

МАТЕМАТИКА

УДК 917.7

А. В. Арсирій

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ
ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ
И МНОГОЗНАЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

Арсирій А. В. Метод усереднення для задачі керування лінійною системою із похідною Хукухары та багатозначним критерієм якості. У даній статті розглядається задача оптимального керування багатозначними траєкторіями. Обґрунтовується метод повного усереднення для такого типу задач з малим параметром та багатозначним критерієм якості.

Ключові слова: задачі керування, диференціальні рівняння з похідною Хукухары, метод усереднення.

Арсирій А. В. Метод усреднения для задачи управления линейной системой с производной Хукухары и многозначным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначными траекториями. Обосновывается метод полного усреднения для такого типа задач, содержащих малый параметр, для случая многозначного критерия качества.

Ключевые слова: задачи управления, дифференциальные уравнения с производной Хукухары, метод усреднения.

Arsirii A. V. The method of averaging for the control problem of the linear system with the Hukuhara derivative and setvalued criteria of quality. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued trajectories. The method of full averaging is justified for such type of control system, containing a small parameter for the cases with the setvalued criteria of quality.

Key words: control problem, differential equation with the Hukuhara derivative, method of averaging.

ВВЕДЕНИЕ.

В 1969 году F. S. de Blasi и F. Iervolino ввели понятие дифференциального уравнения с производной Хукухары [9], решением которого является многозначное отображение. В дальнейшем в работах F. S. de Blasi, F. Iervolino и A. J. Brando Lopes Pinto были доказаны теоремы существования и устойчивости решений для такого типа уравнений [10]. А. А. Толстоногов доказал, что решение дифференциального уравнения с производной Хукухары дает оценку сверху множества достижимости задачи оптимального управления [8]. Исследованием дифференциальных уравнений с производной Хукухары также занимались M. Kisielewich, V. Lakshmikantham, N. D. Phu, T. T. Tung, А. Н. Витюк, А. В. Плотников, О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник и др. [3, 5, 7, 11, 13, 14].

При исследовании задач оптимального управления необходимо многократно интегрировать системы дифференциальных уравнений, поэтому возникает большой интерес к разработке различных схем асимптотических методов или методов

усреднения. Применение метода для задач оптимального управления началось с работ Н. Н. Моисеева [4]. Для дифференциальных уравнений с многозначной правой частью (дифференциальных включений) теорема, являющаяся аналогом первой теоремы Н. Н. Боголюбова, была доказана В. А. Плотниковым [6]. В дальнейшем усреднением дифференциальных уравнений с многозначной правой частью, в частности усреднением дифференциальных уравнений с производной Хукухары, занимались М. Kisielewicz, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, О. Д. Кичмаренко, Н. В. Скрипник и др. [3, 5, 7, 12].

В статьях [1, 2] обосновывалась возможность применения метода усреднения для линейных управляемых дифференциальных уравнений с производной Хукухары для случаев периодической и непериодической правой части. В данной статье рассматривается случай многозначного критерия качества.

В начале введем некоторые необходимые нам в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть R^n — n -мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ — пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A, B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ — шар радиуса r с центром в точке a .

Определение 1. [5] Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.

Определение 2. [5] Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \rightarrow Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_h F(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} (F(t + \Delta t) \overset{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} (F(t) \overset{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрим задачу оптимального управления линейной системой, описываемой дифференциальным уравнением с производной Хукухары стандартного вида:

$$D_h X(t, u) = \varepsilon [A(t)X(t, u) + B(t)u(t) + F(t)], \quad X(0, u) = X_0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in R_+ = [0, +\infty)$; $X(\cdot, u) : R_+ \rightarrow Conv(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t, u)$ — производная Хукухары; $A(t)$ — матрица $(n \times n)$; $B(t)$ — матрица $(n \times m)$; $u(\cdot) \in U \in Conv(R^m)$ — управляемое воздействие; $F(\cdot) : R_+ \rightarrow Conv(R^n)$ — многозначное отображение.

Определение 3. [5] Решением уравнения (1) соответствующим допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot, u)$, удовлетворяющее (1) почти всюду на R_+ .

Пусть качество решения уравнения (1) описывается следующим многозначным критерием

$$I(u) = \Omega(X(T, u)), \quad (2)$$

где $\Omega(\cdot) : Conv(R^n) \rightarrow Conv(R^1)$, $T = L\varepsilon^{-1}$.

В качестве оптимального управления понимается максиминное либо максимаксное управление.

