

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій
Кафедра методів математичної фізики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»
«Розв’язання тривимірних задач термодинаміки»
**«Solving of three-dimensional problems of
thermodynamics»**

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Ємець Микита Віталійович

Керівник: ст. викл. Толкачев А. В. _____

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С. _____

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від _____ 2025 р.

Завідувач кафедри

Захищено на засіданні ЕК № _____

Протокол № ____ від _____ 2025 р.

Оцінка _____ / _____ / _____

Голова ЕК

Одеса — 2025 р.

ЗМІСТ

Вступ	3
1 Стаціонарна задача теплопровідності для складеного з n шарів паралелепіпеда	5
1.1 Постановка задачі.	5
1.2 Зведення задачі до одновимірної	6
1.3 Розв'язання одновимірної крайової задачі:	7
1.4 Розв'язок у просторі оригіналів	12
2 Стаціонарна задача теплопровідності для складеного паралелепіпеда із трьох шарів	13
2.1 Постановка задачі	13
2.2 Зведення задачі до одновимірної	14
2.3 Розв'язання одновимірної задачі у просторі трансформант .	15
2.4 Розв'язок у просторі оригіналів	17
3 Отримання чисельних результатів	18
3.1 Розрахунок $g_{\alpha\beta}$ для різних функцій $g(x, y)$ у граничній умові (2.7):	18
Висновки	25
Додаток А	26
Список літератури	31

ВСТУП

Задачі теплопровідності виникають під час інженерного проектування споруд, конструкцій або техніки. Такі задачі мають велику практичну цінність, так як дозволяють знаходити розподілення температури у двовимірних та тривимірних тілах різної структури. Динамічні та статичні задачі теплопровідності розглядалися багатьма авторами у різних постановках.

Зокрема, Bernard Deconinck у своїй роботі [1] розглядає схожі об'єкти — одновимірні кусково-однорідні композитні матеріали. Розв'язує для таких об'єктів проблему теплопровідності шляхом надання явного розв'язку одновимірного рівняння теплопровідності в кожній області. Розташування поверхонь розділу у одновимірних кусково-однорідних матеріалів відоме, але там не задано ні температуру, ні тепловий потік. Натомість, єдиними умовами, що накладаються, є фізичні припущення їх неперервності на поверхнях розділу. Детально розглядається задача двох напівнескінчених областей та більш проста задача двох областей скінченного розміру.

Ще можемо навести статтю авторів Dong, H. Cui, J. та інші [2] де розроблено новий обчислювальний метод для задач теплопровідності композитних структур з різноманітними періодичними конфігураціями в різних піддоменах. Успішно отримано розв'язки за допомогою методу асимптотичної гомогенізації.

У своїй роботі Yang, X.-S. [3] надає практичне застосування задачам теплопровідності. У цій роботі змодельовано теплопередачу вуглецевих нанотрубок. Ці результати мають надважливе значення для управління композиціями на основі нанотрубок та наноелектронними пристроями. Моделювання було проведено за допомогою методу скінчених елементів для тривимірної анізотропної теплопередачі. Моделювання показує, що масиви нанотрубок мають унікальні характеристики охолодження завдяки своїй анізотропній теплопровідності.

Розглянуто стаціонарну задачу теплопровідності для складеного паралелепіпеда. Вихідну задачу зведено до одновимірної за допомогою інтегральних перетворень Фур'є. Коефіцієнти розв'язків одновимірної задачі для кожного шару отримано через побудову системи лінійних алгебраїчних

рівнянь та подальше розв'язання цієї системи стійким для погано обумовлених матриць методом Гауса з частковим вибором головного елемента за стовпцем. За отриманими коефіцієнтами знайдено розв'язки та отримано розрахункові формули. Побудовано програму для обчислень значень розв'язків.

Метод інтегральних перетворень розглянуто у [4], [5]. У цих посібниках також вказано види інтегральних перетворень, та методи їх вибору та застосування.

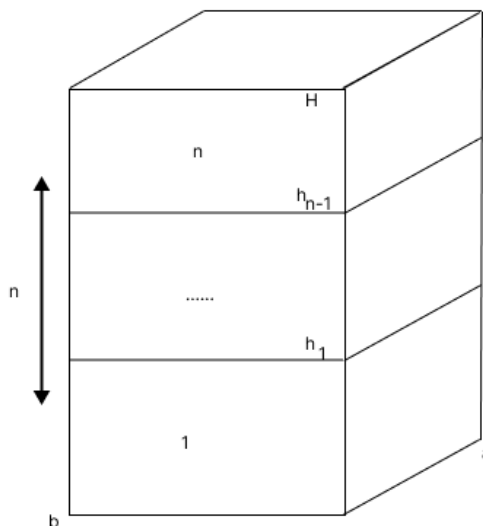
РОЗДІЛ 1

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО З n ШАРІВ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

1.1 Постановка задачі.

Розглянемо задачу стаціонарної теплопровідності для паралелепіпеда, який складений з n шарів. На кожному шарі задана відповідна функція, яка описує розподілення тепла.

$$\begin{aligned}
 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq h_1, \quad t_1(x, y, z) \\
 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad h_1 \leq z \leq h_2, \quad t_2(x, y, z) \\
 \dots\dots\dots \\
 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad h_{n-1} \leq z \leq H, \quad t_n(x, y, z)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$



Оператор Лапласа для цих задач буде мати вигляд,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}
 \tag{1.2}$$

Отримуємо n рівнянь відносно n функцій теплопровідності, які відповідають n шарам паралелепіпеда

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= 0 & 0 \leq z \leq h_1 \\ \Delta t_2 &= 0 & h_1 \leq z \leq h_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta t_n &= 0 & h_{n-1} \leq z \leq H\end{aligned}\tag{1.3}$$

Ці рівняння розглядаються при відповідних крайових умовах на границях паралелепіпеда

$$\begin{aligned}t_j|_{x=0} &= t_j|_{x=a} = 0, & j = 1, 2, \dots, n \\ t_j|_{y=0} &= \frac{\partial t_j}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, & j = 1, 2, \dots, n \\ t_1|_{z=0} &= 0, & \left(\frac{\partial t_n}{\partial z} + B t_n \right) \Big|_{z=H} = g(x, y)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Та умовах ідеального теплового контакту на межах шарів у середині паралелепіпеда

$$\begin{aligned}z = h_1 : t_1|_{z=h_1} &= t_2|_{z=h_1}; \quad \left(k_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} = \left(k_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} \\ z = h_2 : t_2|_{z=h_2} &= t_3|_{z=h_2}, \quad \left(k_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} = \left(k_3 \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} \\ &\dots\dots\dots \\ z = h_{n-1} : t_{n-1}|_{z=h_{n-1}} &= t_n|_{z=h_{n-1}}, \quad \left(k_{n-1} \frac{\partial t_{n-1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_{n-1}} = \left(k_n \frac{\partial t_n}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_{n-1}}\end{aligned}\tag{1.5}$$

1.2 Зведення задачі до одновимірної

Скористаємося синус-перетворенням Фур'є за змінною x

$$t_\alpha = \int_0^a t(x, y, z) \sin(\alpha x) dx, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{a}, \quad k \in \mathbb{N}.\tag{1.6}$$

