки $x_n \in B_n$ та $\bar{x}_n \in B_n$, $\bar{x}_n \geq a$ разом з $x_n < a$ призводять до того, що $a \in B_n$ і, отже,

$$\frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} |f(y)| dy \leq Mf(a),$$

що суперечить (2.18).

Легко бачити, що $\bar{x}_n \rightarrow a$. Справді, ми можемо обрати послідовність строго зростаючих членів підпослідовності $\{\bar{x}_n\}$, що збігається до a — для ясності позначимо її як $\{\bar{x}_n\}$. Для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ ми отримуємо послідовність інтервалів

$$[\bar{x}_N, \bar{x}_{N+1}], [\bar{x}_{N+1}, \bar{x}_{N+2}], \dots \quad (2.19)$$

Будемо говорити, що інтервал $[a, b]$ має властивість А, якщо існує точка $p \in [a, b]$, для якої виконується наступна нерівність

$$|f(p)| \leq Mf(a) + \frac{\beta}{4}. \quad (2.20)$$

Ми стверджуємо, що в послідовності (2.19) є не більше ніж скінченна кількість інтервалів, які мають властивість А. В іншому випадку, якщо в (2.19) є нескінченна кількість інтервалів з властивістю А, то з (2.18) і (2.20) ми отримуємо, що $|f| \notin BV_{loc}(a)$.

Далі, нехай $[\bar{x}_{N+M}, \bar{x}_{N+M+1}]$ буде останнім інтервалом в (2.19), який має

властивість А. Тоді ми маємо

$$Mf(a) + \frac{\beta}{4} < |f(x)|$$

для всіх $x \in (\bar{x}_{N+M+1}, a)$. Звідси випливає

$$Mf(a) \geq \frac{1}{|[\bar{x}_{N+M+1}, a]|} \int_{[\bar{x}_{N+M+1}, a]} |f(y)| dy \geq Mf(a) + \frac{\beta}{4},$$

що неможливо. Тоді, навпаки, нерівність (2.14) повинна виконуватися. Іншими словами, Mf є неперервною в точці a . $\square$

Відомо, що якщо дві функції рівні майже всюди, то їх максимальні функції Гарді — Літлвуда однакові. Отже, можна послабити умову на функцію і отримати такий наслідок:

Наслідок 2.1. *Припустимо, що $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(a)$. Якщо $f(x) = g(x)$ майже всюди на $\mathbb{R}$, то Mf є неперервною в точці a .*

Зауваження 2.1. Незважаючи на те, що, виходячи з нерівності (1.1), центрована та нецентрована максимальні функції Гарді — Літлвуда поточно еквівалентні, характер їх неперервності різний. Теореми 2.2 і 2.5 свідчать про те, що неперервність центрованої функції передбачає неперервність нецентрованої. Однак, обернене твердження, можливо, не є вірним. Основна причина полягає в тому, що $Mf(x)$ може строго перевищувати $M_cf(x)$ для деяких x .

Наступні приклади ілюструють попереднє зауваження.

Нехай $f = \chi_{[0, \infty)}$ та $g = \chi_{[0, 1]}$. Використовуючи визначення центрованої максимальної функції Гарді — Літлвуда, отримуємо

$$M_cf(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x \leq 0 \end{cases}$$

та

$$M_g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)}, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Обидві $M_c f$ и $M_c g$ мають розриви в точці 0, хоча $f, g \in BV_{\text{loc}}(0)$. Потрібно звернути увагу, що $f, g \in BV_{\text{loc}}(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. На підставі теореми 2.2 ми отримуємо, що Mf та Mg повинні бути неперервними на $\mathbb{R}$. Знайдемо значення Mf та Mg :

$$Mf(x) \equiv 1,$$

та

$$Mg(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Отримали, що і Mf , і Mg неперервні на $\mathbb{R}$.

2.3 Характер точок розриву максимальної функції

Тепер розглянемо питання про точки розриву максимальної функції. Покажемо, що максимальна функція Гарді-Літлвуда не може мати точок розриву першого роду. Для цього спочатку введемо позначення $\tilde{I} = (-1; 1)$.

Справедлива наступна лема.

Лема 2.1. *Нехай в деякому околі точки $x_0 \in \tilde{I}$ існує скінчена границя*

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} Mf(x) = a.$$

Тоді виконується нерівність $Mf(x_0) \geq a$.

Доведення. Будемо розглядати точку $x_0 = 0$. Далі зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо таке $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для будь-якого $x \in (0; \delta)$ виконується нерівність

$$a - \varepsilon^2 < Mf(x) < a + \varepsilon^2.$$

З визначення максимальної функції Гарді — Літлвуда випливає, що для кожного $x \in (0; \delta]$ існує такий інтервал I_x , що містить x , для якого справедлива наступна нерівність

$$f_{I_x} > a - \varepsilon^2. \quad (2.21)$$

Нехай точка $x_0 = 0$ належить інтервалу I_x для деякого $x \in (0; \delta]$. Тоді звідси випливає, що

$$Mf(0) > a - \varepsilon^2. \quad (2.22)$$

Далі будемо розглянемо випадок, коли точка $x_0 = 0 \notin I_x$ для кожного $x \in (0; \delta]$. Введемо наступне позначення

$$\delta^* = \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}\delta.$$

З урахуванням цього можливий один із наведених нижче випадків.

- 1) Якщо $\delta \in I_x$ для деякого $x \in (0; \delta^*]$, то позначимо через $(1 + \varepsilon)I_x$ інтервал з тим самим центром γ , що і інтервал I_x , із довжиною $(1 + \varepsilon)|I_x|$.