Определение 4. [7] Управление $u^*(\cdot) \in LU$ назовем максиминным для задачи (1)(2), если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство

$$mJ(u) \leq mJ(u^*),$$

где $mA = \min\{a \mid a \in A, A \in Conv(R^1)\}$.

Определение 5. [7] Управление $u^*(\cdot) \in LU$ назовем максимаксным для задачи (1), (2), если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство

$$MJ(u) \leq MJ(u^*),$$

где $MA = \max\{a \mid a \in A, A \in Conv(R^1)\}$.

1. Построение усредненного уравнения для рассматриваемого исходного уравнения.

Уравнению (1) поставим в соответствие усредненное уравнение

$$D_h Y(t, v) = \varepsilon[\bar{A}Y(t, v) + v(t) + \bar{F}], \quad Y(0, v) = X_0. \quad (3)$$

Соответствующий многозначный критерий для усредненного уравнения:

$$\bar{I}(v) = \Omega(Y(T, v)), \quad (4)$$

где $\Omega(\cdot) : Conv(R^n) \rightarrow Conv(R^1)$, $T = L\varepsilon^{-1}$.

В случае 2π -периодической правой части матрица $\bar{A}$, отображение $\bar{F}$ и множество V получается по следующему правилу:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(t) dt, \quad \bar{F} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt, \\ v(t) \in V &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(t) u(t) dt, \quad u(t) \in LU \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для случая непериодической правой части правило выглядит так:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt, \quad \bar{F} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt, \\ v(t) \in V &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B(t) U dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Установим соответствие между управлением $u(\cdot)$ исходного уравнения (1) и управлением $v(\cdot)$ усредненного уравнения (3). Обозначим множество допустимых управлений уравнения (1) LU , а уравнения (3) — LV .

В случае 2π -периодической правой части будем говорить, что управление $v(\cdot)$ соответствует управлению $u(\cdot)$ и наоборот, если выполнено следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} B(t)u(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

В случае непериодической правой части управлению $u(\cdot)$ поставим в соответствие управление $v(\cdot)$ следующим образом:

1) Вычисляем

$$w_i = \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где } T_1 > 0 \text{ — константа.}$$

2) Строим управление $v(t) = \{v_i(t), \quad iT_1 \leq t < (i+1)T_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$, где $v_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{\bar{v}(t) \in LV} \|w_i - \bar{v}(t)\| = \|w_i - v_i(t)\|.$$

Наоборот, управлению $v(\cdot)$ ставится в соответствие управление $u(\cdot)$ так:

1) Вычисляем

$$w_i(t) = \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} v(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где } T_1 > 0 \text{ — константа.}$$

2) Строим управление $u(t) = \{u_i(t), \quad iT_1 \leq t < (i+1)T_1, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$, где $u_i(t)$ находим из условия:

$$\min_{\bar{u}(t) \in LU} \left\| \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)\bar{u}(t)dt - w_i \right\| = \left\| \frac{1}{T_1} \int_{iT_1}^{(i+1)T_1} B(t)u_i(t)dt - w_i \right\|.$$

2. Близость критериев качества исходной и усредненной задач для случая 2π -периодической правой части.

Покажем близость решений задач (1), (2) и (3), (4) по значениям многозначных критериев качества для случая 2π -периодической правой части.

Предположение 1. Будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условиям:

- 1) матрица $A(t)$ — измерима и 2π -периодична на R_+ ;
- 2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| \leq a$ для почти всех $t \in R_+$;
- 3) матрица $B(t)$ — измерима и 2π -периодична на R_+ ;
- 4) существует константа $b > 0$ такая, что $\|B(t)\| \leq b$ для почти всех $t \in R_+$;
- 5) $U \in \text{Conv}(R^n)$;
- 6) многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо на R_+ ;
- 7) существует константа $f > 0$ такая, что $h(F(t), \{0\}) \leq f$ для почти всех $t \in R_+$.

Докажем теорему, понимая оптимальное управление как максиминное.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям предположения 1 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ . Тогда для любого $L > 0$ существует $\varepsilon_0(L) \in (0, \sigma]$ и $C(L) > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:
 1) для максиминного управления $u^*(\cdot)$ исходной задачи (1), (2) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ усредненного уравнения (3) такое, что

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v_{u^*})| \leq C\varepsilon, \quad (7)$$

2) для максиминного управления $v^*(\cdot)$ усредненной задачи (3), (4) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ исходного уравнения (1) такое, что

$$|mI(u_{v^*}) - m\bar{I}(v^*)| \leq C\varepsilon, \quad (8)$$

3) для максиминных управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач справедливо неравенство