З формулою обернення

$$t(x, y, z) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} t_{\alpha} \sin(\alpha_k x), \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{a}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Також застосуємо синус-перетворення (нестандартне) Фур'є за змінною y

$$t_{\alpha\beta}(z) = \int_0^b t_{\alpha}(y, z) \sin(\beta y) dy, \quad \beta = \frac{\pi(2k-1)}{2b}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

З формулою обернення

$$t_{\alpha}(y, z) = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} t_{\alpha\beta} \sin(\beta_k y), \quad \beta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2b}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

1.3 Розв'язання одновимірної крайової задачі:

Після застосування інтегральних перетворень отримуємо одновимірну крайову задачу відносно n трансформант вихідних функцій

$$\begin{aligned} t''_{1\alpha\beta} - N^2 t_{1\alpha\beta} &= 0 \\ t''_{2\alpha\beta} - N^2 t_{2\alpha\beta} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ t''_{n\alpha\beta} - N^2 t_{n\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Крайові умови після застосування інтегральних перетворень набувають вигляду

$$t_{1\alpha\beta}(0) = 0, \quad t'_{n\alpha\beta}(H) + B t_{n\alpha\beta}(H) = g_{\alpha\beta} \quad (1.11)$$

Умови ідеального теплового контакту набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
 t_{1\alpha\beta}(h_1) &= t_{2\alpha\beta}(h_1), & k_1 t'_{1\alpha\beta}(h_1) &= k_2 t'_{2\alpha\beta}(h_1) \\
 t_{2\alpha\beta}(h_2) &= t_{3\alpha\beta}(h_2), & k_2 t'_{2\alpha\beta}(h_2) &= k_3 t'_{3\alpha\beta}(h_2) \\
 &\dots\dots\dots \\
 t_{(n-1)\alpha\beta}(h_{n-1}) &= t_{n\alpha\beta}(h_{n-1}), & k_{n-1} t'_{(n-1)\alpha\beta}(h_{n-1}) &= k_n t'_{n\alpha\beta}(h_{n-1})
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Розв'язки цих задач мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 t_{1\alpha\beta}(z) &= C_{11}e^{Nz} + C_{12}e^{-Nz} \\
 t_{2\alpha\beta}(z) &= C_{21}e^{Nz} + C_{22}e^{-Nz} \\
 &\dots \\
 t_{n\alpha\beta}(z) &= C_{n1}e^{Nz} + C_{n2}e^{-Nz}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Задовольнимо умови ідеального теплового контакту, підставивши розв'язки (1.13) в рівняння умов (1.12), та у крайові умови (1.11). Отримуємо $2n$ лінійних рівнянь відносно $2n$ невідомих коефіцієнтів розв'язків. Складемо СЛАР з цих $2n$ рівнянь. Отримуємо матричне рівняння відносно невідомих коефіцієнтів:

$$AC = b$$

де вектор правої частини $b = (0, 0, \dots, g_{\alpha\beta})^T$ належить простору $\mathbb{R}^{2n}$, а матрицю A , яка належить простору $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ отримуємо у вигляді:

$$A = \begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 e^{H_1} & -e^{-H_1} & -e^{H_1} & -e^{-H_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 k_1 e^{H_1} & -k_1 e^{-H_1} & -k_2 e^{H_1} & k_2 e^{-H_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & e^{H_2} & e^{-H_2} & -e^{H_2} & -e^{-H_2} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -k_2 e^{H_2} & -k_2 e^{-H_2} & -k_3 e^{H_2} & k_3 e^{-H_2} & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ell_1 & \ell_2
 \end{pmatrix}$$

Тут позначено: $H_i = Nh_i$, та $\ell_1 = Ne^{NH} + Be^{NH}$, $\ell_2 = Be^{-NH} - Ne^{-NH}$.

Переставляємо місцями перший та $2n - 1$ рядок. Поділимо другий рядок на e^{H_1} . Також, далі поділимо всі парні рядки, окрім останнього $2n$ на $-k_n e^{-H_n}$. Отримуємо матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2H_1} & -1 & -e^{-2H_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(k_2-k_1)e^{2H_1}}{2k_1} & -\frac{(k_1+k_2)}{2k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{-2H_2} & -1 & -e^{-2H_2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(k_3-k_2)e^{2H_2}}{2k_2} & \frac{(k_2+k_3)}{2k_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}$$

Далі перетворюємо передостанній рядок. Отримаємо після множення та віднімання першого рядка:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 - e^{2H_1} & 1 & e^{-2H_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Тепер віднімемо другий рядок:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{53} &= 1 - \frac{k_2 - k_1}{2k_1} e^{2H_1} (1 - e^{-2H_1}) = 1 - \frac{k_2 - k_1}{2k_1} e^{2H_1} + \frac{k_2 + k_1}{2k_1} = \\ &= \frac{1 + e^{2H_1}}{2} + \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1 - e^{2H_1}}{2} = e^{H_1} \left(\text{ch}(H_1) + \frac{k_2}{k_1} \text{sh}(H_1) \right) \end{aligned}$$

$$\alpha_{54} = e^{-H_1} (\text{ch } H_1 + \frac{k_2}{k_1} \text{sh } H_1) e^{H_1}$$

$$\text{Поділимо на } \left(\text{ch}(H_1) + \frac{k_2}{k_1} \text{sh}(H_1) \right) e^{H_1}$$

Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & e^{-2H_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Покладемо замість першого рядка суму першого рядка та передостаннього.

Отримуємо перший рядок

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-2H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Віднімемо третій рядок від передостаннього, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{-2H_1} - e^{-2H_2} & 1 & e^{-2H_2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Віднімемо четвертий рядок та поділимо на

$$\left(\text{ch}(H_2 - H_1) + \frac{k_3}{k_2} \text{sh}(H_2 - H_1) \right) e^{-H_2 - H_1}.$$

Отримаємо передостанній рядок у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e^{-2H_2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Віднімаємо цей рядок від третього, отримуємо третій рядок у вигляді

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & e^{-2H_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Продовжуючи цей процес до $2n - 2$ отримуємо матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(k_2 - k_1)e^{2H_1}}{2k_1} & -\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{-2H_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(k_3 - k_2)e^{2H_2}}{2k_2} & -\frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & e^{-2H_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & l_2 - l_1 e^{-2H_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Проведемо обернений хід методу Гаусса, та отримаємо розв'язок:

$$C_{2n} = \frac{g_{\alpha\beta}}{l_2 - l_1 e^{-2H_{n-1}}} \quad L = l_2 - l_1 e^{-2H_{n-1}};$$