Позначимо через a і b лівий і правий кінці інтервалу I_x відповідно. Маємо

$$|I_x| = 2(\gamma - a) = 2(b - \gamma)$$

або

$$\frac{|I_x|}{2} = \gamma - a = b - \gamma. \quad (2.23)$$

Використовуючи рівність (2.23) та той факт, що δ належить інтервалу I_x , отримуємо наступне

$$\delta < \gamma + \frac{|I_x|}{2} < 2\gamma.$$

Далі, так як $\delta \in I_x$, то δ^* також належить I_x і справедливо

$$\delta^* = \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}\delta < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}b < \gamma. \quad (2.24)$$

Перепишемо (2.23) з урахуванням (2.24)

$$\frac{|I_x|}{2} = \gamma - a > \gamma - \delta^*$$

і завдяки цьому отримуємо наступну нерівність

$$(1 + \varepsilon)\frac{|I_x|}{2} \geq (1 + \varepsilon)(\gamma - \delta^*) = \gamma + \varepsilon\left(\gamma - \frac{\delta}{2}\right) > \gamma,$$

з якої випливає, що $0 \in (1 + \varepsilon)I_x$. Отримуємо

$$\begin{aligned} Mf(0) &\geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)|I_x|} \int_{(1+\varepsilon)I_x} f(t) dt \\ &\geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)|I_x|} \int_{I_x} f(t) dt > \frac{a - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

2) Якщо ж $I_x \subset (0; \delta]$ для всіх $x \in (0; \delta^*]$, то введемо наступні позначення

$$e_x \equiv \{t \in I_x : f(t) \leq a - \varepsilon\}, \quad E_x \equiv I_x \setminus e_x.$$

Використовуючи нерівність (2.21), отримуємо:

$$\begin{aligned} a - \varepsilon^2 &< \frac{1}{|I_x|} \int_{I_x} f(t) dt = \frac{1}{|e_x| + |E_x|} \left(\int_{e_x} f(t) dt + \int_{E_x} f(t) dt \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{|e_x| + |E_x|} ((a - \varepsilon)|e_x| + (a + \varepsilon^2)|E_x|). \end{aligned}$$

Виразимо з отриманої нерівності $|e_x|$

$$\begin{aligned} a - \varepsilon^2 &\leq \frac{1}{|e_x| + |E_x|} ((a - \varepsilon)|e_x| + (a + \varepsilon^2)|E_x|) \\ (a - \varepsilon^2)(|e_x| + |E_x|) &\leq (a - \varepsilon)|e_x| + (a + \varepsilon^2)|E_x| \\ (\varepsilon - \varepsilon^2)|e_x| &\leq 2\varepsilon^2|E_x|, \end{aligned}$$

тобто

$$|e_x| < \frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon - \varepsilon^2} |E_x| = \mu |E_x|, \quad (2.26)$$

де $\mu = \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)}$.

Нехай

$$I \equiv [\varepsilon\delta^*; \delta^*] \subset \bigcup_{x \in (0; \delta^*]} I_x.$$

Тоді оберемо з $\{I_x\}_{x \in (0; \delta^*]}$ таке скінченне підсімейство $\{I_{x_k}\}_{k=1}^m$ (для зручності позначимо $G_k = I_{x_k}$), для якого $I \subset \bigcup_{k=1}^m G_k \equiv J$ (припустимо, що $G_k \cap I \neq \emptyset$, де $k = 1, \dots, m$). Спочатку замінимо систему $\{G_k\}_{k=1}^m$ такою її підсистемою з тим самим об'єднанням, де жодний інтервал G_k не входить до об'єднання інших. Припустимо, що це перші n інтервалів, тобто $\{G_k\}_{k=1}^n$, де $G_k = (\alpha_k; \beta_k)$. Перенумеруємо ці інтервали таким чином, щоб $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$. Тоді

отримуємо, що $\beta_{k+1} > \beta_k$, оскільки в іншому випадку інтервал G_{k+1} містився би у G_k . Крім того, потрібно, щоб виконувалося співвідношення $\alpha_{k+1} > \beta_{k-1}$, бо інакше інтервал G_k містився би у об'єднанні G_{k-1} та G_{k+1} . Отже, інтервали з парними і не парними номерами утворюють дві підсистеми, в кожній з яких інтервали попарно не перетинаються. Тоді маємо наступне

$$\begin{aligned} \sum_{k-\text{непарне}} |G_k| &= \left| \bigcup_{k-\text{непарне}} G_k \right| \leq \left| \bigcup_{k=1}^n G_k \right| = \left| \bigcup_{k=1}^m G_k \right|, \\ \sum_{k-\text{парне}} |G_k| &= \left| \bigcup_{k-\text{парне}} G_k \right| \leq \left| \bigcup_{k=1}^n G_k \right| = \left| \bigcup_{k=1}^m G_k \right|. \end{aligned}$$

Додамо отримані нерівності

$$\sum_{k=1}^n |G_k| \leq 2 \left| \bigcup_{k=1}^n G_k \right| = 2|J|.$$

Позначимо

$$g_k \equiv \{t \in G_k : f(t) \leq a - \varepsilon\},$$

де $k = 1, \dots, n$,

$$e \equiv \bigcup_{k=1}^n g_k \quad \text{і} \quad E \equiv J \setminus e.$$

Скористаємося нерівністю (2.26) і отримаємо

$$|e| \leq \sum_{k=1}^n |g_k| < \mu \sum_{k=1}^n |G_k \setminus g_k| < \mu \sum_{k=1}^n |G_k| \leq 2\mu|J|.$$

