Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

Кафедра Методів Математичної Фізики

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

на тему: **«Змішана задача теплопровідності для сектора кола»**

«Mixed thermal conductivity problem for the circle sector»

Виконав: здобувач денної форми навчання
спеціальності 113 Прикладна математика
Освітня програма «Прикладна математика»
Пушкін Нікіта Глібович

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Круглов В.Є.
Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Процеров Ю. С.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ ____ від ______________ 2023 р.

Завідувач кафедри

__________ ____________________

Захищено на засіданні ЕК № ______________

Протокол № ____ від ______________ 2023 р.

Оцінка __________ / __________ / __________

Голова ЕК

__________ __________________________

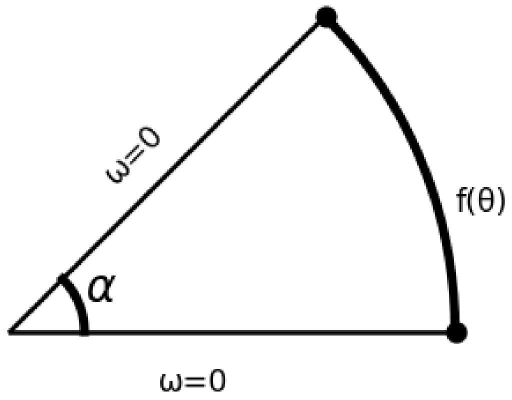
Одеса — 2023 р.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається задача теплопровідності для сектора кола, прямолінійні краї якого підтримуються при температурі, що дорівнює нулю, а на криволінійній грані задано тепловий потік. Відсутні внутрішні джерела тепла. Потрібно знайти температуру $W(r,\theta)$



Математична модель

Математичною моделлю цієї задачі є:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \\ w\mid_{\theta=0} = 0, w\mid_{\theta=\alpha} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r}\mid_{r=a} = f(\theta) \\ w, \frac{\partial w}{\partial r}\mid_{r\to 0} -\text{обм.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Розглянемо дві різні функції $f(\theta)$: $\theta(\alpha-\theta)$ та $(\alpha-\theta)\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}$

РОЗДІЛ 2

ТЕОРІЯ

Диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) є фундаментальною і обширною галуззю математичного аналізу, яка відіграє ключову роль в описі і розумінні широкого спектру фізичних явищ і природних процесів. На відміну від звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), які включають функції однієї змінної, ДРЧП включають функції декількох змінних. Ці рівняння виникають у різних наукових дисциплінах, включаючи фізику, техніку, біологію, фінанси тощо.

Основні поняття:

- Означення: Диференціальне рівняння в частинних похідних - це рівняння, яке включає в себе часткові похідні невідомої функції по двох або більше незалежних змінних. Зазвичай воно описує, як величина змінюється у просторі та часі.
- Порядок диференціального рівняння: Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком частинних похідних, що входять до нього. Наприклад, ДРЧП другого порядку включає часткові похідні другого порядку.
- Лінійні та нелінійні диференціальні рівняння: Диференціальні рівняння можна класифікувати як лінійні або нелінійні залежно від природи невідомої функції та її похідних. Лінійні ЗДР мають розв'язки, які задовольняють принципу суперпозиції, тоді як нелінійні ЗДР цього не роблять.
- Добре поставлені задачі: Рівняння з частинними похідними разом з відповідними граничними та початковими умовами є добре поставленою задачею, якщо існує єдиний розв'язок, який є стійким до малих змін вхідних даних.

Класифікація диференціальних рівнянь:

1) Еліптичні рівняння: Вони описують ситуації рівноваги і мають застосування в таких галузях, як теплопровідність та електростатика. Прикладами є рівняння Лапласа та Пуассона.
2) Параболічні рівняння: Вони включають змінну часу і описують процеси, які розвиваються в часі. Класичним прикладом є рівняння теплопровідності, що моделює розподіл тепла в заданій області.
3) Гіперболічні рівняння: Вони описують хвилеподібні явища, де інформація поширюється з кінцевою швидкістю. Хвильове рівняння - це звичайний гіперболічний PDE, який застосовується в таких галузях, як акустика і гідродинаміка.

Методи розв'язування диференціальних рівнянь:

1) Розділення змінних: Цей метод передбачає припущення, що розв'язок є добутком функцій окремих змінних, що зводить СЗДР до набору звичайних диференціальних рівнянь.
2) Метод характеристик: Цей метод особливо корисний для диференціальних рівнянь першого порядку, він полягає у перетворенні диференціального рівняння в систему звичайних диференціальних рівнянь вздовж характерних кривих.
3) Методи скінченних різниць: Ці чисельні методи дискретизують область і апроксимують похідні, що дозволяє чисельно розв'язувати СДНЧП.
4) Перетворення Фур'є та Лапласа: Ці методи перетворень можуть спростити диференціальні рівняння, перетворивши їх в алгебраїчні рівняння в перетвореній області, де рішення легше знайти.

Застосування:

- Теплопровідність: Рівняння теплопровідності моделює розподіл температури в провідному матеріалі з часом.
- Гідродинаміка: PDE, такі як рівняння Нав'є-Стокса, описують рух рідин, що має вирішальне значення в таких галузях, як аеродинаміка та океанографія.
- Квантова механіка: Рівняння Шредінгера - це фундаментальний PDE, який описує поведінку квантових систем.
- Електромагнетизм: Рівняння Максвелла, набір PDE, керують поведінкою електричних і магнітних полів.

Розглянемо детальніше рівняння теплопровідності.

Рівняння теплопровідності - диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку, що описує розподіл температури в заданій ділянці простору та її зміну в часі. У загальному вигляді в просторі з довільною системою координат $r = (r_1, \ldots, r_n)$ рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(r,t)$$

де a - позитивна константа (число a^2 є коефіцієнтом температуропровідності), $\Delta = \nabla^2$ - оператор Лапласа і $f(r,t)$ - функція теплових джерел. Шукана функція $u = u(r,t)$ задає температуру в точці з координатами r у момент часу t.

Температура нестаціонарного теплого поля задовольняє диференціальному рівнянню теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (a^2 = \frac{k}{c\rho})$$

Якщо процес стаціонарний, то встановлюється розподіл температури $u(x,y,z)$, що не змінюється з плином часу, а отже, задовольняє рівняння Лапласа.

$$\Delta u = 0. \tag{2.1}$$

За наявності джерел тепла отримуємо рівняння

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k} \tag{2.2}$$

де F - щільність теплових джерел, а k - коефіцієнт теплопровідності. Неоднорідне рівняння Лапласа (2.2) часто називають рівнянням Пуассона.

Розглянемо деякий об'єм T, обмежений поверхнею Σ. Завдання про стаціонарний розподіл температури $u(x,y,z)$ усередині тіла T формулюється так: знайти функцію $u(x,y,z)$, що задовольняє усередині T рівнянню

$$\Delta u = -f(x,y,z) \tag{2.3}$$

і граничній умові, яка може бути взята в одному з таких видів:

1. $u = f_1$ на Σ (перша крайова задача)
2. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (друга крайова задача)
3. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третя крайова задача)

де $f_1, \quad f_2, \quad , f_3, \quad h$ - задані функції, $\frac{\partial u}{\partial n}$ - похідна за зовнішньою нормаллю до поверхні Σ.

Першу крайову задачу для рівняння Лапласа часто називають задачею Діріхле, а другу крайову задачу - задачею Неймана.

Якщо шукають розв'язок в області T_0, внутрішній (або зовнішній) щодо поверхні Σ, то відповідну задачу називають внутрішньою (або зовнішньою) крайовою задачею.