$$\begin{aligned}
C_{2n-1} &= -\frac{g_{\alpha\beta}}{L} e^{-2H_{n-1}}, \\
C_{2n-2} &= \frac{(k_n + k_{n-1})}{2k_{n-1}} \cdot \frac{g_{\alpha\beta}}{L} - \frac{(k_n - k_{n-1})e^{2H_{n-1}}}{2k_{n-1}} \cdot \left(-\frac{g_{\alpha\beta}}{L} e^{-2H_{n-1}}\right) = \\
&= \frac{k_n g_{\alpha\beta}}{k_{n-1} L}, \\
C_{2n-3} &= -e^{-2H_{n-1}} \frac{g_{\alpha\beta}}{L} \frac{k_n}{k_{n-1}}, \\
C_{2n-4} &= \frac{g_{\alpha\beta} k_n}{2L k_{n-2} k_{n-1}} \left((k_{n-1} - k_{n-2}) e^{2(H_{n-2} - H_{n-1})} + (k_{n-2} + k_{n-1}) \right) = \\
&= \frac{g_{\alpha\beta} k_n}{L k_{n-1}} e^{(H_{n-2} - H_{n-1})} \left(\frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} \operatorname{ch}(H_{n-1} - H_{n-2}) + \operatorname{sh}(H_{n-1} - H_{n-2}) \right) \\
C_{2n-5} &= -C_{2n-4} e^{-2H_{n-2}} = \\
&= -\frac{g_{\alpha\beta} k_n}{L k_{n-1}} e^{(-H_{n-2} - H_{n-1})} \left(\frac{k_{n-1}}{k_{n-2}} \operatorname{ch}(H_{n-1} - H_{n-2}) + \operatorname{sh}(H_{n-1} - H_{n-2}) \right), \\
&\dots
\end{aligned}$$

Продовжуючи проце отримуємо до останнього коефіцієнта

$$C_1 = \frac{g_{\alpha\beta} k_n}{L k_{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} e^{-H_{n+i-1} - H_{n+i}} \left(\frac{k_{n-i}}{k_{n-i-1}} \operatorname{ch}(H_{n-i} - H_{n-i-1}) + \operatorname{sh}(H_{n-i} - H_{n-i-1}) \right)$$

У загальному випадку отримуємо

$$C_{2n} = C_{2n+2} e^{H_n - H_{n+1}} \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \operatorname{ch}(H_{n+1} - H_n) + \operatorname{sh}(H_{n+1} - H_n) \right)$$

$$c_{2n-1} = -C_{2n} e^{-2H_n}$$

Таким чином, отримуємо формули для коефіцієнтів розв'язків

Спрощуючи отримуємо розв'язки у просторі трансформант:

$$t_{i\alpha\beta}(z) = 2C_{2i} e^{-H_i} \operatorname{sh}(H_i - Nz) \quad i = \overline{1, n-1}$$

1.4 Розв'язок у просторі оригіналів

Застосовуючи обернені формули інтегральних перетворень, отримуємо

$$t_i(x, y, z) = \frac{4}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2C_{2i} e^{-H_i} \operatorname{sh}(H_i - Nz) \sin(\alpha_k x) \sin(\beta_m y),$$

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{a}, \beta_m = \frac{\pi(2m-1)}{2b}, i = \overline{1, n-1}.$$

Де $k, m \in \mathbb{N}$

РОЗДІЛ 2

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА ІЗ ТРЬОХ ШАРІВ

2.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу для складеного з трьох шарів паралелепіпеда. Кожен шар має свій коефіцієнт теплопровідності:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq h_1, \quad t_1(x, y, z) \\ 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad h_1 \leq z \leq h_2, \quad t_2(x, y, z) \\ 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad h_2 \leq z \leq H, \quad t_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Оператор Лапласа для цієї задачі буде мати вигляд,

$$\Delta t_j = \frac{\partial^2 t_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

де t_j $j = \overline{1,3}$ — це функції розподілу температури у відповідному шарі

$$\Delta t_1 = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq h_1 \quad (2.3)$$

$$\Delta t_2 = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad h_1 \leq z \leq h_2 \quad (2.4)$$

$$\Delta t_3 = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad h_2 \leq z \leq H \quad (2.5)$$

Ці рівняння розглядаються при відповідних крайових умовах на границях паралелепіпеда

$$\begin{aligned} t_j|_{x=0} = t_j|_{x=a} = 0, \quad j = 1,2,3 \\ t_j|_{y=0} = \frac{\partial t_j}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, \quad j = 1,2,3 \\ t_1|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial t_3}{\partial z} + B t_3 \right) \Big|_{z=H} = g(x, y). \quad (2.7)$$

Та умовах ідеального теплового контакту на межах шарів у середині паралелепіпеда

$$\begin{aligned} z = h_1 : t_1|_{z=h_1} &= t_2|_{z=h_1}; \quad \left(k_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} = \left(k_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} \\ z = h_2 : t_2|_{z=h_2} &= t_3|_{z=h_2}, \quad \left(k_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} = \left(k_3 \frac{\partial t_3}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2 Зведення задачі до одновимірної

Скористаємося синус-перетворенням Фур'є за змінною x

$$t_\alpha = \int_0^a t(x, y, z) \sin(\alpha x) dx, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{a}, \quad k \in \mathbb{N}$$

З формулою обернення

$$t(x, y, z) = \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} t_\alpha \sin(\alpha_k x), \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{a}.$$

Також застосуємо синус-перетворення (нестандартне) Фур'є за змінною y

$$t_{\alpha\beta}(z) = \int_0^b t_\alpha(y, z) \sin(\beta y) dy, \quad \beta = \frac{\pi(2k-1)}{2b}, \quad k \in \mathbb{N}$$

З формулою обернення

$$t_\alpha(y, z) = \frac{2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} t_{\alpha\beta} \sin(\beta_k y), \quad \beta_k = \frac{\pi(2k-1)}{2b}.$$

2.3 Розв'язання одновимірної задачі у просторі трансформант

Отримуємо три рівняння для трьох шарів.

$$\begin{aligned} t''_{1\alpha\beta} - N^2 t_{1\alpha\beta} &= 0 \\ t''_{2\alpha\beta} - N^2 t_{2\alpha\beta} &= 0 \\ t''_{3\alpha\beta} - N^2 t_{3\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $N^2 = \alpha_k^2 + \beta_k^2$. Розв'язки цих трьох задач знадемо у вигляді

$$\begin{aligned} t_{1\alpha\beta}(z) &= C_{11}e^{Nz} + C_{12}e^{-Nz} \\ t_{2\alpha\beta}(z) &= C_{21}e^{Nz} + C_{22}e^{-Nz} \\ t_{3\alpha\beta}(z) &= C_{31}e^{Nz} + C_{32}e^{-Nz} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Крайові умови за змінними x та y були використані для побудови трансформант. Для однорідної задачі залишаються тільки граничні умови за змінною z та умови ідеального теплового контакту (рівність температур та теплових потоків) на межах шарів.