Звідси випливає, що

$$|E| = |J| - |e| > |J| - 2\mu|J| = |J|(1 - 2\mu). \quad (2.27)$$

Позначимо через α та β лівий та правий кінці інтервалу J відповідно. Тоді

$$\beta = \alpha + (\beta - \alpha) \leq \varepsilon\delta^* + |J|.$$

Зважаючи на це, та застосовуючи нерівність (2.27), отримаємо наступне спів-

відношення

$$Mf(0) \geq \frac{1}{\beta} \int_0^\beta f(t) dt \geq \frac{1}{\varepsilon \delta^* + |J|} \int_E f(t) dt \geq \frac{(\alpha - \varepsilon)(1 - 2\mu)|J|}{\varepsilon \delta^* + |J|}.$$

Зауважимо, що $|J| \geq |I| = \delta^*(1 - \varepsilon)$, отже, $\delta^*|J|^{-1} \leq (1 - \varepsilon)^{-1}$. Звідси маємо, що

$$\begin{aligned} Mf(0) &\geq \frac{(\alpha - \varepsilon)(1 - 2\mu)|J|}{\varepsilon \delta^* + |J|} \geq \frac{(\alpha - \varepsilon)(1 - \frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon})}{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1} \\ &\geq (a - \varepsilon)(1 - 5\varepsilon), \end{aligned}$$

та тоді з (2.22) і (2.25) отримуємо

$$Mf(0) \geq \min \left(a - \varepsilon^2; \frac{a - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon}; (a - \varepsilon)(1 - 5\varepsilon) \right).$$

Звідси, враховуючи довільність $\varepsilon > 0$, випливає, що $Mf(0) \geq a$. $\square$

Зауваження 2.2. Використовуючи аналогічні міркування, що були застосовані при доведенні попередньої леми, ми отримуємо наступний результат

$$Mf(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} Mf(x),$$

якщо ця границя існує.

Тепер ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 2.6. Нехай $f \in L(\tilde{I})$. Тоді Mf не має на $\tilde{I}$ точок розриву I роду.

Доведення. Нехай існують скінчені границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} Mf(x) = a \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} Mf(x) = b.$$

Тоді, згідно з лемою (2.1) і зауваженням (2.2), отримуємо, що $Mf(x_0) \geq \max(a; b)$. Далі, враховуючи той факт, що множина Лебега максимальної функції $\{x \in \tilde{I} : Mf(x) > \lambda\}$ є відкритою відносно $\tilde{I}$ для будь-якого $\lambda > 0$, маємо нерівність $Mf(x_0) \leq \min(a; b)$. Остаточно отримуємо, що $Mf(x_0) = a =$

$b = \lim_{x \rightarrow x_0} Mf(x)$, а це в свою чергу означає, що Mf є неперервною в точці x_0 .
Теорема доведена. $\square$

Вище ми показали, що максимальна функція не може мати точок розриву першого роду. При цьому вона може мати точки розриву другого роду. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 2.4. Показати, що максимальна функція функції

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases}$$

має розрив другого роду.

Розв'язання. Нехай $|x| < 1$. Тоді виконується наступна нерівність

$$Mf(x) = \sup_{[t,s] \ni x} \left(\frac{1}{s-t} \int_t^s |f(t)| dt \right) \geq \frac{1}{|x|} \int_0^{|x|} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{|x|}}.$$

Звідси випливає, що в точці $x = 0$ у максимальної функції розрив другого роду. $\square$

2.4 Поведінка максимальної функції у точках розриву

Значення максимальної функції в околі точки розриву можуть суттєво відрізнятися від значення максимальної функції в самій точці розриву. З іншого боку, в будь-якому околі точки розриву знайдуться також значення максимальної функції, які можна порівняти з її значенням в самій точці розриву. Тому поведінка максимальної функції описується за допомогою наступної величини

$$c_f(x) = \frac{\liminf_{t \rightarrow x} Mf(t)}{Mf(x)},$$

де $x \in \tilde{I}$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.7. Для будь-якої точки $x_0 \in \tilde{I}$ виконується нерівність

$$1 \leq c_f(x_0) \leq 2. \quad (2.28)$$

Доведення. Ліва нерівність в (2.28) безпосередньо випливає з того факту, що лебегова множина максимальної функції $\{x \in \tilde{I} : Mf(x) > \lambda\}$ є відкритою відносно $\tilde{I}$ для будь-якого $\lambda > 0$. Для доведення правої нерівності, без обмеження загальності, розглянемо випадок $x_0 = 0$. Зафіксуємо довільне $a < \liminf_{x \rightarrow +0} Mf(x)$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $Mf(x) > a$ для всіх $x \in (0; \delta]$. Для кожного $x \in (0; \delta]$ існує інтервал I_x , що містить x і для якого виконується наступна нерівність

$$f_{I_x} > a. \quad (2.29)$$

Легко побачити, що об'єднання цих інтервалів, $I \equiv \bigcup_{x \in (0; \delta]} I_x$, також є інтервалом. Далі, зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ та, застосовуючи лему Віталі (див. [3, р. 88, Лема 2.1.5]) до сімейства $\{I_x\}_{x \in [0; \delta]}$, оберемо скінченне підсімейство попарно неперетинних інтервалів $\{I_{x_k}\}_{k=1}^n$ (позначимо $I_k \equiv I_{x_k}$), таких, що

$$|I| \leq (2 + \varepsilon) \sum_{k=1}^n |I_k|. \quad (2.30)$$

Тоді з (2.29) та (2.30) випливає, що

$$Mf(0) \geq \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt \geq \frac{1}{|I|} \sum_{k=1}^n \int_{I_k} f(t) dt > \frac{1}{|I|} a \sum_{k=1}^n |I_k| \geq \frac{a}{2 + \varepsilon},$$

і, отже, за умови довільності ε та a , маємо

$$\liminf_{x \rightarrow +0} Mf(x) \leq 2Mf(0).$$

Аналогічним способом можна довести, що

$$\liminf_{x \rightarrow -0} Mf(x) \leq 2Mf(0).$$

і тим самим теорема доведена. □

Покажемо на прикладі, що нерівність (2.28) є точною.