РОЗДІЛ 3

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОСТАВЛЕНІ ЗАДАЧІ

Застосуємо до цієї задачі інтегральне перетворення Фур'є:

$$w_m(r) = \int_0^\alpha w(r,\theta) \sin \lambda_m \theta d\theta, \lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha} \tag{3.1}$$

Для цього обидві частини рівняння в (1.1) помножимо на $\sin \lambda\theta$ і проінтегруємо за θ у межах від 0 до α. У результаті задача зводиться до одновимірної крайової задачі:

$$\begin{cases} r^2 w''_m(r) + r w'_m(r) - \lambda_m^2 w_m(r) = 0 \\ w'_m \mid_{r=a} = f_m, \\ w_m, w'_m \mid_{r \to 0} - \text{огр} \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут $w_m(r)$ - трансформанта (3.1) вихідної функції, а

$$f_m = \int_0^\alpha f(\theta) \sin(\lambda_m \theta) d\theta$$

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння в (3.2) має вигляд

$$w_m(r) = c_m r^{\lambda_m} + d_m r^{-\lambda_m},$$

де c_m і d_m - довільні постійні.
З умови спадання при $r \to 0$ випливає $d_m = 0$.
Тому

$$w_m(r) = c_m r^{\lambda_m}$$

Задовольняючи граничну умову знаходимо:

$$r w'_m(r) = c_m \lambda_m r^{\lambda_m}$$

$$r w'_m(r) \mid_{r=a} = c_m \lambda_m a^{\lambda_m} = a f_m$$

$$c_m = \frac{a f_m}{\lambda_m} a^{-\lambda_m}$$

Звідки

$$w_m = f_m \frac{a}{\lambda_m} (\frac{r}{a})^{\lambda_m} \tag{3.3}$$

1) Обчислюємо значення f_m для функції

$$f(\theta) = \theta(\alpha - \theta)$$

Знаходимо

$$f_m = \int_0^\alpha \theta(\alpha - \theta) \sin(\lambda_m \theta) d\theta$$

Після інтегрування частинами

$$f_m = \frac{2}{\lambda_m^3} (1 - (-1)^m)$$

тобто

$$f_{2m} = 0 \quad ; \quad f_{2m+1} = \frac{4}{\lambda_{2m+1}^3} \quad , \quad m = \overline{0,\infty} \tag{3.4}$$

Зворотне перетворення Фур'є:

$$w(r,\theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} f_m (\frac{r}{a})^{\lambda_m} \frac{a}{\lambda_m} \sin \lambda_m \theta \tag{3.5}$$

рішення поставленої задачі

Враховуючи $\lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha}$ і (3.4) отримаємо розрахункову формулу:

$$w(r,\theta) = \frac{a\alpha^3 \pi^4}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{r}{a})^{\frac{2m+1}{\alpha}\pi} \frac{\sin{(2m+1)\frac{\pi\theta}{\alpha}}}{2m+1}$$

2) Обчислюємо значення f_m для функції

$$f(\theta) = (\alpha - \theta) \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha}$$

Знаходимо

$$f_m = \int_0^\alpha (\alpha - \theta) \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha} \sin(\lambda_m \theta) d\theta$$

Після інтегрування частинами

$$f_m = \frac{2\pi\alpha^3\lambda_m((-1)^m + 1)}{(\pi^2 - \alpha^2\lambda_m^2)^2}$$

тобто

$$f_{2m} = \frac{4\pi\alpha^3\lambda_{2m}}{(\pi^2 - \alpha^2\lambda_{2m}^2)^2} \quad ; \quad f_{2m+1} = 0 \quad , \quad m = \overline{0,\infty} \tag{3.6}$$

Зворотне перетворення Фур'є:

$$w(r,\theta) = \frac{2}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty} f_m(\frac{r}{a})^{\lambda_m}\frac{a}{\lambda_m}\sin\lambda_m\theta \tag{3.7}$$

рішення поставленої задачі

Враховуючи $\lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha}$ і (3.6) отримаємо розрахункову формулу:

$$w(r,\theta) = \frac{4a\alpha^3}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}(\frac{r}{a})^{\frac{2m}{\alpha}\pi}\frac{\sin{(2m)\frac{\pi\theta}{\alpha}}}{(m^2-1)^2}$$

РОЗДІЛ 4

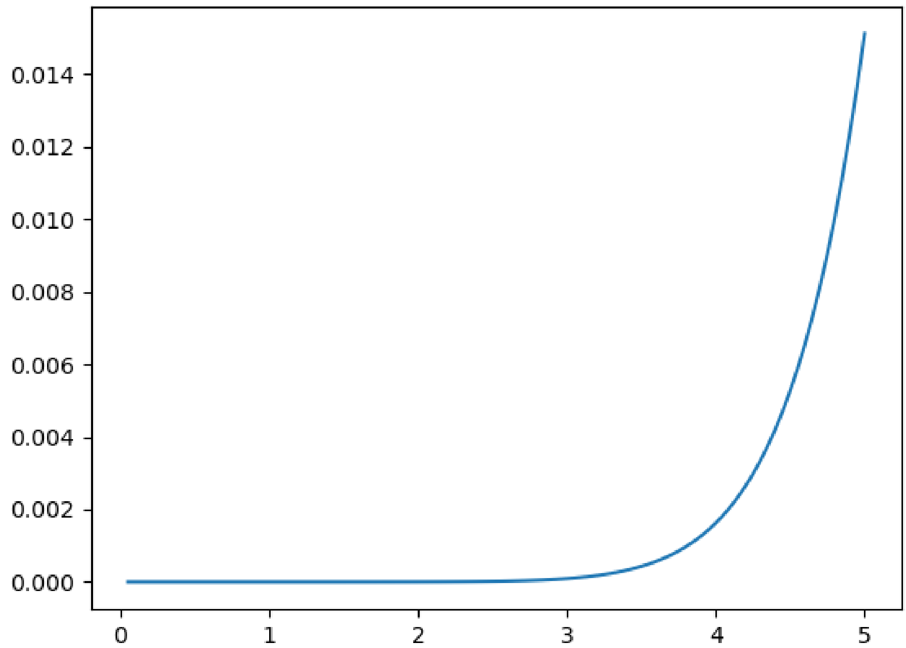
ЧИСЛЕНЕ РІШЕННЯ ТА ГРАФІКИ

Числене рішення для першої функції: $f(\theta) = \theta(\alpha - \theta)$

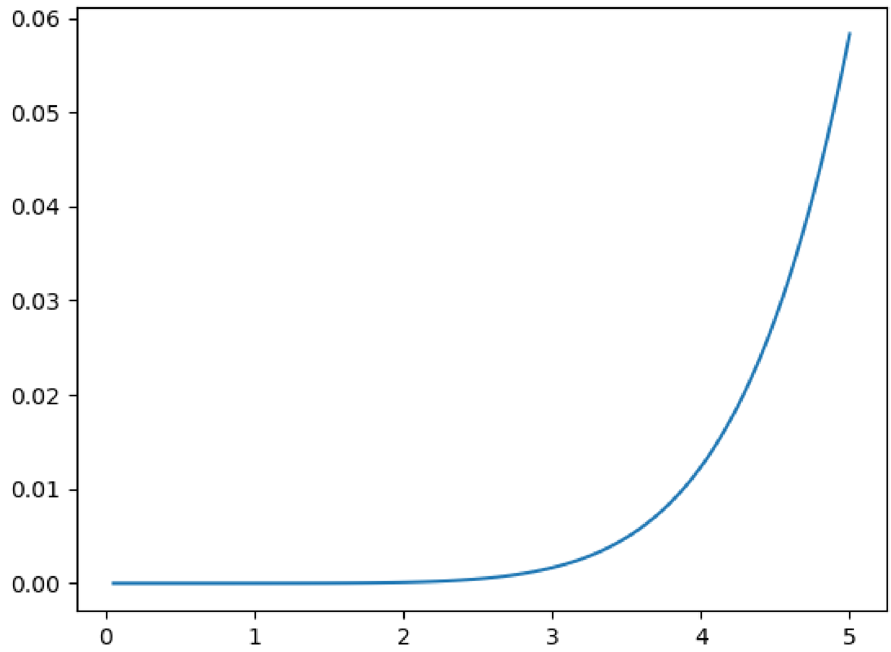
Нехай $r = a, \theta = \frac{\alpha}{2}$ і нехай точність $\epsilon = 0{,}00001$
Тоді чисельним розв'язком у даній точці і за заданої точності ϵ є вираз $0.0812180408877302 a\alpha^3$

Було проведено розрахунки при $a = 5 \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$:

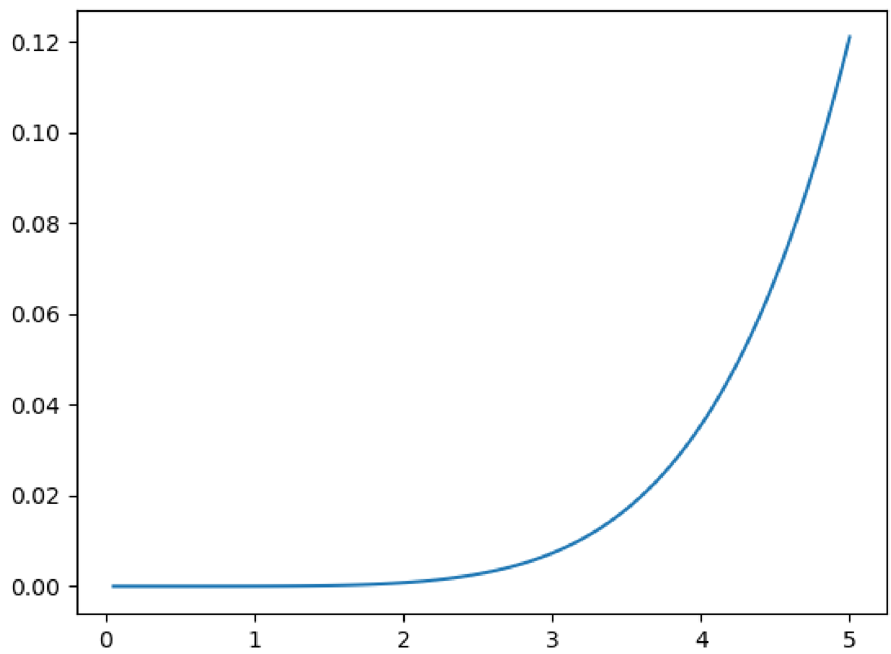
Графік функції $w(r{,}\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{3}$:



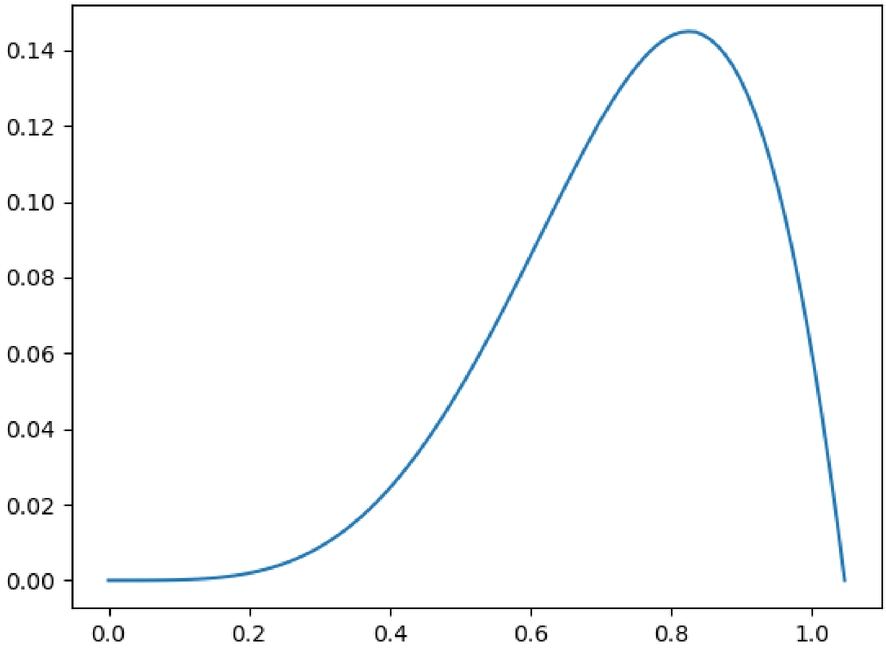
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{2\alpha}{3}$:

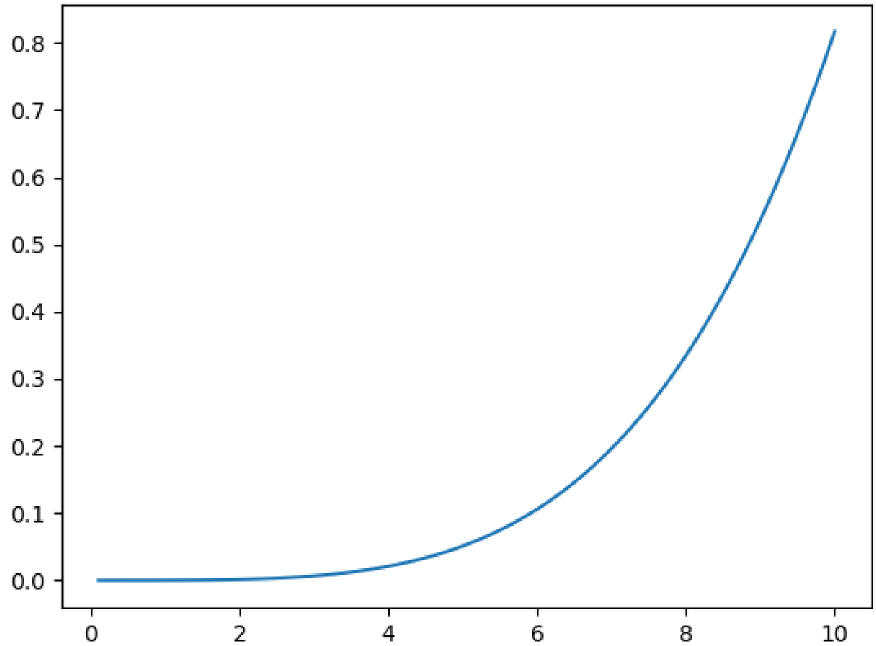


Графік функції $w(r,\theta)$ при $r = a$:

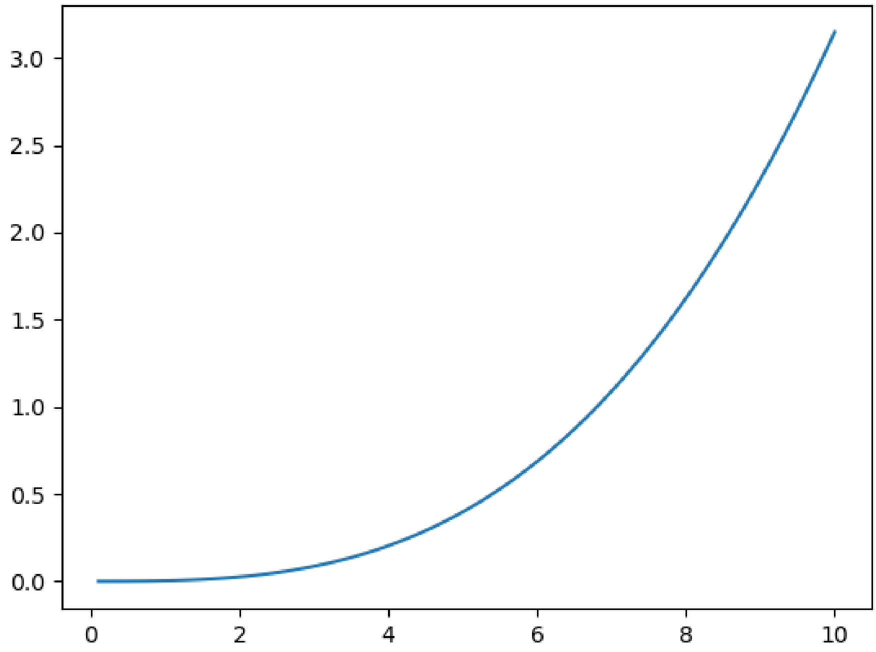


Було проведено розрахунки при $a = 10 \quad , \quad \alpha = \pi$:

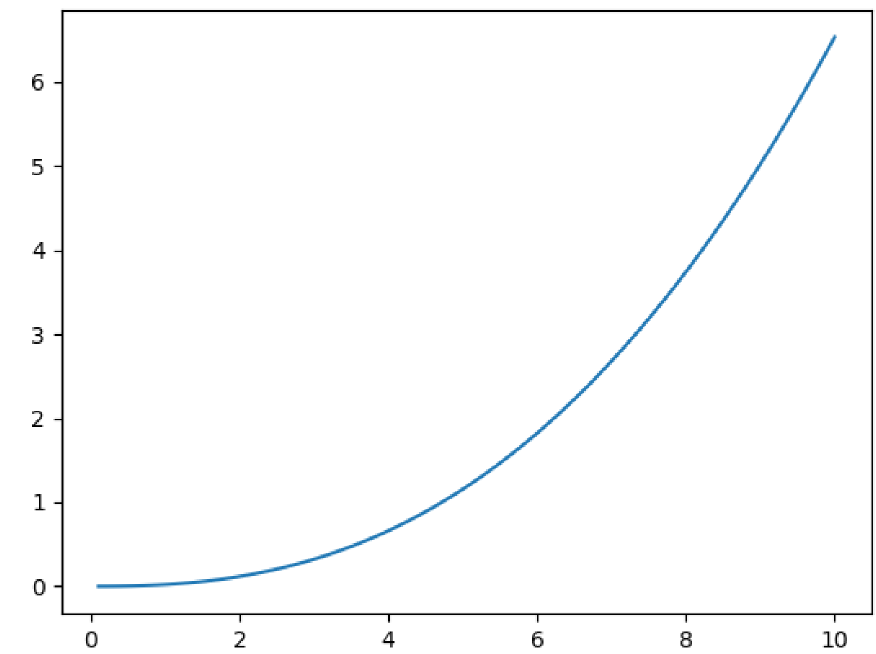
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{3}$:



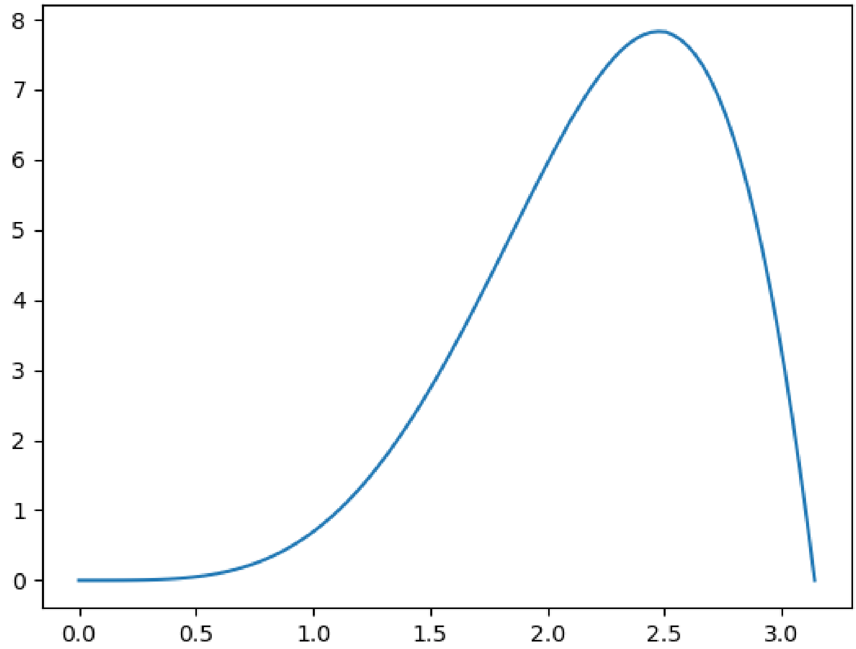
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{2\alpha}{3}$:

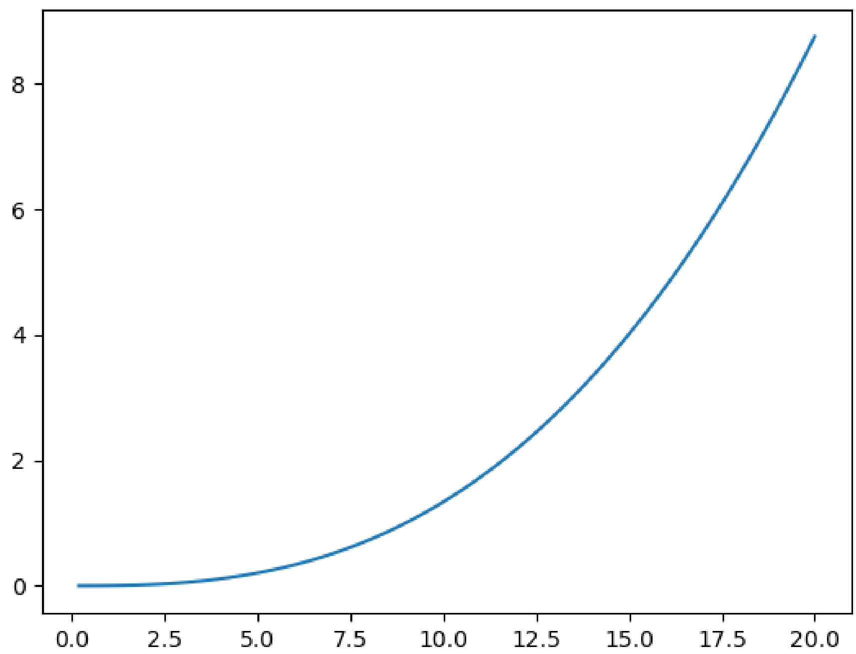


Графік функції $w(r,\theta)$ при $r = a$:

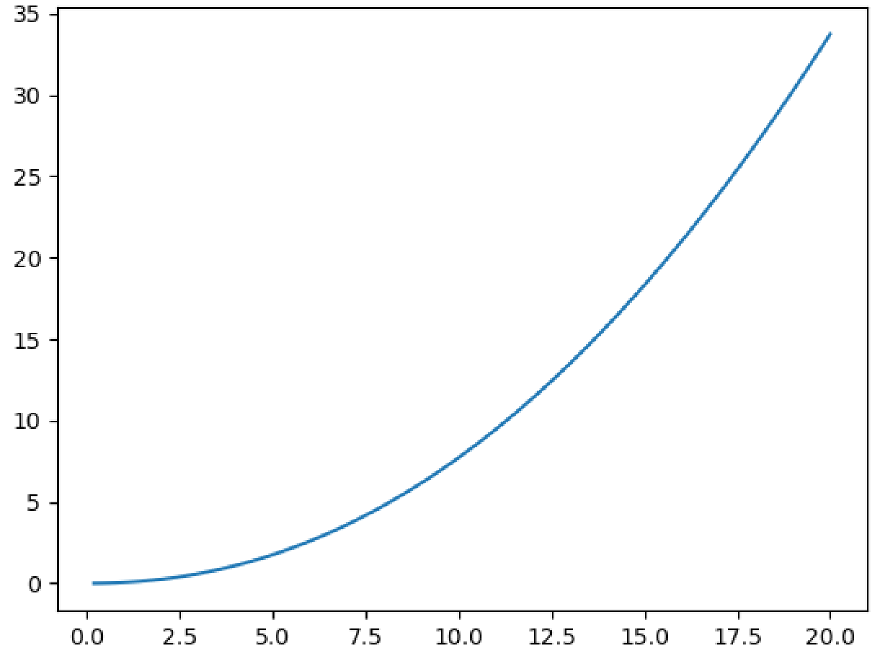


Було проведено розрахунки при $a = 20$, $\alpha = \frac{7\pi}{4}$:

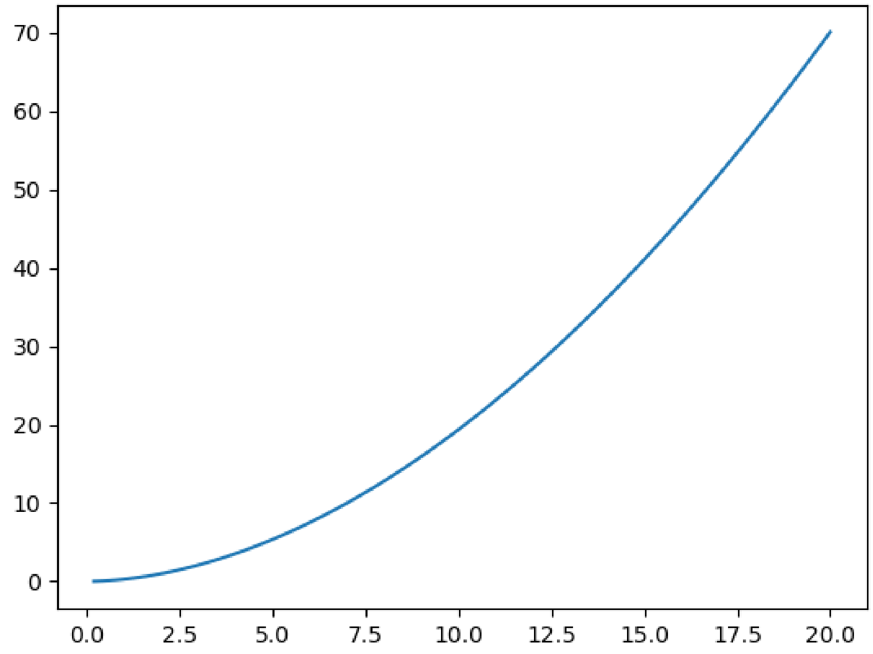
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{3}$:



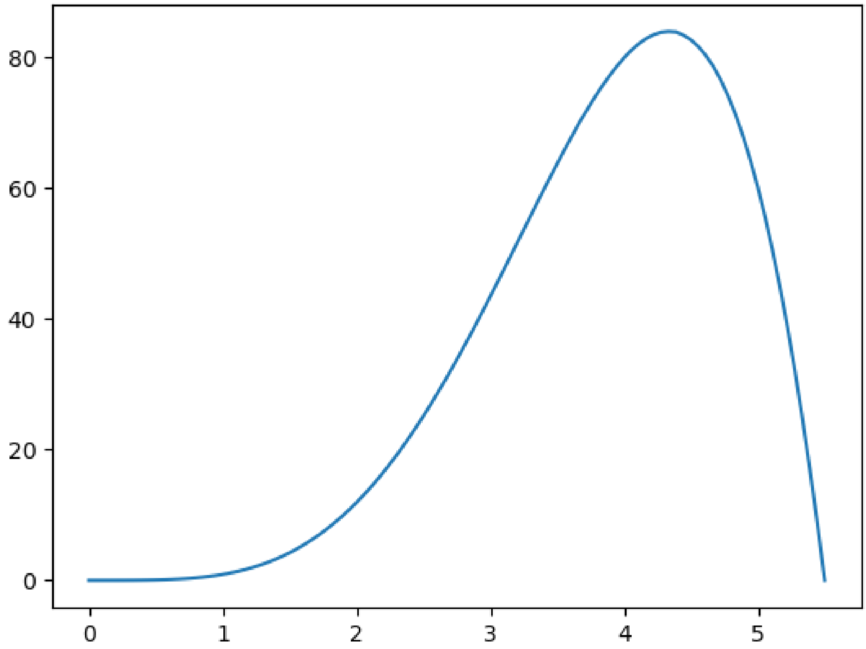
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{2\alpha}{3}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $r = a$:

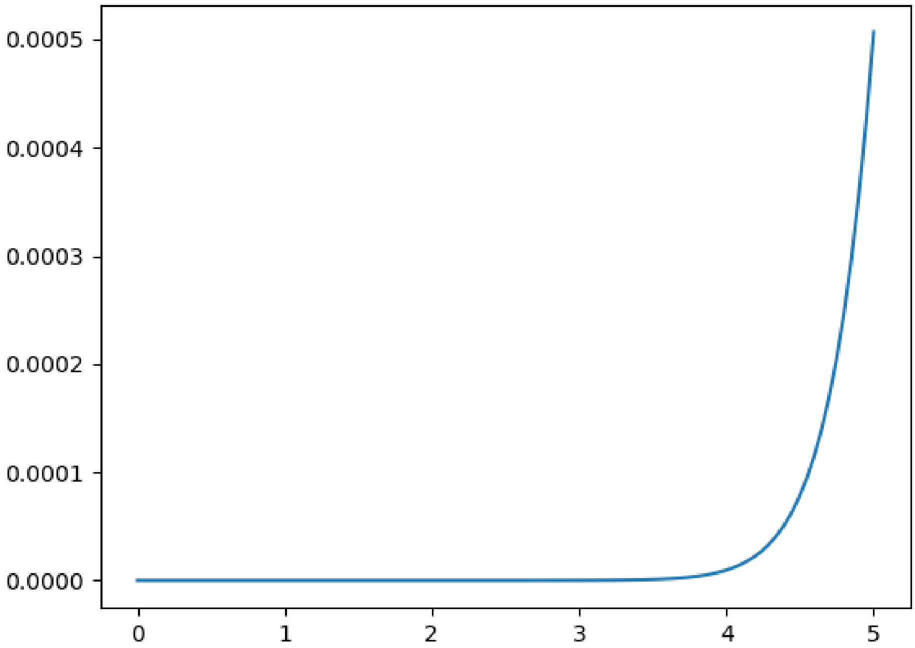


Числене рішення для другої функції: $f(\theta) = (\alpha - \theta)\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}$

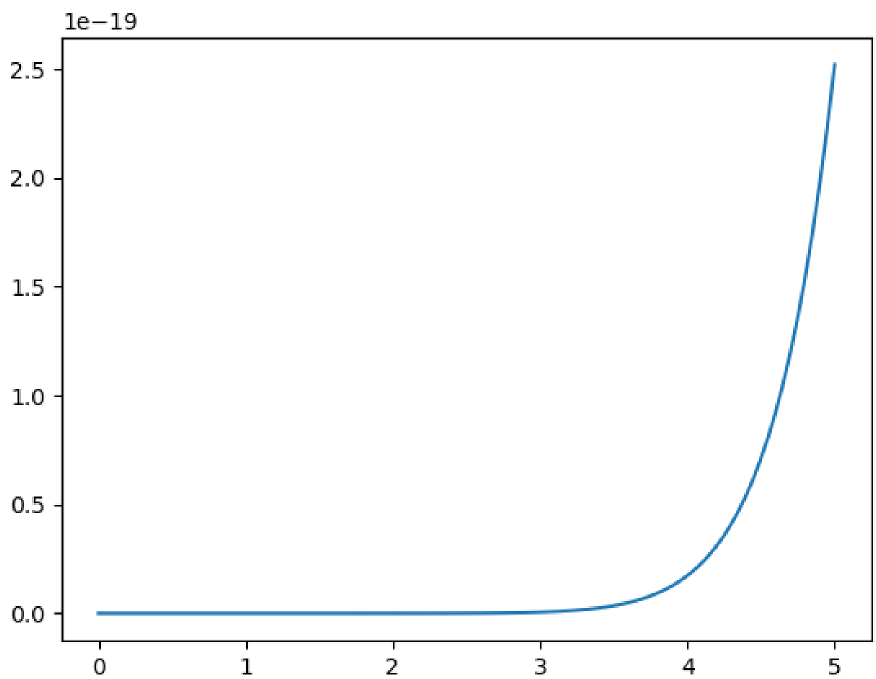
Нехай $r = a, \theta = \frac{\alpha}{2}$ і нехай точність $\epsilon = 0{,}00001$
Тоді чисельним розв'язком у даній точці і за заданої точності ϵ є вираз $1.75541059605371e - 18a\alpha^3$

Було проведено розрахунки при $a = 5 \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$:

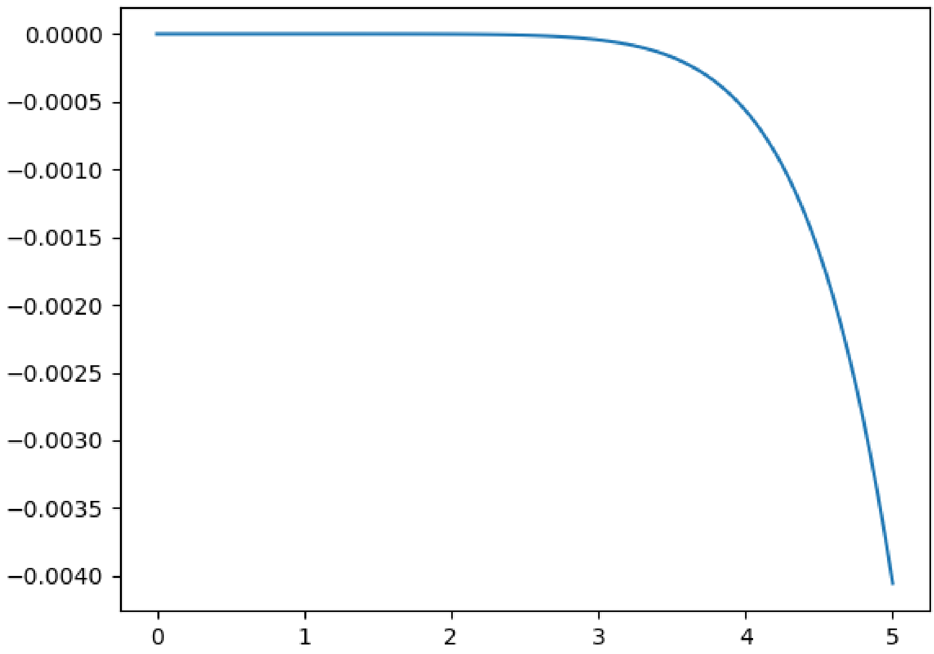
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{3}$:



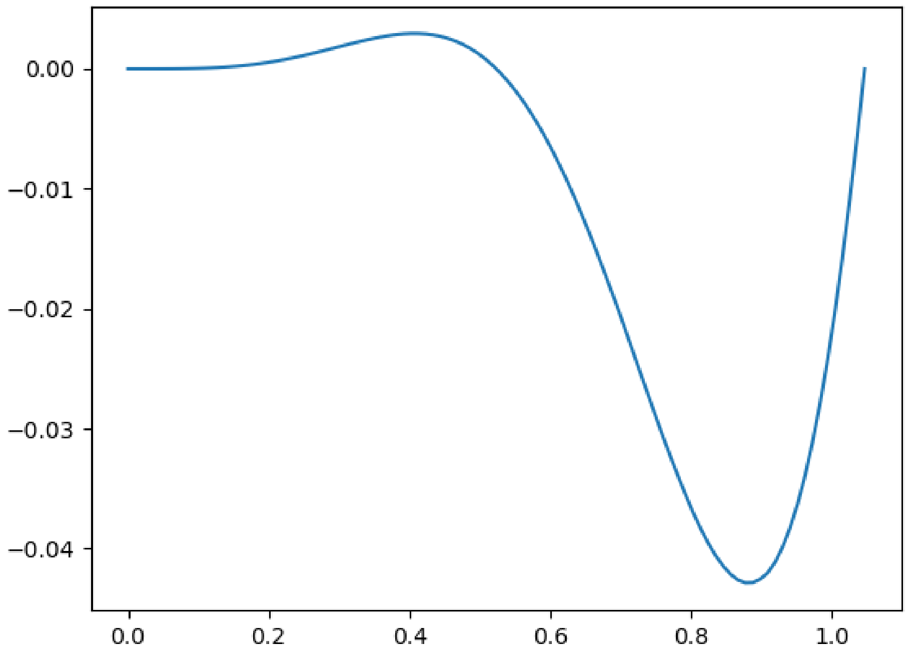
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{2\alpha}{3}$:

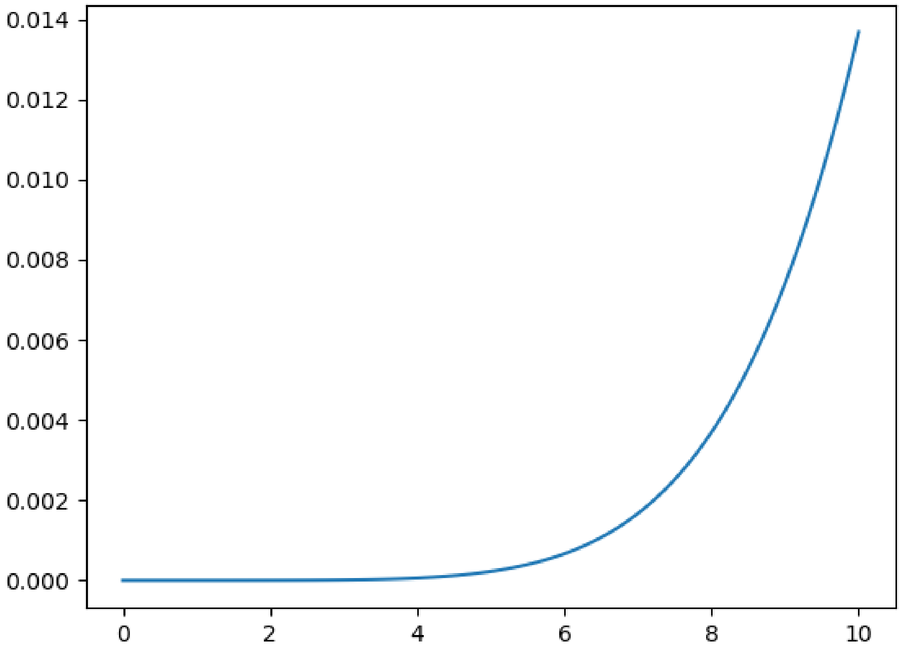


Графік функції $w(r,\theta)$ при $r = a$:

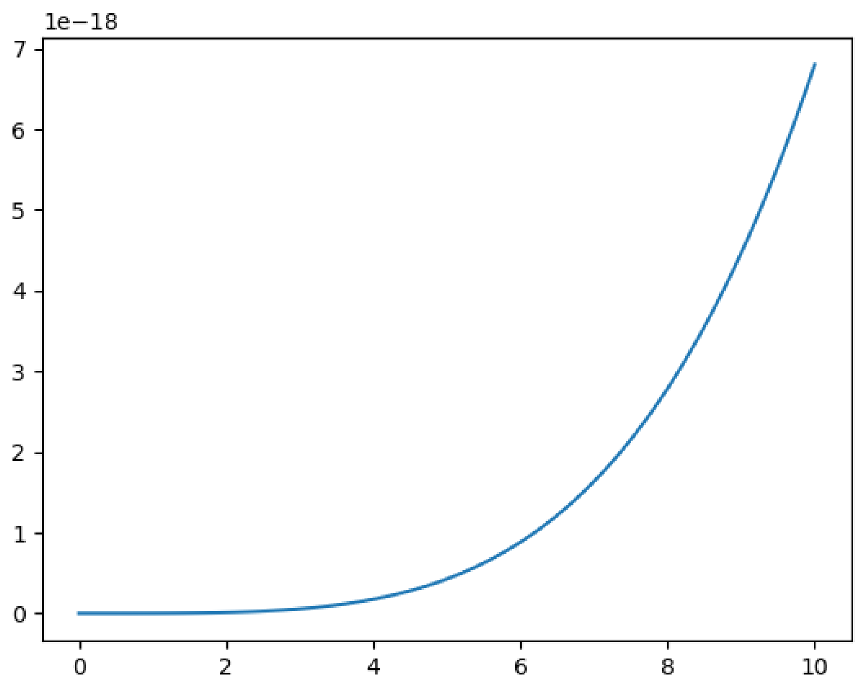


Було проведено розрахунки при $a = 10$, $\alpha = \pi$:

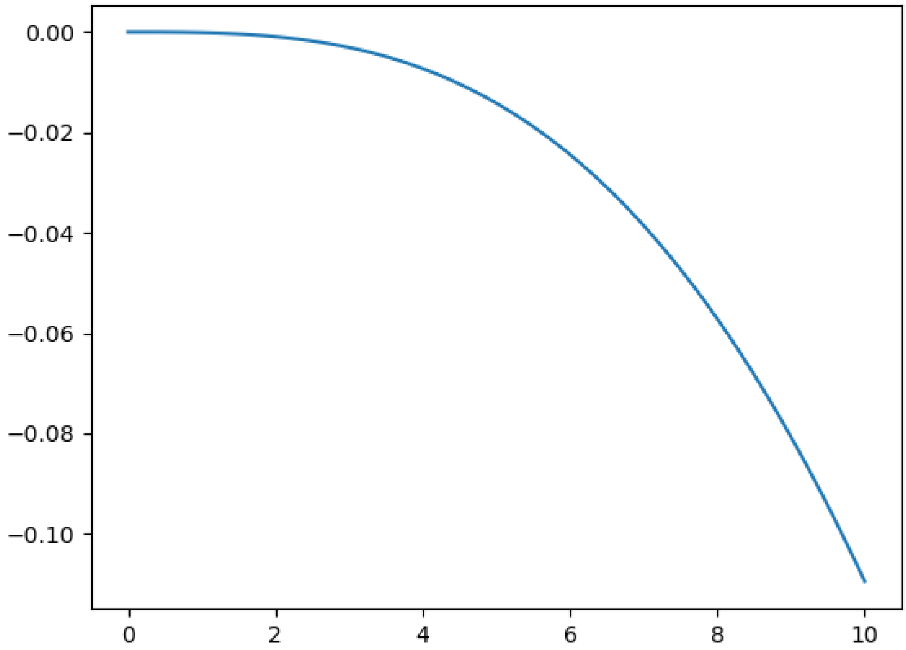
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{3}$:



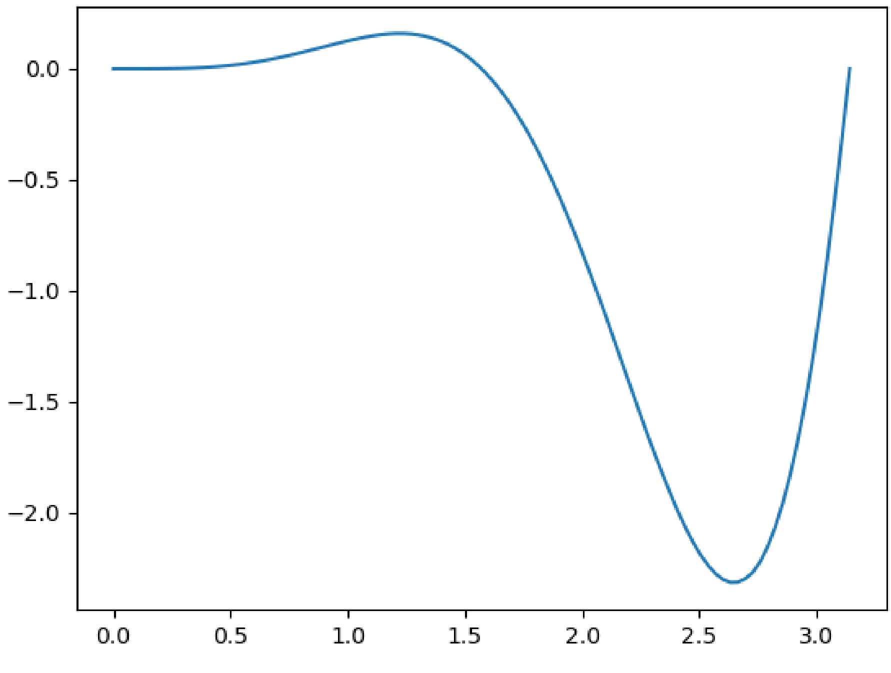
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{2\alpha}{3}$:

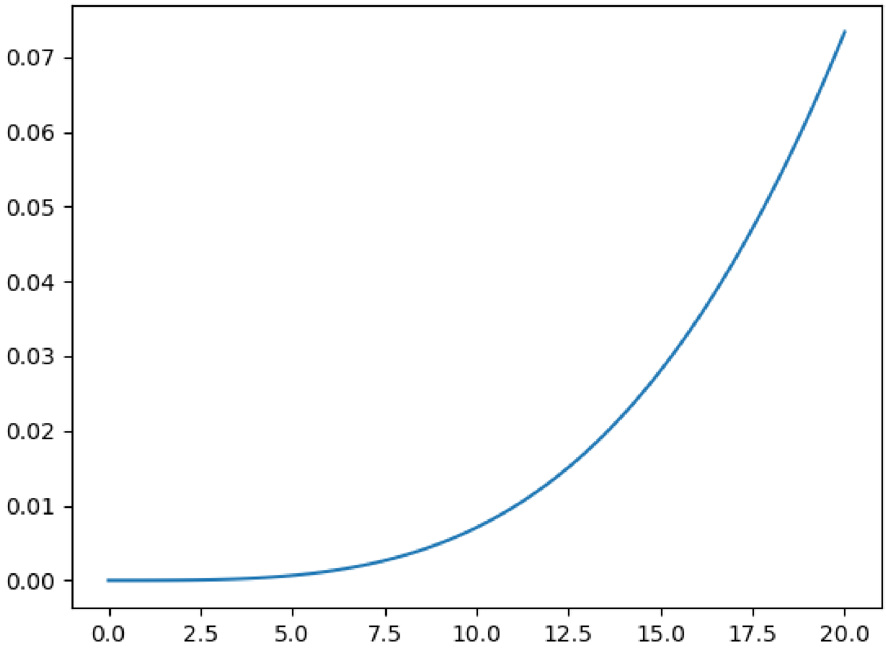


Графік функції $w(r,\theta)$ при $r = a$:

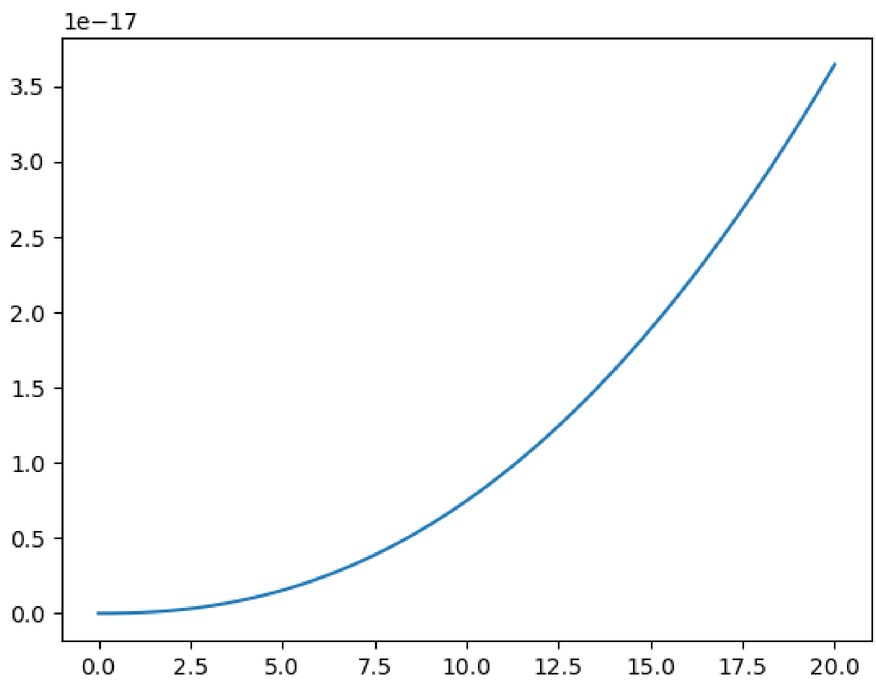


Було проведено розрахунки при $a = 20 \quad , \quad \alpha = \frac{7\pi}{4}$:

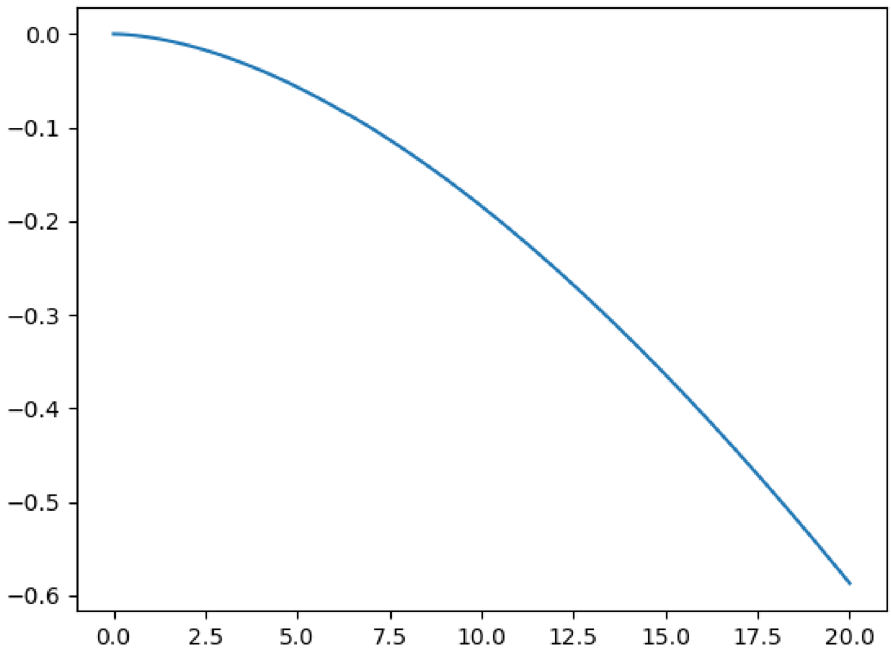
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{3}$:



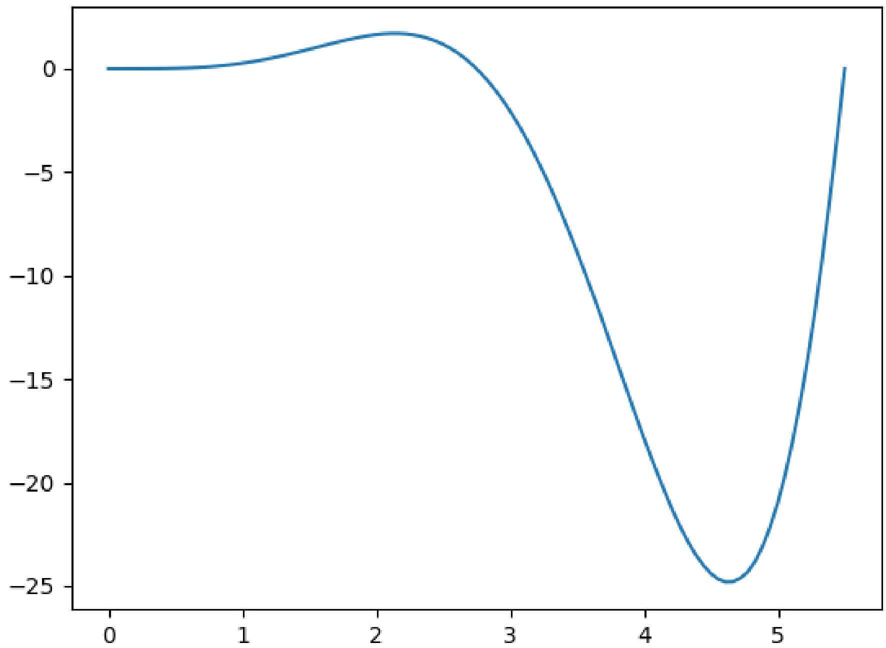
Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $\theta = \frac{2\alpha}{3}$:



Графік функції $w(r,\theta)$ при $r = a$:



РОЗДІЛ 5

ДОДАТОК

Код програми для чисельного рішення першої функції: $f(\theta) = \theta(\alpha - \theta)$

```
import math as m
import sympy as sym

a = sym.Symbol('a')
eps = 0.00001
k = 1
n = 2*k-1
alpha = sym.Symbol('alpha')
l_n = n*m.pi/alpha

theta = alpha/2   # input theta here
r = a             # input r here

y_1 = 0
y_0 = (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
/(l_n**4*a**l_n)
k += 1
n = 2*k-1
l_n = n*m.pi/alpha
y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
/(l_n**4*a**l_n)
while (sym.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
    y_0 = y_1
    k += 1
    n = 2*k-1
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
    /(l_n**4*a**l_n)
```

```
print(y_1)
```

Код програми для функції $w(r,\theta)$ по змінній r першої функції: $f(\theta) = \theta(\alpha - \theta)$

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp

def soluthion(a_0, alpha_0, multiplier):
    a = sp.Symbol('a')
    eps = 0.00001
    k = 1
    n = 2*k-1
    alpha = sp.Symbol('alpha')
    l_n = n*m.pi/alpha

    theta = alpha/2         # input theta here
    r = a * multiplier      # input r here

    y_1 = 0
    y_0 = (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
    /(l_n**4*a**l_n)
    k += 1
    n = 2*k-1
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
    /(l_n**4*a**l_n)
    while (sp.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
        y_0 = y_1
        k += 1
        n = 2*k-1
        l_n = n*m.pi/alpha
        y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
        /(l_n**4*a**l_n)
```

```
    f = sp.lambdify((a, alpha), y_1, 'numpy')
    return f(a_0, alpha_0)

a = 5          # Input a
alpha = m.pi/3 # Input alpha
x_multiplier = np.linspace(0, 1, 100)
x_values = np.linspace(0, a, 100)
y_values = []
for i in range(len(x_multiplier)):
    y_values.append(soluthion(x_values[i], alpha/2, x_multiplier[i]))

plt.plot(x_values, y_values)
plt.xlabel('')
plt.ylabel('')
plt.title('')

plt.show()
```

Код програми для функції $w(r,\theta)$ по змінній θ першої функції: $f(\theta) = \theta(\alpha - \theta)$

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp

def solution(a_0, alpha_0, multiplier):
    a = sp.Symbol('a')
    eps = 0.00001
    k = 1
    n = 2*k-1
    alpha = sp.Symbol('alpha')
    l_n = n*m.pi/alpha

    theta = alpha * multiplier # input theta here
    r = a                      # input r here
```

```
    y_1 = 0
    y_0 = (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
    /(l_n**4*a**l_n)
    k += 1
    n = 2*k-1
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
    /(l_n**4*a**l_n)
    while (sp.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
        y_0 = y_1
        k += 1
        n = 2*k-1
        l_n = n*m.pi/alpha
        y_1 = y_0 + (2/alpha)*(4*a*r**l_n*m.sin(l_n*theta))
        /(l_n**4*a**l_n)

    f = sp.lambdify((a, alpha), y_1, 'numpy')
    return f(a_0, alpha_0)

a = 5           # Input a
alpha = m.pi/3 # Input alpha
x_multiplier = np.linspace(0, 1, 100)
x_values = np.linspace(0, alpha, 100)
y_values = []
for i in range(len(x_multiplier)):
    y_values.append(solution(a, x_values[i], x_multiplier[i]))

plt.plot(x_values, y_values)
plt.xlabel('')
plt.ylabel('')
plt.title('')

plt.show()
```

Код програми для чисельного рішення другої функції: $f(\theta) = \sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}$

```
import math as m
import sympy as sym

a = sym.Symbol('a')
eps = 0.00001
k = 0
n = 2*k
alpha = sym.Symbol('alpha')
l_n = n*m.pi/alpha

theta = alpha/2  # input theta here
r = a            # input r here

y_1 = 0
y_0 = (4*alpha**3/m.pi**3)*((r/a)**l_n*(m.sin(l_n*theta)/(n**2-1)**2))
k += 1
n = 2*k
l_n = n*m.pi/alpha
y_1 = y_0 + (4*alpha**3/m.pi**3)*((r/a)**l_n*(m.sin(l_n*theta)/(n**2-1
while (sym.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
    y_0 = y_1
    k += 1
    n = 2*k
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (4*alpha**3/m.pi**3)*((r/a)**l_n*(m.sin(l_n*theta)/(n*

print(y_1)
```

Код програми для функції $w(r,\theta)$ по змінній r другої функції: $f(\theta) = \sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}$

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
```

```
import sympy as sp

def soluthion(a_0, alpha_0, multiplier):
    a = sp.Symbol('a')
    eps = 0.00001
    k = 0
    n = 2*k
    alpha = sp.Symbol('alpha')
    l_n = n*m.pi/alpha

    theta = 2*alpha/3  # input theta here
    r = a * multiplier           # input r here

    y_1 = 0
    y_0 = (4*alpha**3/m.pi**3)*((r/a)**l_n*(m.sin(l_n*theta)/(n**2-1)*
    k += 1
    n = 2*k
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (4*alpha**3/m.pi**3)*((r/a)**l_n*(m.sin(l_n*theta)/(n*
    while (sp.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
        y_0 = y_1
        k += 1
        n = 2*k
        l_n = n*m.pi/alpha
        y_1 = y_0 + (4*alpha**3/m.pi**3)*((r/a)**l_n*(m.sin(l_n*theta)

    f = sp.lambdify((a, alpha), y_1, 'numpy')
    return f(a_0, alpha_0)

a = 20          # Input a
alpha = 7*m.pi/4 # Input alpha
x_multiplier = np.linspace(0, 1, 100)
x_values = np.linspace(0, a, 100)
y_values = []
```

```
for i in range(len(x_multiplier)):
    y_values.append(soluthion(x_values[i], 2*alpha/3 , x_multiplier[i]

plt.plot(x_values, y_values)
plt.xlabel('')
plt.ylabel('')
plt.title('')

plt.show()
```

Код програми для функції $w(r,\theta)$ по змінній θ другої функції: $f(\theta) = \sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}$

```
import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np
import sympy as sp

def solution(a_0, alpha_0, multiplier):
    a = sp.Symbol('a')
    eps = 0.00001
    k = 0
    n = 2*k
    alpha = sp.Symbol('alpha')
    l_n = n*m.pi/alpha

    theta = alpha * multiplier  # input theta here
    r = a            # input r here

    y_1 = 0
    y_0 = (4*a*alpha**3/m.pi**3)*(((r/a)**l_n)*(m.sin(l_n*theta)/(n**2
    k += 1
    n = 2*k
    l_n = n*m.pi/alpha
    y_1 = y_0 + (4*a*alpha**3/m.pi**3)*(((r/a)**l_n)*(m.sin(l_n*theta)
    while (sp.cancel(abs(y_0 - y_1))).subs({a:1,alpha:1}) >= eps:
```

```
        y_0 = y_1
        k += 1
        n = 2*k
        l_n = n*m.pi/alpha
        y_1 = y_0 + (4*a*alpha**3/m.pi**3)*(((r/a)**l_n)*(m.sin(l_n*th

    f = sp.lambdify((a, alpha), y_1, 'numpy')
    return f(a_0, alpha_0)

a = 20          # Input a
alpha = 7*m.pi/4 # Input alpha
x_multiplier = np.linspace(0, 1, 100)
x_values = np.linspace(0, alpha, 100)
y_values = []
for i in range(len(x_multiplier)):
    y_values.append(solution(a, x_values[i], x_multiplier[i]))

plt.plot(x_values, y_values)
plt.xlabel('')
plt.ylabel('')
plt.title('')

plt.show()
```

ВИСНОВКИ

У результаті розрахунків було знайдено фунцію температури $w(r,\theta)$. Завдяки програмі можливо знайти значення температури в будь-якій точці сектора і побудувати графік зміни температури в секторі кола.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов Г.Я., Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. навчальний посібник з курсу "Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень" // Одеса: Астропринт, 2005 - 183 стр.
2. Довідник спеціальних функцій (под. ред. М. Абрамовица и И. Стигана) // Москва, «Наука», 1979 - 828 стр.
3. Є.С. Вакал, А. В. Лювейкін Методи математичної фізики в прикладах і задачах// Київ – 2020 - 188 стр.
4. Реут В.В., Вайсфельд Н.Д. навчально-методичний посібник "Рівняння математичної фізики"// Одеса: Астропринт, 2018 - 193 стр.