Звідси отримуємо крайові умови для одновимірної задачі:

$$\begin{aligned} t_{1\alpha\beta}(0) &= 0, \quad t'_{3\alpha\beta}(H) + Bt_{3\alpha\beta}(H) = g_{\alpha\beta} \\ t_{1\alpha\beta}(h_1) &= t_{2\alpha\beta}(h_1), \quad k_1 t'_{1\alpha\beta}(h_1) = k_2 t'_{2\alpha\beta}(h_1) \\ t_{2\alpha\beta}(h_2) &= t_{3\alpha\beta}(h_2), \quad k_2 t'_{2\alpha\beta}(h_2) = k_3 t'_{3\alpha\beta}(h_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Задовольняючи крайові умови та умови ідеального теплового контакту на границях трьох шарів отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Права частина цієї системи має вигляд:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}^T$$

Матриця цієї системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{H_1} & -e^{-H_1} & -e^{H_1} & -e^{-H_1} & 0 & 0 \\ k_1 e^{H_1} & -k_1 e^{-H_1} & -k_2 e^{H_1} & k_2 e^{-H_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{H_2} & e^{-H_2} & -e^{H_2} & -e^{-H_2} \\ 0 & 0 & -k_2 e^{H_2} & -k_2 e^{-H_2} & -k_3 e^{-H_2} & k_3 e^{-H_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}$$

Застосовуючи метод Гауса у порядку описаному у першому розділі зведемо систему до трикутного виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(k_2 - k_1)e^{2H_1}}{2k_1} & -\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & e^{-2H_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(k_3 - k_2)e^{2H_2}}{2k_2} & -\frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e^{-2H_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell_2 \ell_1 e^{-2H_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Розв'язуючи, знаходимо шукані коефіцієнти

$$C_{32} = \frac{g_{\alpha\beta}}{l_2 - l_1 e^{-2H_2}} \quad L = l_2 - l_1 e^{-2H_2};$$

$$C_{31} = -\frac{g_{\alpha\beta}}{L} e^{-2H_2},$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot \frac{g_{\alpha\beta}}{L} - \frac{(k_3 - k_2)e^{2H_2}}{2k_2} \cdot \left(-\frac{g_{\alpha\beta}}{L} e^{-2H_2} \right) = \\ &= \frac{k_3 g_{\alpha\beta}}{k_2 L}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= -e^{-2H_2} \frac{g_{\alpha\beta} k_3}{L k_2}, \\
C_{12} &= \frac{g_{\alpha\beta} k_3}{2L k_1 k_2} \left((k_2 - k_1) e^{2(H_1 - H_2)} + (k_1 + k_2) \right) = \\
&= \frac{g_{\alpha\beta} k_3}{L k_2} e^{(H_1 - H_2)} \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{ch}(H_2 - H_1) + \operatorname{sh}(H_2 - H_1) \right) \\
C_{11} &= -\frac{g_{\alpha\beta} k_3}{L k_2} e^{(-H_1 - H_2)} \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{ch}(H_2 - H_1) + \operatorname{sh}(H_2 - H_1) \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, спрощуючи, знаходимо розв'язки для трьох функцій, які описують теплопровідність на трьох шарах паралелепіпеда.

$$\begin{aligned}
t_{1\alpha\beta}(z) &= 2 \frac{g_{\alpha\beta} k_3}{L k_2} e^{-H_2} \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{ch}(H_2 - H_1) + \operatorname{sh}(H_2 - H_1) \right) \operatorname{sh}(H_1 - Nz) \\
t_{2\alpha\beta}(z) &= 2 \frac{g_{\alpha\beta} k_n}{L k_{n-1}} e^{-H_2} \operatorname{sh}(H_2 - Nz) \\
t_{3\alpha\beta}(z) &= 2 \frac{g_{\alpha\beta}}{L} e^{-H_2} \operatorname{sh}(H_2 - Nz)
\end{aligned}$$

2.4 Розв'язок у просторі оригіналів

Використаймо обернене скінченне перетворення $\sin$ -Фур'є та отримаємо розв'язок у просторі оригіналів

$$\begin{aligned}
t_1(x, y, z) &= \frac{4}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{g_{\alpha\beta} k_3}{L k_2} e^{-H_2} \left(\frac{k_2}{k_1} \operatorname{ch}(H_2 - H_1) + \operatorname{sh}(H_2 - H_1) \right) \times \\
&\quad \times \operatorname{sh}(H_1 - Nz) \sin(\alpha_k x) \sin(\beta_m y), \\
t_2(x, y, z) &= \frac{4}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{g_{\alpha\beta} k_n}{L k_{n-1}} e^{-H_2} \operatorname{sh}(H_2 - Nz) \sin(\alpha_k x) \sin(\beta_m y), \\
t_3(x, y, z) &= \frac{4}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2 \frac{g_{\alpha\beta}}{L} e^{-H_2} \operatorname{sh}(H_2 - Nz) \sin(\alpha_k x) \sin(\beta_m y).
\end{aligned}$$

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{a}, \beta_m = \frac{\pi(2m-1)}{2b}. \text{ Де } k, m \in \mathbb{N}$$

РОЗДІЛ 3

ОТРИМАННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

3.1 Розрахунок $g_{\alpha\beta}$ для різних функцій $g(x, y)$ у граничній умові (2.7):

Нехай у формулі (2.7) $g(x, y) = x^2 y^2$. Тоді отримуємо

$$g_{\alpha\beta} = \int_0^a \int_0^b \xi^2 \eta^2 \sin \alpha \xi \sin \beta \eta d\xi d\eta$$

перепишемо цей інтеграл як повторний

$$g_{\alpha\beta} = \int_0^a \xi^2 \sin \alpha \xi d\xi \int_0^b \eta^2 \sin \beta \eta d\eta$$

Знайдемо цей інтеграл по частинам

$$\begin{aligned} \int_0^b \eta^2 \sin \beta \eta d\eta &= \left. \frac{-\eta^2 \cos \beta \eta}{\beta} \right|_0^b + \frac{2}{\beta} \int_0^b \eta \cos \beta \eta d\eta = \\ &= \left. \frac{-\eta^2 \cos \beta \eta}{\beta} \right|_0^b + \frac{2}{\beta} \left[\left. \frac{\eta \sin \beta \eta}{\beta} \right|_0^b - \frac{1}{\beta} \int_0^b \sin \beta \eta d\eta \right] = \\ &= \frac{-b^2 \cos \beta b}{\beta} + \frac{2b \sin \beta b}{\beta^2} + \frac{4 \sin^2 \beta b / 2}{\beta^3} \end{aligned}$$