Приклад 2.5. Нехай

$$f(x) = \sum_{k=3}^{\infty} a_k \chi_{\Delta_k}(x), \quad x \in [0; 1],$$

де

$$a_k = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}, \quad b_k = \frac{\ln^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln k \ln(k+1)}, \quad \Delta_k = \left(\frac{1}{\ln k} - b_k; \frac{1}{\ln k}\right),$$

а на $[-1; 0)$ довизначимо функцію f так, щоб вона була парною. Обчислимо значення $Mf(0)$. Враховуючи парність функції f , отримуємо

$$\begin{aligned} Mf(0) &= \sup_{0 < \alpha, \beta \leq 1} \frac{1}{\beta + \alpha} \int_{-\alpha}^{\beta} f(t) dt = \\ &= \sup_{0 < \alpha, \beta \leq 1} \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(t) dt; \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} f(t) dt \right\} = \sup_{0 < z \leq 1} \frac{1}{z} \int_0^z f(t) dt. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Помітимо, що якщо $\ln^{-1} k \leq z$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \int_0^z f(t) dt &= \frac{\ln^{-1} k}{z} \frac{1}{\ln^{-1} k} \int_0^{\ln^{-1} k} f(t) dt + \\ &+ \frac{z - \ln^{-1} k}{z} \frac{1}{z - \ln^{-1} k} \int_{\ln^{-1} k}^z f(t) dt \leq \frac{\ln^{-1} k}{z} + \frac{z - \ln^{-1} k}{z} = 1. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо, що $Mf(0) \leq 1$. Але оскільки верхня межа справа у рівності (2.31), яка дорівнює одиниці, досягається при $z = \ln^{-1} k$, то $Mf(0) = 1$. Далі доведемо, що

$$\liminf_{x \rightarrow 0} Mf(x) \geq 2.$$

Для всіх $x \in I_k = (\ln^{-1}(k+1); \ln^{-1} k)$ знаходимо

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{\ln^{-1} k - \ln^{-1}(k+1) + b_{k+1}} \int_{\ln^{-1}(k+1) - b_{k+1}}^{\ln^{-1} k} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{b_{k+1} + |I_k|} (a_{k+1} b_{k+1} + a_k b_k). \end{aligned}$$

Оскільки вираз в правій частині нерівності прямує до двійки при $k \rightarrow \infty$, то отримуємо, що $\liminf_{x \rightarrow +0} Mf(x) \geq 2$. Отже, через парність функції f , маємо, що

$\liminf_{x \rightarrow 0} Mf(x) \geq 2$. Це, в свою чергу, означає, що $c_f(0) \geq 2$. З урахуванням теореми 2.7 отримуємо, що $c_f(0) = 2$.

РОЗДІЛ 3

Диференціальні властивості максимальної функції

У цьому розділі ми розглянемо поведінку максимальної функції у просторах Соболева.

3.1 Простори Соболева

Нагадаємо означення простору Соболева.

Означення 3.1. Нехай Ω — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, m — довільне невід’ємне ціле число та $1 \leq p \leq \infty$. Тоді простір

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

називається простором Соболева. Іншими словами, $W^{m,p}(\Omega)$ — це сукупність усіх функцій з $L^p(\Omega)$, чиї слабкі похідні до порядку m також належать $L^p(\Omega)$.

Якщо функція $f \in W^{m,p}(\Omega)$, то її норма у цьому просторі визначається наступним чином

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|f\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

коли $1 \leq p < \infty$, та

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|f\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

коли $p = \infty$.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 3.1. Нехай $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ та функція $f(x)$ визначена наступним

чином

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \cos x_1 + \sin x_2.$$

Чи належить f простору $W^{1,2}(\Omega)$?

Розв'язання. Якщо $f \in W^{1,2}(\Omega)$, тоді сама функція f та її часткові похідні першого порядку повинні бути в $L^2(\Omega)$. Це означає, що

$$f \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^2(\Omega) \quad \text{і} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$$

виконується. Іншими словами, наступні інтеграли

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos x_1 + \sin x_2|^2 dx_1 dx_2, \\ \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |-\sin x_1|^2 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

та

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos x_2|^2 dx_1 dx_2$$

повинні дорівнювати скінченному числу. Оскільки синус і косинус обмежені, тобто $|\cos x_1| \leq 1$ і $|\sin x_2| \leq 1$, то вищезазначені інтеграли можна оцінити наступним чином

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos x_1 + \sin x_2|^2 dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + 1|^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 4 dx_1 dx_2 = 16\pi^2 < \infty, \\ \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |-\sin x_1|^2 dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |1|^2 dx_1 dx_2 = 4\pi^2 < \infty \end{aligned}$$

та

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos x_2|^2 dx_1 dx_2$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |1|^2 dx_1 dx_2 = 4\pi^2 < \infty.$$

Отже, ми маємо $f \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^2(\Omega)$ і $\frac{\partial f}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$. Іншими словами, $f \in W^{1,2}(\Omega)$. $\square$

Приклад 3.2. Функція $u(x)$ визначена наступним чином:

$$u(x) = x^3.$$

Чи належить $u(x)$ простору $W^{2,2}(0,1)$?

Розв'язання. Якщо $u \in W^{2,2}(\Omega)$, тоді сама функція u та її часткові похідні першого та другого порядків повинні буди у $L^2(0,1)$. Це в свою чергу означає, що

$$u \in L^2(0,1), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0,1) \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(0,1)$$

виконується. Розглянемо відповідні інтеграли:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^2 dx &= \int_0^1 |x^3|^2 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} < \infty, \\ \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx &= \int_0^1 |3x^2|^2 dx = \frac{9x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{9}{5} < \infty \end{aligned}$$

та

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx = \int_0^1 |6x|^2 dx = 12x^3 \Big|_0^1 = 12 < \infty.$$

А звідси випливає, що $u \in L^2(0,1)$, $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(0,1)$ та $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(0,1)$. Тобто $u \in W^{2,2}(0,1)$. $\square$

Приклад 3.3. Якщо $\Omega = (0,1) \times (0,2)$, то показати, що функція

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$$

не належить простору $W^{1,2}(\Omega)$.