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v^*)| \leq C\varepsilon, \quad (9)$$

4) для максиминного управления $u^*(\cdot)$ и допустимого управления $u_{v^*}(\cdot)$ исходной задачи (1), (2) справедливо неравенство

$$|mI(u^*) - mI(u_{v^*})| \leq C\varepsilon. \quad (10)$$

Доказательство. Пусть $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — оптимальные, то есть максиминные управления соответственно исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач, а $X^*(\cdot, u^*)$ и $Y^*(\cdot, v^*)$ — порожденные ими многозначные оптимальные решения.

$$\begin{aligned} D_h X^*(t, u^*) &= \varepsilon[A(t)X^*(t, u^*) + B(t)u^*(t) + F(t)], \quad X^*(0, u^*) = X^0, \\ D_h Y^*(t, v^*) &= \varepsilon[\bar{A}Y^*(t, v^*) + v^*(t) + \bar{F}], \quad Y^*(0, v^*) = X^0. \end{aligned}$$

Пусть $u_{v^*}(\cdot)$ и $u_{v^*}(\cdot)$ — допустимые управления соответственно усредненной (3), (4) и исходной (1), (2) задач, соответствующие максиминным управлениям $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$, а $X^1(\cdot, u_{v^*})$ и $Y^1(\cdot, v_{u^*})$ — порожденные этими управлениями многозначные решения, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} D_h X^1(t, u_{v^*}) &= \varepsilon[A(t)X^1(t, u_{v^*}) + B(t)u_{v^*}(t) + F(t)], \quad X^1(t, u_{v^*}) = X^0, \\ D_h Y^1(t, v_{u^*}) &= \varepsilon[\bar{A}Y^1(t, v_{u^*}) + v_{u^*}(t) + \bar{F}], \quad Y^1(t, v_{u^*}) = X^0. \end{aligned}$$

В статье [1] была доказана теорема о близости решений исходного и усредненного уравнений

$$h(X^*(t, u^*), Y^1(t, v_{u^*})) \leq C\varepsilon, \quad h(X^1(t, u_{v^*}), Y^*(t, v^*)) \leq C\varepsilon$$

для всех $t \in [0, T]$.

Так как отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ , то из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} h(I(u^*), \bar{I}(v_{u^*})) &= h(\Omega(X^*(T, u^*)), \Omega(Y^1(T, v_{u^*}))) \leq \\ &\leq \lambda h(X^*(T, u^*), Y^1(T, v_{u^*})) \leq \lambda C_1 \varepsilon, \\ h(I(u_{v^*}), \bar{I}(v^*)) &= h(\Omega(X^1(T, u_{v^*})), \Phi(Y^*(T, v^*))) \leq \\ &\leq \lambda h(X^1(T, u_{v^*}), Y^*(T, v^*)) \leq \lambda C_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Обозначим $C = \lambda C_1$ и получим справедливость оценок (7) и (8).

Теперь покажем справедливость оценки (9). Так как $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — максиминные управления, то

$$mI(u^*) \geq mI(u_{v^*}), \quad m\bar{I}(v^*) \geq m\bar{I}(v_{u^*}).$$

Возможны два случая:

- 1) $m\bar{I}(v_{u^*}) + C \geq mI(u^*) > m\bar{I}(v^*) \geq m\bar{I}(v_{u^*}),$
- 2) $mI(u_{v^*}) + C \geq m\bar{I}(v^*) \geq mI(u^*) \geq mI(u_{v^*}).$

Объединяя оба случая получаем оценки (9) и (10). Теорема доказана.

Теперь под оптимальным управлением будем понимать максимадное управление.

Теорема 2. Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям предположения 1 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ . Тогда для любого $L > 0$ существует $\varepsilon_0(L) \in (0, \sigma]$ и $C(L) > 0$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для максимадного управления $u^*(\cdot)$ исходной задачи (1), (2) существует допустимое управление $u_{u^*}(\cdot)$ усредненного уравнения (3) такое, что

$$|MI(u^*) - M\bar{I}(v_{u^*})| \leq C\varepsilon, \quad (11)$$

2) для максимадного управления $v^*(\cdot)$ усредненной задачи (3), (4) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ исходного уравнения (1) такое, что

$$|MI(u_{v^*}) - M\bar{I}(v^*)| \leq C\varepsilon, \quad (12)$$

3) для максимадных управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач справедливо неравенство

$$|MI(u^*) - M\bar{I}(v^*)| \leq C\varepsilon, \quad (13)$$

4) для максимадного управления $u^*(\cdot)$ и допустимого управления $u_{v^*}(\cdot)$ исходной задачи (1), (2) справедливо неравенство

$$|MI(u^*) - MI(u_{v^*})| \leq C\varepsilon. \quad (14)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. Близость критериев качества исходной и усредненной задач для случая неперiodической правой части.