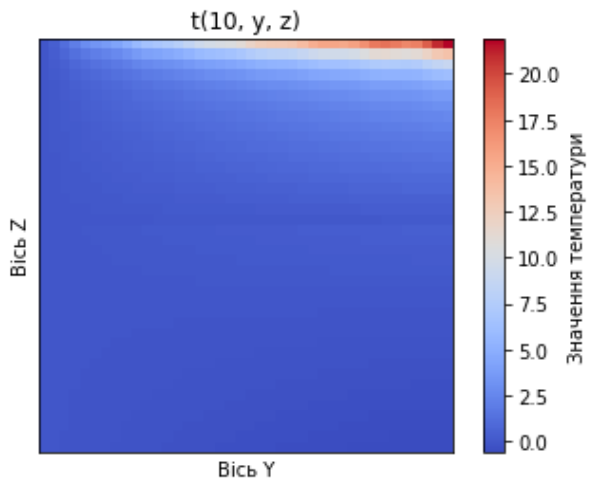
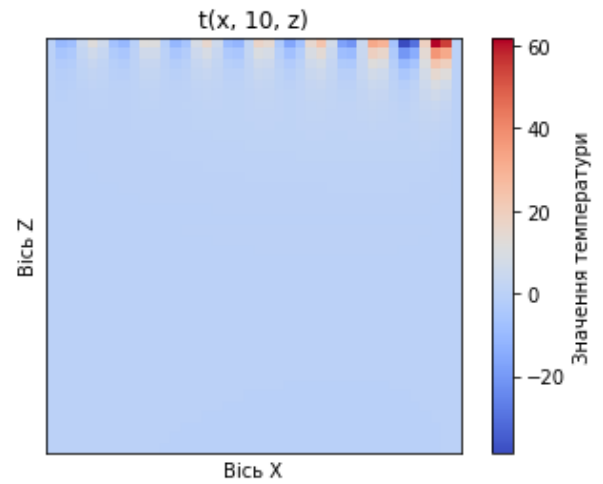
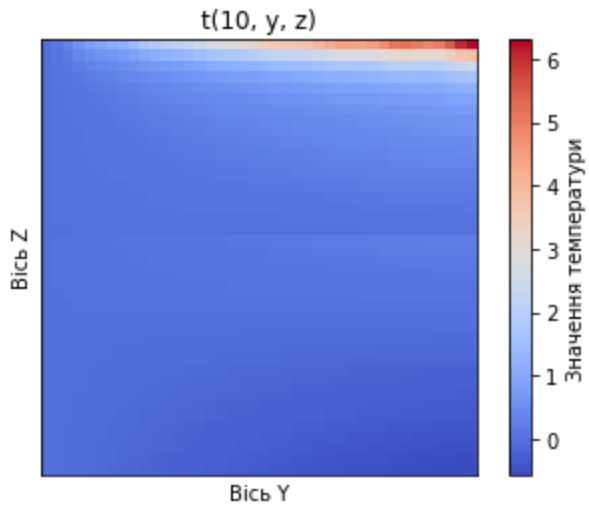
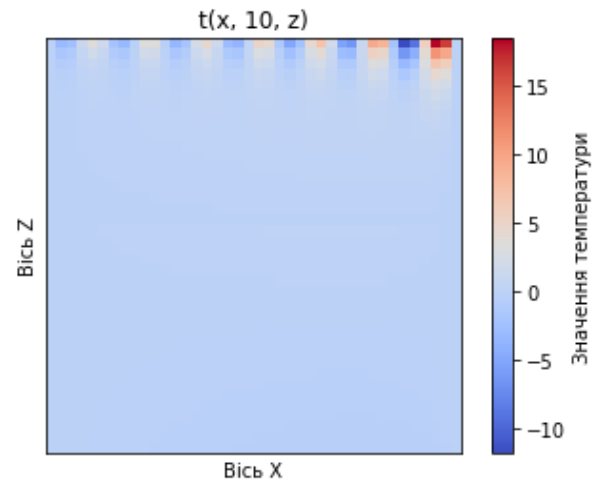
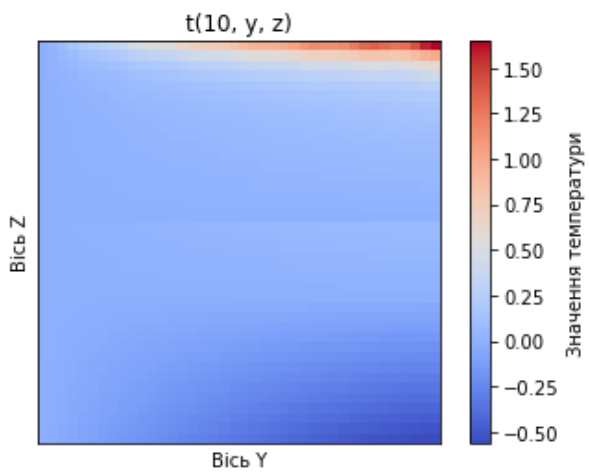
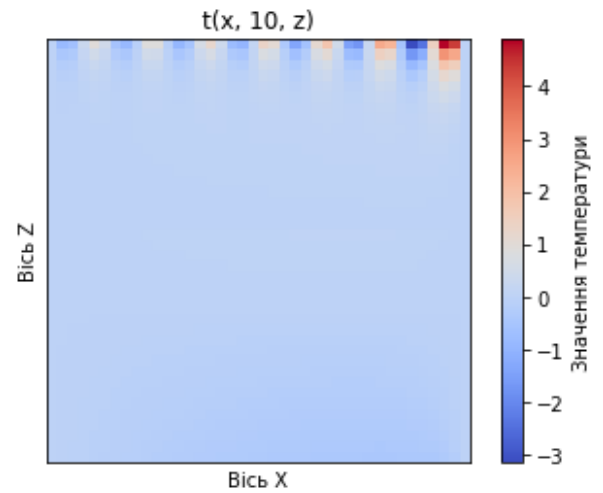
Отримуємо, що в цьому випадку

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \left(\frac{-b^2 \cos \beta b}{\beta} + \frac{2b \sin \beta b}{\beta^2} + \frac{4 \sin^2 \beta b / 2}{\beta^3} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{-a^2 \cos \alpha a}{\alpha} + \frac{2a \sin \alpha a}{\alpha^2} + \frac{4 \sin^2 \alpha a / 2}{\alpha^3} \right) \end{aligned}$$

Для розрахунків покладемо значення параметрів:

- Параметр теплообміну на границі $z = H$ $B = 1$
- Границі шарів $h_1 = 5, h_2 = 7, H = 11$

- Розміри паралелепіпеда $0 < x < a = 20$, $0 < y < b = 20$, $0 < z < H = 11$.

Рис. 3.1. $k_1 = 3, k_2 = 9, k_3 = 15$ Рис. 3.4. $k_1 = 3, k_2 = 9, k_3 = 15$ Рис. 3.2. $k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9$ Рис. 3.5. $k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9$ Рис. 3.3. $k_1 = 15, k_2 = 9, k_3 = 3$ Рис. 3.6. $k_1 = 15, k_2 = 9, k_3 = 3$

Також побудовано графіки температури в залежності від змінної z при фіксованих $x = 10, y = 10$