Розв'язання. Якщо $u \in W^{1,2}(\Omega)$, тоді функція u та її часткові похідні першого

порядку повинні бути у $L^2(\Omega)$. Тобто

$$u \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^2(\Omega) \quad \text{та} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega)$$

повинно виконуватись. Ми маємо

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx = \int_0^2 \int_0^1 \left| \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \right|^2 dx_1 dx_2 = \infty,$$

а звідси випливає $\frac{\partial u}{\partial x_1} \notin L^2(\Omega)$. Тобто $u \notin W^{1,2}(\Omega)$. □

Наступні дві леми, які нам знадобиться в подальшому і доведення яких можна знайти у [2, с. 126-127], називаються ланцюговим правилом для слабких похідних і ланцюговим правилом для функцій $f^+ = \max\{f, 0\}$ та $f^- = \min\{f, 0\}$ відповідно.

Лема 3.1. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ та $u \in W^1(\Omega)$. Тоді композиція функцій $f \circ u \in W^1(\Omega)$ і $D(f \circ u) = f'(u)D(u)$.

Лема 3.2. Нехай $f \in W^1(\Omega)$, тоді $f^+, f^-, |f| \in W^1(\Omega)$ та

$$\begin{aligned} Df^+ &= \begin{cases} Df, & \text{якщо } f > 0 \\ 0, & \text{якщо } f \leq 0 \end{cases} \\ Df^- &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } f \geq 0 \\ Df, & \text{якщо } f < 0 \end{cases} \\ D|f| &= \begin{cases} Df, & \text{якщо } f > 0 \\ 0, & \text{якщо } f = 0 \\ -Df, & \text{якщо } f < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Наступна лема знадобиться нам при доведенні обмеженості максимального оператора в просторах Соболева.

Лема 3.3. Нехай $f, g \in L(\mathbb{R})$. Позначимо

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad G(x) = \int_{-\infty}^x g(y) dy,$$

та $H(x) = \max \{F(x), G(x)\}$. Тоді слабка похідна DH сумовна та

$$\|DH\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Доведення. Користуючись рівністю

$$\max \{F(x), G(x)\} = \frac{1}{2} \{F(x) + G(x) - |F(x) - G(x)|\},$$

лемами 1.2, 3.1 і 3.2, отримуємо

$$|DH| = \frac{|f + g - \operatorname{sign}(F - G)(f - g)|}{2} \leq |f| + |g|.$$

Інтегруючи цю нерівність на $\mathbb{R}$ отримаємо твердження леми. □

Теорема 3.1. Нехай $f \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, та I — інтервал. Тоді існує функція $\tilde{f} \in C(\bar{I})$ така, що $f = \tilde{f}$ майже всюди на I та

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_y^x f'(t) dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

Мають місце декілька зауважень стосовно попередньої теореми, а саме:

Зауваження 3.1. Підкреслимо зміст попередньої теореми. По-перше, зауважимо, що якщо одна функція f належить $W^{1,p}$, то всі функції g такі, що $g = f$ майже всюди також належать $W^{1,p}$ (це безпосередньо випливає з визначення простору $W^{1,p}$). Теорема 3.1 стверджує, що кожна функція $f \in W^{1,p}$ допускає одне і тільки одне неперервне представлення на $\bar{I}$, тобто існує неперервна функція $g \in \bar{I}$, яка належить до класу еквівалентності функції f ($g \sim f$, якщо $g = f$ майже всюди).

Зауваження 3.2. З теореми 3.1 випливає, що якщо функція $f \in W^{1,p}$ та якщо $f' \in C(\bar{I})$, то $f \in C^1(\bar{I})$.

3.2 Диференціальні властивості односторонніх максимальних функцій

Почнемо дослідження властивостей диференційовності максимальної функції саме з односторонніх максимальних функцій $M_r f$ і $M_l f$. Має місце наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Тоді $M_l f$ та $M_r f$ — неперервні функції, що перетворюються на нуль на нескінченності.*

Доведення. Достатньо довести цей результат тільки для $M_r(f)$, оскільки аналогічні міркування можна застосувати і до $M_l(f)$. Якщо $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, то, згідно з теоремою 3.1 та абсолютною неперервністю інтеграла, ми можемо вважати її рівномірно неперервною.

Нехай $x, h \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ та $f_h(y) = f(y + h)$. Оскільки f рівномірно неперервна, то існує таке $\delta > 0$, що $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$, якщо $|y_1 - y_2| < \delta$. Тоді маємо

$$\frac{1}{r} \int_x^{x+r} |f_h(y) - f(y)| dy < \varepsilon, \quad \text{де } |h| < \delta.$$

З попередньої нерівності випливає, що

$$M_r(f_h - f)(x) \leq \varepsilon \tag{3.1}$$

для всіх h , $|h| < \delta$. Покажемо тепер, що

$$|(M_r f)_h(x) - M_r f(x)| \leq M_r(f_h - f)(x). \tag{3.2}$$

По-перше, маємо

$$\begin{aligned} (M_r f)_h(x) &= M_r f(x + h) = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r} \int_{x+h}^{x+h+r} f(y) dy \right) \\ &= \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(y + h) dy \right) = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r} \int_x^{x+r} f_h(y) dy \right) \\ &= M_r f_h(x). \end{aligned}$$

Далі, оскільки $f_h = f + (f_h - f)$ і $f = f_h + (f - f_h)$, то, використовуючи

субадитивність правосторонньої максимальної функції, отримаємо

$$\begin{aligned} M_r f_h(x) &\leq M_r f(x) + M_r(f_h - f)(x), \\ M_r f(x) &\leq M_r f_h(x) + M_r(f_h - f)(x). \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (3.2).