Покажем близость решений задач (1), (2) и (3), (4) по значениям многозначных критериев качества для случая неперiodической правой части.

Предположение 2. Будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условиям:

- 1) матрица $A(t)$ — измерима на R_+ ;
- 2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| \leq a$ для почти всех $t \in R_+$;

- 3) матрица $B(t)$ — измерима на R_+ ;
- 4) существует константа $b > 0$ такая, что $\|B(t)\| \leq b$ для почти всех $t \in R_+$;
- 5) $U \in \text{Conv}(R^n)$;
- 6) многозначное отображение $F(\cdot)$ измеримо на R_+ ;
- 7) существует константа $f > 0$ такая, что $h(F(t), \{0\}) \leq f$ для почти всех $t \in R_+$.

Докажем теорему, понимая оптимальное управление как максиминное.

Теорема 3. Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям предположения 2 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ . Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для максиминного управления $u^*(\cdot)$ исходной задачи (1), (2) существует допустимое управление $v_{u^*}(\cdot)$ усредненного уравнения (3) такое, что

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v_{u^*})| \leq \eta, \quad (15)$$

2) для максиминного управления $v^*(\cdot)$ усредненной задачи (3), (4) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ исходного уравнения (1) такое, что

$$|mI(u_{v^*}) - m\bar{I}(v^*)| \leq \eta, \quad (16)$$

3) для максиминных управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач справедливо неравенство

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v^*)| \leq \eta, \quad (17)$$

4) для максиминного управления $u^*(\cdot)$ и допустимого управления $u_{v^*}(\cdot)$ исходной задачи справедливо неравенство

$$|mI(u^*) - mI(u_{v^*})| \leq \eta. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — оптимальные, то есть максиминные управления соответственно исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач, а $X^*(\cdot, u^*)$ и $Y^*(\cdot, v^*)$ — порожденные ими многозначные оптимальные решения.

$$\begin{aligned} D_h X^*(t, u^*) &= \varepsilon[A(t)X^*(t, u^*) + B(t)u^*(t) + F(t)], \quad X^*(0, u^*) = X^0, \\ D_h Y^*(t, v^*) &= \varepsilon[\bar{A}Y^*(t, v^*) + v^*(t) + \bar{F}], \quad Y^*(0, v^*) = X^0. \end{aligned}$$

Пусть $v_{u^*}(\cdot)$ и $u_{v^*}(\cdot)$ — допустимые управления соответственно усредненной (3), (4) и исходной (1), (2) задач, соответствующие максиминным управлениям $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$, а $X^1(\cdot, u_{v^*})$ и $Y^1(\cdot, v_{u^*})$ — порожденные этими управлениями многозначные решения, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} D_h X^1(t, u_{v^*}) &= \varepsilon[A(t)X^1(t, u_{v^*}) + B(t)u_{v^*}(t) + F(t)], \quad X^1(t, u_{v^*}) = X^0, \\ D_h Y^1(t, v_{u^*}) &= \varepsilon[\bar{A}Y^1(t, v_{u^*}) + v_{u^*}(t) + \bar{F}], \quad Y^1(t, v_{u^*}) = X^0. \end{aligned}$$

В статье [2] была доказана теорема о близости решений исходного и усредненного уравнений

$$h(X^*(t, u^*), Y^1(t, v_{u^*})) \leq \eta_1, \quad h(X^1(t, u_{v^*}), Y^*(t, v^*)) \leq \eta_1$$

для всех $t \in [0, T]$.

Так как отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ , то из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} h(I(u^*), \bar{I}(v_{u^*})) &= h(\Omega(X^*(T, u^*)), \Omega(Y^1(T, v_{u^*}))) \leq \\ &\leq \lambda h(X^*(T, u^*), Y^1(T, v_{u^*})) \leq \lambda \eta_1, \\ h(I(u_{v^*}), \bar{I}(v^*)) &= h(\Omega(X^1(T, u_{v^*})), \Phi(Y^*(T, v^*))) \leq \\ &\leq \lambda h(X^1(T, u_{v^*}), Y^*(T, v^*)) \leq \lambda \eta_1. \end{aligned}$$

Обозначим $\eta = \lambda \eta_1$ и получим справедливость оценок (15) и (16).