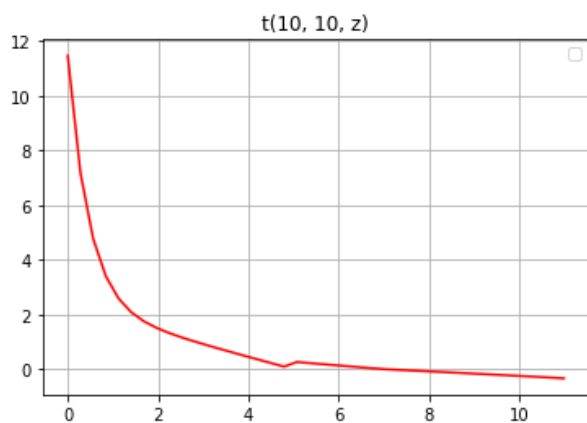


Рис. 3.7. $k_1 = 3, k_2 = 9, k_3 = 15$

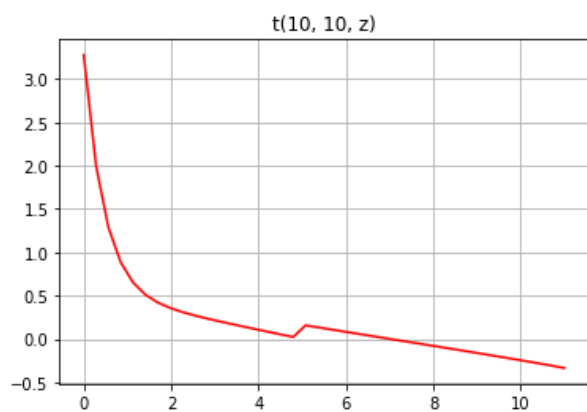


Рис. 3.8. $k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9$

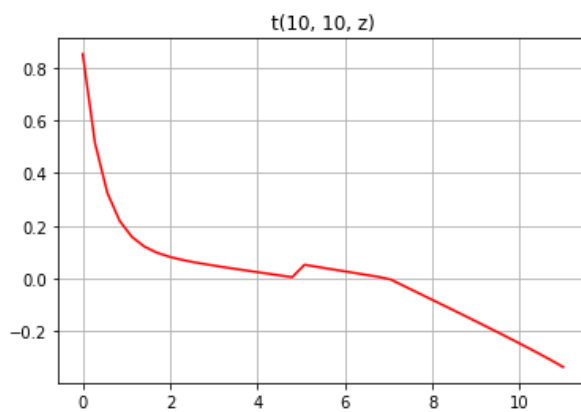


Рис. 3.9. $k_1 = 15, k_2 = 9, k_3 = 3$

Якщо у формулі (2.7) $g(x, y) = \cos(x + y)$

$$g_{\alpha\beta} = \int_0^a \int_0^b \cos(\xi + \eta) \sin \alpha \xi \sin \beta \eta d\xi d\eta$$

Перепишемо цей інтеграл як повторний

$$g_{\alpha\beta} = \int_0^a \sin \alpha \xi d\xi \int_0^b \cos(\xi + \eta) \sin \beta \eta d\eta$$

Знайдемо другий інтеграл за змінною η по частинам

$$\begin{aligned} \int_0^b \cos(\xi + \eta) \sin \beta \eta d\eta &= \left. \frac{-\cos(\xi + \eta) \cos \beta \eta}{\beta} \right|_0^b - \frac{1}{\beta} \int_0^b \sin(\xi + \eta) \cos \beta \eta d\eta = \\ &= \left. \frac{-\cos(\xi + \eta) \cos \beta \eta}{\beta} \right|_0^b - \left. \frac{\sin(\xi + \eta) \sin \beta \eta}{\beta^2} \right|_0^b + \frac{1}{\beta^2} \int_0^b \cos(\xi + \eta) \sin \beta \eta d\eta \end{aligned}$$

Методом зведення до першого інтеграла, використовуючи формули добутку тригонометричних функцій та порівнюючи подібні доданки, отримуємо, що інтеграл за змінною η

$$I = \frac{\sigma_1 \cos(\xi + \sigma_2 b) - \sigma_2 \cos(\xi + \sigma_1 b) - 2\beta \cos \xi}{2\sigma_1 \sigma_2}$$

де $\sigma_1 = 1 + \beta$, $\sigma_2 = 1 - \beta$

Візьмемо інтеграл за ξ по частинах. Для першого доданку маємо

$$\begin{aligned} \int_0^a \cos(\xi + \sigma_2 b) \sin \alpha \xi d\xi &= \left. \frac{-\cos(\xi + \sigma_2 b) \cos \alpha \xi}{\alpha} \right|_0^a - \\ &- \frac{1}{\alpha} \int_0^b \sin(\xi + \sigma_2 b) \cos \alpha \xi d\xi = \left. \frac{-\cos(\xi + \sigma_2 b) \cos \alpha \xi}{\alpha} \right|_0^a - \\ &- \left. \frac{\sin(\xi + \sigma_2 b) \sin \alpha \xi}{\alpha^2} \right|_0^b + \frac{1}{\alpha^2} I_1 \end{aligned}$$

У такий спосіб знаходимо значення для трьох доданків

$$I_1 = \frac{k_1 \cos(ak_2 + \sigma_2 b) - k_2 \cos(ak_1 + \sigma_2 b) - 2\alpha \cos \sigma_2 b}{2k_1 k_2}$$

$$I_2 = \frac{k_1 \cos(ak_2 + \sigma_1 b) - k_2 \cos(ak_1 + \sigma_1 b) - 2\alpha \cos \sigma_1 b}{2k_1 k_2}$$

$$I_3 = \frac{k_1 \cos(ak_2) - k_2 \cos(ak_1) - 2\alpha}{2k_1 k_2}$$

де $k_1 = 1 + \alpha$, $k_2 = 1 - \alpha$

Спростуючи, знаходимо

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_1 I_1 - \sigma_2 I_2 - 2\beta I_3}{2\sigma_1 \sigma_2}$$

Для розрахунків покладемо значення параметрів:

- Параметр теплообміну на границі $z = H$ $B = 1$
- Границі шарів $h_1 = 5, h_2 = 7, H = 11$
- Розміри паралелепіпеда $0 < x < a = 20, 0 < y < b = 20, 0 < z < H = 11$.