Таким чином, застосовуючи нерівності (3.1) і (3.2) отримуємо, що

$$|M_r f(x+h) - M_r f(x)| \leq \varepsilon.$$

для всіх h , $|h| < \delta$, а це означає, що $M_r f$ — неперервна в точці x . Оскільки точка x довільна, то неперервність доведена.

Далі покажемо, що $M_r f(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow -\infty$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки $\|f\|_1 < \infty$, то існує $R_\varepsilon > 0$ таке, що $\frac{\|f\|_1}{t} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \geq R_\varepsilon$. Враховуючи, що функція f рівномірно неперервна та сумовна, отримуємо, що $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Звідси випливає, що існує $Q_\varepsilon > 0$ таке, що $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, якщо $|y| \geq Q_\varepsilon$. Нехай $x < -(Q_\varepsilon + R_\varepsilon)$. Тоді існує таке $t > 0$, що

$$M_r f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(y)| dy.$$

Можливі два випадки:

- 1) $x + t \leq -Q_\varepsilon$. В цьому випадку маємо, що $x \leq y \leq x + t$. Тоді на цьому інтервалі $|y| \geq Q_\varepsilon$ і звідси випливає, що $M_r f(x) < \varepsilon$.
- 2) $x + t > -Q_\varepsilon$. Оскільки $x < -(Q_\varepsilon + R_\varepsilon)$, то $-x > Q_\varepsilon + R_\varepsilon$. Звідси отримуємо, що $t > -Q_\varepsilon - x > R_\varepsilon$. Таким чином,

$$\frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(y)| dy < \frac{\|f\|_1}{t} < \frac{\varepsilon}{2}$$

і, отже, $M_r f(x) < \varepsilon$.

Випадок $x \rightarrow +\infty$ доводиться аналогічно і ми його опускаємо. Теорема доведена. $\square$

Для того, щоб сформулювали наступну лему, введемо позначення:

$$E = \{x \in \mathbb{R}: M_l f(x) > |f(x)|\}.$$

Згідно з теоремою 3.2, множина E — відкрита, а, значить, її можна представити у вигляді

$$E = \bigcup_j I_j = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j), \quad (3.3)$$

де (α_j, β_j) — попарно неперетинні інтервали.

Справедлива наступна лема.

Лема 3.4. Нехай $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$. Тоді справедливі наступні твердження:

- 1) $M_l f$ — незростаюча функція на кожному інтервалі I_j .
- 2) $M_l f$ — локально лішицева функція на кожному I_j .

Доведення. Доведемо спочатку перше твердження. Нехай $K = [\alpha, \beta] \subset I_j$. Тоді достатньо довести, що $M_l f$ — незростаюча функція на K . Згідно з теоремами 3.2 і 3.2, $M_l f$ та $|f|$ — неперервні функції і звідси випливає, що

$$\varepsilon \equiv \inf_{x \in K} M_l f(x) - |f(x)| > 0. \quad (3.4)$$

Функція $|f|$ — рівномірно неперервна на K , тобто існує $\delta > 0$ таке, що

$$|f(y)| < |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in K, \quad |y - x| \leq \delta. \quad (3.5)$$

За визначенням ε і (3.5) ми отримаємо, що

$$M_l f(x) = \sup_{s > \delta} \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy, \quad \forall x \in K. \quad (3.6)$$

Дійсно, якщо б це було не так, тобто $M_l f(x) = \sup_{s \leq \delta} \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy$ для деяких $x \in K$, то, використовуючи нерівність (3.5), ми прийшли би до висновку, що $M_l f(x) \leq |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}$, а це суперечить (3.4).

Нам потрібно довести, що

$$M_l f(x - h) \geq M_l f(x), \quad x - h, x \in K, 0 < h \leq \delta. \quad (3.7)$$

Для цього припустимо, що $s > \delta$. Тоді з рівності (3.5) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy &= \frac{s-h}{s} \left\{ \frac{1}{s-h} \int_{x-s}^{x-h} |f(y)| dy \right\} + \frac{h}{s} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x-h}^x |f(y)| dy \right\} \\ &\leq \frac{s-h}{s} M_l f(x-h) + \frac{h}{s} \left\{ |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \\ &\leq \max \left\{ M_l f(x-h), |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Візьмемо супремум у лівій частині (3.8), коли $s > \delta$, і за допомогою (3.6) отримаємо, що

$$M_l f(x) \leq \max \left\{ M_l f(x-h), |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (3.9)$$

За допомогою (3.4) отримуємо, що $M_l f(x) \geq |f(x)| + \varepsilon$, і, отже, нерівність (3.8) доведена.