Теперь покажем справедливость оценки (17). Так как $u^*(\cdot)$ и $v^*(\cdot)$ — максиминные управления, то

$$mI(u^*) \geq mI(u_{v^*}), \quad m\bar{I}(v^*) \geq m\bar{I}(v_{u^*}).$$

Возможны два случая:

- 1) $m\bar{I}(v_{u^*}) + \lambda \eta_1 \geq mI(u^*) > m\bar{I}(v^*) \geq m\bar{I}(v_{u^*})$,
- 2) $mI(u_{v^*}) + \lambda \eta_1 \geq m\bar{I}(v^*) \geq mI(u^*) \geq mI(u_{v^*})$.

Объединяя оба случая и обозначая $\eta = \lambda \eta_1$ получаем оценки (17) и (18).

Теорема доказана.

Теперь под оптимальным управлением будем понимать максиминное управление.

Теорема 4. Пусть уравнение (1) удовлетворяет условиям предположения 2 и пусть отображение $\Omega(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ . Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливы следующие утверждения:

1) для максимадного управления $u^*(\cdot)$ исходной задачи (1), (2) существует допустимое управление $v_{u^*}(\cdot)$ усредненного уравнения (3) такое, что

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v_{u^*})| \leq \eta, \quad (19)$$

2) для максимадного управления $v^*(\cdot)$ усредненной задачи (3), (4) существует допустимое управление $u_{v^*}(\cdot)$ исходного уравнения (1) такое, что

$$|mI(u_{v^*}) - m\bar{I}(v^*)| \leq \eta, \quad (20)$$

3) для максимадных управлений $u^*(\cdot), v^*(\cdot)$ исходной (1), (2) и усредненной (3), (4) задач справедливо неравенство

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v^*)| \leq \eta, \quad (21)$$

4) для максимадного управления $u^*(\cdot)$ и допустимого управления $u_{v^*}(\cdot)$ исходной задачи справедливо неравенство

$$|mI(u^*) - m\bar{I}(v^*)| \leq \eta. \quad (22)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В статье рассматривалась задача управления многозначными траекториями с многозначным критерием качества. Обоснована возможность применения метода усреднения для данной задачи. Доказана теорема, показывающая близость решений исходной и усредненной задач по значениям критериев качества.

1. **Арсирий А. В.** Усреднение систем управления многозначными траекториями [текст] / А. В. Арсирий, А. В. Плотников // Математичні студії. – Львів, 2010. – Т. 33. – № 1. – С. 65–70.
2. **Арсирий А. В.** Обоснование возможности применения схемы полного усреднения для задачи управления линейной системой с производной Хукухары [текст] / А. В. Арсирий, И. В. Молчанюк, А. В. Плотников // Вестник Одесского национального университета. – Одесса: ОНУ, 2011. – Т. 16. – № 16. Матем. механ. – С. 20–29.
3. **Кичмаренко О. Д.** Усреднение в задачах управления системами с запаздыванием [текст] / О. Д. Кичмаренко // диссертация на соискание уч. степ. канд. физ.-матем. наук. – Одесса, 2005. – 162 с.
4. **Моисеев Н. Н.** Элементы теории оптимальных систем [текст] / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1975. – 526 с.
5. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
6. **Плотников В. А.** Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложения к задачам оптимального управления [текст] / В. А. Плотников // Дифференц. уравн. – 1979. – № 8. – С. 1427–1433.
7. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.
8. **Толстоногов А. А.** Об уравнении интегральной воронки дифференциального включения [текст] / А. А. Толстоногов // Мат. заметки. – 1982. – Т. 32. – № 6. – С. 841–852.
9. **de Blasi F.S.** Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2. – № 4–5. – P. 491–501.
10. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / A. J. Brandao Lopes Pinto, F. S. de Blasi, F. Iervolino // Boll. U. M. I. – 1970. – № 4. – P. 534–538.
11. **Kisielewicz M.** Description of a class of differential equations with set - valued solutions [text] / M. Kisielewicz // Lincei - Rend. Sc. fis. mat. e nat. – 1975. – V. 58. – P. 158–162.
12. **Kisielewicz M.** Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions [text] / M. Kisielewicz // Rend. Mat. – 1976. – V. 9. – № 3. – P. 397–408.
13. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces [text] / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi // Cambridge Scientific Publishers, 2006. – 204 p.
14. **Phu N. D.** Multivalued Differential Equations [text] / N. D. Phu, T. T. Tung. – VNU-HCM City: Publishing House, 2005.