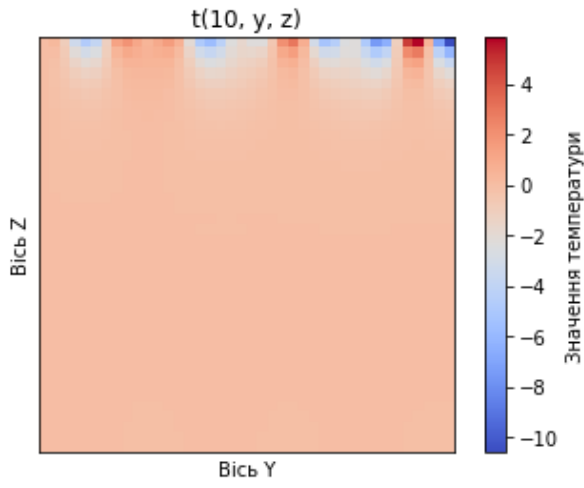
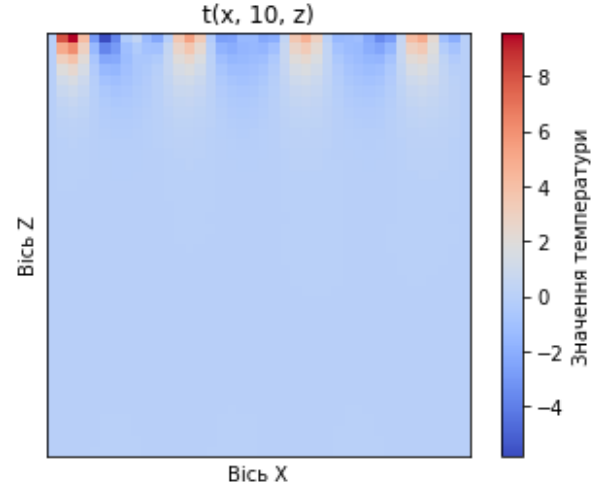
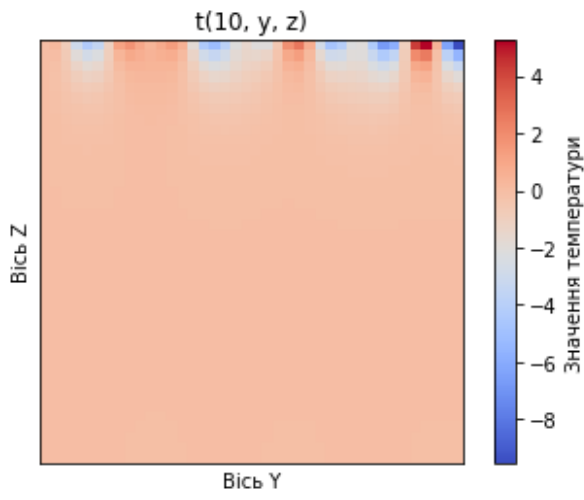
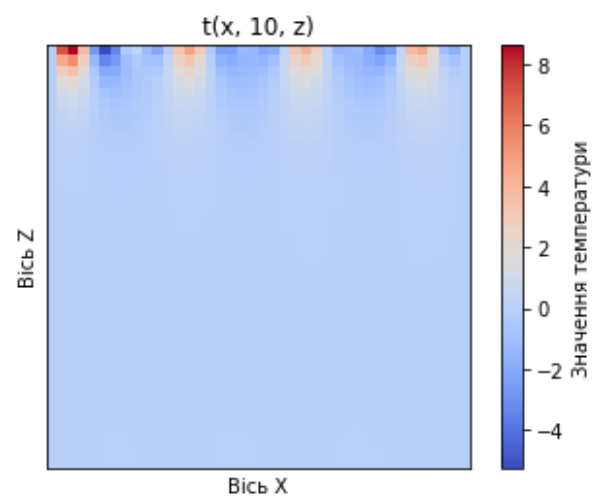
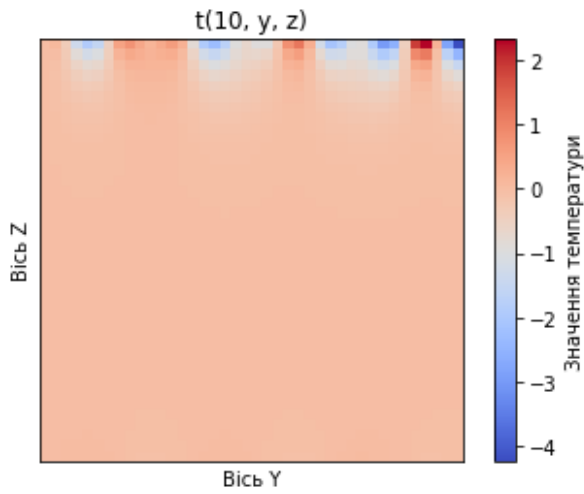
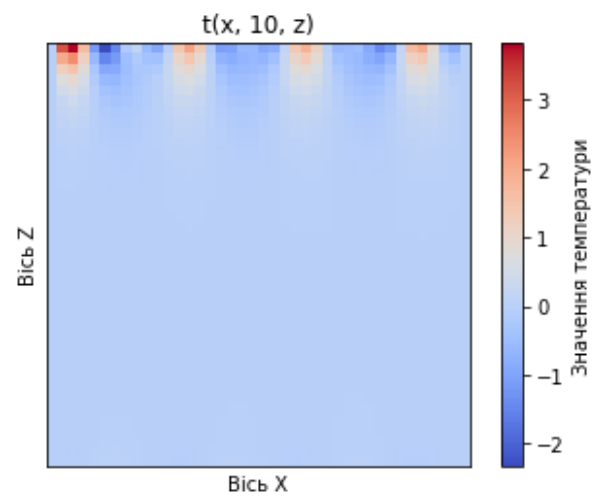
Рис. 3.10. $k_1 = 3, k_2 = 9, k_3 = 15$ 

Рис. 3.13.

Рис. 3.11. $k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9$ Рис. 3.14. $k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9$ Рис. 3.12. $k_1 = 15, k_2 = 9, k_3 = 3$ Рис. 3.15. $k_1 = 15, k_2 = 9, k_3 = 3$

Також побудовано графіки температури в залежності від змінної z при фіксованих $x = 10, y = 10$

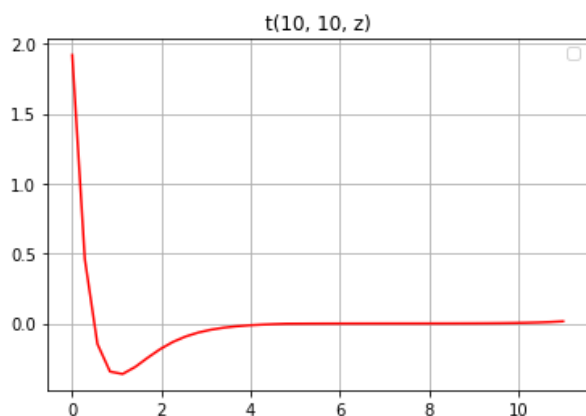


Рис. 3.16. $k_1 = 3, k_2 = 9, k_3 = 15$

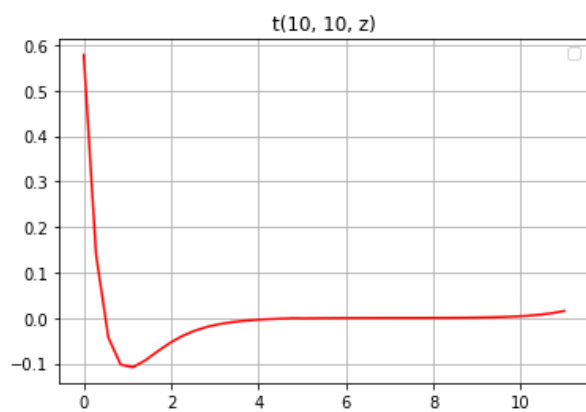


Рис. 3.17. $k_1 = 9, k_2 = 9, k_3 = 9$

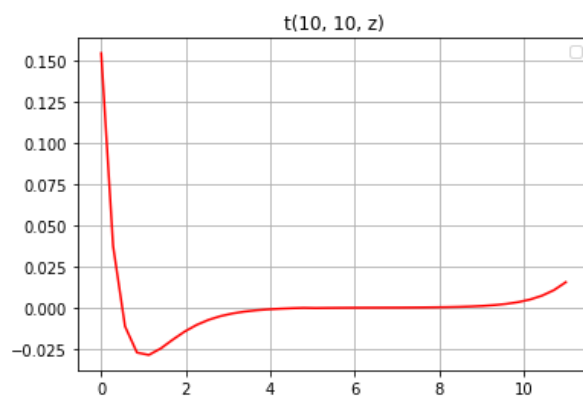


Рис. 3.18. $k_1 = 15, k_2 = 9, k_3 = 3$

ВИСНОВКИ

- 1) Знайдено загальний розв'язок для стаціонарної задачі теплопровідності для складеного з n шарів паралелепіпеда.
- 2) Коефіцієнти розв'язків отримано у вигляді рекурентних співвідношень.
- 3) Розглянуто розв'язки для паралелепіпеда складеного з трьох шарів.
- 4) Отримані чисельні результати виражені у вигляді теплової карти розв'язків відносно різних значень коефіцієнтів. Ці теплові карти побудовано відносно змінних x, z та відносно змінних y, z . Це відповідає перерізам складеного паралелепіпеда.
- 5) Розроблено програму для побудови графіків на мові програмування Python.