Перейдемо до доведення другого пункту леми. Нехай K та δ будуть такими самими, як і в першому пункті, $x, x+h \in K$ і $h > 0$, $s > \delta$. Тоді з пункту 1) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy - M_l f(x+h) &\leq \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy - \frac{1}{s+h} \int_{x-s}^{x+h} |f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy - \frac{1}{s+h} \int_{x-s}^x |f(y)| dy \\ &= \frac{1}{s+h} \cdot \frac{1}{s} \int_{x-s}^x |f(y)| dy \cdot h \\ &\leq \frac{M_l f(x)}{\delta} \cdot h \leq \frac{M_l f(\alpha)}{\delta} \cdot h. \end{aligned}$$

Візьмемо супремум у лівій частині попередньої нерівності, коли $s > \delta$, і за допомогою (3.6) отримаємо, що

$$0 \leq M_l f(x) - M_l f(x+h) \leq Ch,$$

де $C = \frac{M_l f(\alpha)}{\delta}$. Лема повністю доведена. $\square$

Теорема 3.3. Якщо $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, то слабкі похідні M_l і M_r — сумовні функції

та

$$\|(M_l f)'\|_1 \leq \|f'\|_1, \quad \|(M_r f)'\|_1 \leq \|f'\|_1. \quad (3.10)$$

Доведення. Доведемо теорему лише для M_l , так як для M_r будуть використуватися аналогічні міркування. Помітимо, що якщо $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, то, згідно з лемою 3.2, $|f| \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ та виконується нерівність

$$\| |f|' \|_1 = \|f'\|_1. \quad (3.11)$$

Нехай множина E визначена так само, як у (3.3). Тоді, згідно з лемою 3.4, функція $M_l f$ — диференційовна майже всюди на кожному інтервалі $I_j = (\alpha_i, \beta_i) \subset E$, та її похідна, позначимо як v , задовольняє нерівності $v \leq 0$. На множині $F = \mathbb{R} \setminus E$ виконується рівність $M_l f = |f|$. Доведемо, що слабку похідну функції $M_l f$ можна подати у вигляді

$$(M_l f)' = \chi_E v + \chi_F |f|', \quad (3.12)$$

де $\chi_E v$ і $\chi_F |f|'$ — характеристичні функції множин E і F відповідно.

Для тест функції $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ інтегруючи частинами ми маємо

$$\begin{aligned} \int_{I_j} M_l f(y) \phi'(y) dy &= [M_l f(\beta_j) \phi(\beta_j) - M_l f(\alpha_j) \phi(\alpha_j)] - \int_{I_j} v(y) \phi(y) dy \\ &= [|f(\beta_j)| \phi(\beta_j) - |f(\alpha_j)| \phi(\alpha_j)] - \int_{I_j} v(y) \phi(y) dy. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Може статися так, що $\alpha_i = -\infty$ або $\beta_i = \infty$. Але f перетворюється на нуль на нескінченності, тобто $f(\alpha_i) = f(\beta_i) = 0$. А на підставі теореми 3.2 ми отримуємо, що $M_l f(\alpha_i) = M_l f(\beta_i) = 0$.

Із співвідношення (3.13) випливає, що

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}} M_l f(y) \phi'(y) dy = \int_E M_l f(y) \phi'(y) dy + \int_F M_l f(y) \phi'(y) dy \\ &= \sum_j [|f(\beta_j)| \phi(\beta_j) - |f(\alpha_j)| \phi(\alpha_j)] - \int_E v(y) \phi(y) dy + \int_F |f(y)| \phi'(y) dy \\ &= \int_E |f(y)| \phi'(y) dy + \int_E |f(y)|' \phi(y) dy - \int_E v(y) \phi(y) dy + \int_F |f(y)| \phi'(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\phi'(y) dy + \int_E |f(y)|'\phi(y) dy - \int_E v(y)\phi(y) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}} |f(y)|'\phi(y) dy + \int_E |f(y)|'\phi(y) dy - \int_E v(y)\phi(y) dy \\
&= - \int_F |f(y)|'\phi(y) dy + \int_E |f(y)|'\phi(y) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}} (\chi_E(y)v(y) + \chi_F(y)|f(y)|') \phi(y) dy,
\end{aligned}$$

і це доводить нерівність (3.12).

Тепер доведемо нерівність (3.10). Оскільки на кожному інтервалі I_j слабка похідна $v \leq 0$, то ми отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_{I_j} |v(y)| dy &= M_l f(\alpha_j) - M_l f(\beta_j) = |f(\alpha_j)| - |f(\beta_j)| \\
&= - \int_{I_j} |f(y)|' dy \leq \int_{I_j} ||f(y)|'| dy.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Використовуючи (3.11) та (3.14), ми отримуємо

$$\begin{aligned}
\|(M_l f)'\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(y)v(y) + \chi_F(y)|f(y)|'| dy \\
&= \int_E |v(y)| dy + \int_F ||f(y)|'| dy \\
&\leq \int_E ||f(y)|'| dy + \int_F ||f(y)|'| dy \\
&= \|f'\|_1.
\end{aligned}$$

Тим самим теорема доведена. □

3.3 Обмеженість максимального оператора у просторах Соболева

У цьому підрозділі ми розглянемо питання обмеженості максимального оператора у просторах Соболева $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$. Має місце наступна теорема.

Теорема 3.4. Нехай $1 < p < \infty$. Якщо $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, тоді $Mf \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ і

$$|D_i Mf| \leq M D_i f, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15)$$

майже всюди в $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\chi_{B(0,r)}$ — характеристична функція кулі $B(0,r)$ та

$$\chi_r = \frac{\chi_{B(0,r)}}{|B(0,r)|}.$$

Тоді

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy = |f| * \chi_r(x),$$

де через $*$ позначається згортка відповідних функцій. Далі, для кожного $r > 0$ згортка $|f| * \chi_r \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ та справедлива наступна рівність

$$D_i(|f| * \chi_r) = \chi_r * D_i|f|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

майже всюди в $\mathbb{R}^n$. Дійсно, згідно з теоремою 3.2, $|f|$ також буде належати $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ та

$$D_i|f(x)| = \begin{cases} D_i f, & \text{якщо } f > 0, \\ 0, & \text{якщо } f = 0, \\ -D_i f, & \text{якщо } f < 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (|f| * \chi_r)(x) \phi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y-x)| \chi(y) dy \phi'(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y-x)| \phi'(x) dx \chi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} D_i |f(y-x)| \phi(x) dx \chi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} D_i |f(x)| * \chi(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