ДОДАТОК А

Код написаний мовою Python.

```
import matplotlib.pyplot as mpl
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
import numpy as np

quan = 40
Num = 15
fW = np.zeros((quan, quan))
a = 20
b = 20
# s = 10; d = 10
B = 1
k1 = 15
k2= 9
k3= 3
h1 = 5
h2 = 7
H = 11
pi = 3.14159265358979
x = np.linspace(0, a, quan)
y = np.linspace(0, b, quan)
z = np.linspace(0, H, quan)

def mult1(alpha, beta):
    g = -b**2*np.cos(beta*b)/beta + \
        2*b*np.sin(beta*b)/beta**2 + \
        4*(np.sin(beta*b/2))**2/beta**3
    g1 = -a**2*np.cos(alpha*a)/alpha + \
        2*a*np.sin(alpha*a)/alpha**2 + \
        4*(np.sin(alpha*a/2))**2/alpha**3
    return -g*g1/500000
```

```

def mult2(alpha, beta):
    sigma1 = 1+beta
    sigma2 = 1-beta
    k1 = 1 + alpha
    k2 = 1 - alpha
    I1 = (k1*np.cos(a*k2+sigma2*b)- \
k2*np.cos(a*k1+sigma2*b)- \
2*alpha*np.cos(sigma2*b))
    I2 = (k1*np.cos(a*k2+sigma1*b)- \
k2*np.cos(a*k1+sigma1*b)- 2*alpha*np.cos(sigma1*b))
    I3 = (k1*np.cos(a*k2)- k2*np.cos(a*k1) - 2*alpha)
    g = (sigma1 * I1 - sigma2 * I2 - 2*beta*I3)/\
(4*sigma1*sigma2*k1*k2)
    return g/10

```

```

def t1alphabeta(z, k, m, N):
    alpha = np.pi*k/a
    beta = np.pi*(2*m-1)/(2*b)
    N = np.sqrt(alpha**2 + beta**2)
    l1 = N*np.exp(N*H) + B*np.exp(N*H)
    l2 = B*np.exp(-N*H) - N*np.exp(-N*H)
    H1= N*h1
    H2= N*h2
    L = l2 - l1 * np.exp(-2*N*h2)
    term = 2*k3/k2*np.exp(-H2)*mult1(alpha, beta)/L*\
(k2/k1*np.cosh(H2 - H1)+\
    np.sinh(H2-H1))*np.sinh(H1 - N*z)#mult
    return term

```

```

def t2alphabeta(z, k, m, N):
    alpha = np.pi*k/a
    beta = np.pi*(2*m-1)/(2*b)
    N = np.sqrt(alpha**2 + beta**2)
    l1 = N*np.exp(N*H) + B*np.exp(N*H)

```

```

    l2 = B*np.exp(-N*H) - N*np.exp(-N*H)
    H2= N*h2
    L = l2 - l1 * np.exp(-2*N*h2)
    term = 2*k3/k2*np.exp(-H2)*mult1(alpha, beta)\
    /L*np.sinh(H2 - N*z)#mult
    return term
def t3alphabeta(z, k, m, N):
    alpha = np.pi*k/a
    beta = np.pi*(2*m-1)/(2*b)
    N = np.sqrt(alpha**2 + beta**2)
    l1 = N*np.exp(N*H) + B*np.exp(N*H)
    l2 = B*np.exp(-N*H) - N*np.exp(-N*H)
    H2= N*h2
    L = l2 - l1 * np.exp(-2*N*h2)
    term = 2*np.exp(-H2)*mult1(alpha, beta)/\
    L*np.sinh(H2 - N*z)#mult
    return term
def t1(x, y, z):
    sum_value =0
    for m in range(1, Num):
        beta = np.pi*(2*m-1)/(2*b)
        sumv=0
        for k in range(1, Num):
            alpha = np.pi*k/a
            N = np.sqrt(alpha**2 + beta**2)
            sumv += t1alphabeta(z, k, m, N)*\
            np.sin(alpha*x)
        sum_value +=sumv*np.sin(beta*y)
    return 4/(a*b)*sum_value
def t2(x, y, z):
    sum_value =0
    for m in range(1, Num):
        beta = np.pi*(2*m-1)/(2*b)
        sumv=0

```

```

        for k in range(1, Num):
            alpha = np.pi*k/a
            N = np.sqrt(alpha**2 + beta**2)
            sumv += t2alphabeta(z, k, m, N)*np.sin(alpha*x)
            sum_value +=sumv*np.sin(beta*y)
    return 4/(a*b)*sum_value
def t3(x, y, z):
    sum_value =0
    for m in range(1, Num):
        beta = np.pi*(2*m-1)/(2*b)
        sumv=0
        for k in range(1, Num):
            alpha = np.pi*k/a
            N = np.sqrt(alpha**2 + beta**2)
            sumv += t3alphabeta(z, k, m, N)*np.sin(alpha*x)
            sum_value +=sumv*np.sin(beta*y)
    return 4/(a*b)*sum_value
def t(x, y, z):
    if z< h1:
        return t1(x,y,z)
    elif z>h2:
        return t3(x,y,z)
    else:
        return t2(x,y,z)
for i in range(quan):
    for j in range(quan):
        fW[i, j] = t(x[i], 10, z[j])
fig, ax = mpl.subplots()

im = ax.imshow(fW.T, cmap='coolwarm', \
interpolation='nearest')
mpl.colorbar(im, ax=ax, \
label="Значення температури")
ax.set_xlabel('Вісь X')
```

```

ax.set_ylabel('Біць Z')
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])
ax.set_title("t(x, 10, z)")
mpl.show()
fig, ax = mpl.subplots()
mpl.grid(b=':')
fw = np.zeros(quan)
for i in range(quan):
    #print(t(10, 10, z[i]))
    fw[i] = t(10, 10, z[i])
ax.plot(z, fw, color='red')
ax.set_title('t(10, 10, z)')

```

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Deconinck, B., Pelloni, B., & Sheils, N. E. (2014). *Non-steady-state heat conduction in composite walls. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470(2165), 20130605.
2. Dong, H., Cui, J., Nie, Y., & Yang, Z. (2017). Multiscale computational method for heat conduction problems of composite structures with diverse periodic configurations in different subdomains. arXiv preprint arXiv:1712.02615.
3. Yang, X.-S. (2010). Modelling heat transfer of carbon nanotubes. arXiv preprint arXiv:1003.1882.
4. Попов Г.Я., Реут В.В. Вайсфельд Н.Д. Учебный посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень".— О.: "Астропринт 1999. — 67 с.
5. Вайсфельд Н. Д. Рівняння математичної фізики : навч.-метод. посібн. для студ. спец. «Прикладна математика» / Н. Д. Вайсфельд, В. В. Реут.—Одеса : Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2018.—194 с.