для всіх диференційовних функцій $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. За нерівністю Юнга та (3.17)

отримуємо, що

$$\|D_i(|f| * \chi_r)\|_p \leq \|D_i|f|\|_p = \|D_i f\|_p.$$

Нехай r_j , де $j = 1, 2, \dots$, буде переліком додатних раціональних чисел. Оскільки f є локально сумовною функцією, ми можемо обмежитися лише додатними раціональними радіусами в визначенні максимальної функції. Отже

$$Mf(x) = \sup_j (|f| * \chi_{r_j})(x).$$

Визначимо функції $v_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, де $k = 1, 2, \dots$, наступним чином:

$$v_k(x) = \max_{1 \leq j \leq k} (|f| * \chi_{r_j})(x).$$

Отримуємо, що $\{v_k\}$ — зростаюча послідовність функцій у $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, яка збігається до Mf поточно та

$$\begin{aligned} |D_i v_k| &\leq \max_{1 \leq j \leq k} |D_i(|f| * \chi_{r_j})| = \max_{1 \leq j \leq k} |\chi_{r_j} * D_i f| \\ &\leq M D_i |f| = M D_i f, \end{aligned}$$

де $i = 1, 2, \dots, n$, майже всюди в $\mathbb{R}^n$. При отриманні попередньої нерівності був використан той факт, що $|D_i|f|| = |D_i f|$ майже всюди, де $i = 1, 2, \dots, n$. Таким чином,

$$\|D v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|D_i v_k\|_p \leq \sum_{i=1}^n \|M D_i f\|_p.$$

Використаємо попередню нерівність та максимальну теорему 1.2 разом і отримаємо

$$\begin{aligned} \|v_k\|_{1,p} &= \|v_k\|_p + \sum_{i=1}^n \|D_i v_k\|_p \leq \|Mf\|_p + \sum_{i=1}^n \|M D_i f\|_p \\ &\leq C_p \|f\|_p + C_p \sum_{i=1}^n \|D_i f\|_p = C_p \|f\|_{1,p} < \infty \end{aligned}$$

для всіх $k = 1, 2, \dots$. Отже, послідовність $\{v_k\}$ є обмеженою в $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, що

збігається до Mf поточково. Через слабку компактність просторів Соболева отримуємо, що $Mf \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, послідовність $\{v_k\}$ слабо збігається до Mf в $L^p(\mathbb{R}^n)$ і $D_i v_k$ слабо збігається до $D_i Mf$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Так як $|D_i v_k| \leq M D_i f$ майже всюди, слабка збіжність передбачає, що

$$|D_i Mf| \leq M D_i f, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

майже всюди в $\mathbb{R}^n$. □

Зауваження 3.3. Випадок $p = 1$ виключено з теореми, так як доведення базується на обмеженості максимального оператора у L^p . Але для цього випадку справедлива наступна теорема.

Теорема 3.5. *Якщо $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, то похідна Mf — сумовна функція та*

$$\|(Mf)'\|_1 \leq 2\|f'\|_1. \quad (3.18)$$

Доведення. Для доведення цієї теореми розглянемо односторонні максимальні функції $M_l f$ та $M_r f$. Неважко побачити, що

$$Mf(x) = \max \{M_l f, M_r f\}.$$

Далі, застосовуючи лему 3.3, ми отримаємо

$$\|(Mf)'\|_1 \leq \|(M_l f)'\|_1 + \|(M_r f)'\|_1. \quad (3.19)$$

Оскільки за умовою $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, то ми можемо використати теорему 3.3, і тоді нерівність (3.19) буде мати вигляд

$$\|(Mf)'\|_1 \leq \|f'\|_1 + \|f'\|_1 = 2\|f'\|_1.$$

Отже, теорема доведена. □

Зауваження 3.4. Використовуючи разом нерівності (1.2) та (3.15), ми отримуємо

$$\|Mf\|_{1,p} = \|Mf\|_p + \|Df\|_p \leq C\|f\|_p + \|M|Df|\|_p \leq C\|f\|_{1,p},$$

де C — та сама константа, що і у (1.2). Отже,

$$M: W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty$$

обмежений оператор.

Висновки

В роботі вивчалися властивості максимальних функцій, що пов'язані з неперервністю і слабкою диференційовністю. Зокрема в роботі ми

- встановили достатні умови неперервності максимальної функції та критерій неперервності Mf та $M_c f$;
- дослідили деякі властивості функцій, що належать до просторів Соболева;
- розглянули теореми про обмеженість максимального оператора в просторах Соболева.

У самостійній частині роботи доведена теорема 3.2, побудовані приклади, що ілюструють зміст теорем, що розглянуті в роботі, зокрема,

- побудовано приклади, що показують, що неперервність функції не є необхідною умовою для неперервності її максимальних функцій;
- знайдені слабкі похідні для деяких функцій, які не є диференційовними у класичному сенсі;
- наведені приклади функцій, що належать та не належать певним просторам Соболева.

Список літератури

1. Berberian S. K. Fundamentals of Real Analysis. New York : Springer-Verlag, 1999. 480 p.
2. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2001. 517 p.
3. Grafakos L. Classical fourier analysis. New York, NY : Springer New York, 2014. 655 p.
4. Grafakos L. Modern fourier analysis. New York, NY : Springer New York, 2014. 640 p.
5. Kinnunen J. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function / J. Kinnunen // Israel journal of mathematics. 1997. Vol. 100, no. 1. P. 117–124.
6. Stein E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton, N.J : Princeton University Press, 1970. 287 p.
7. Tanaka H. A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function / H. Tanaka // Bulletin of the Australian mathematical society. 2002. Vol. 65, no. 2. P. 253–258.