

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова  
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій  
Кафедра математичного аналізу

**Кваліфікаційна робота**  
на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»  
**«Періодичні розв’язки лінійних систем  
диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами»**  
**«Periodic solutions of linear systems of differential  
equations with constant coefficients»**

Виконала: здобувачка денної форми навчання  
спеціальності 111 Математика

Освітня програма «Математика»

Носкіна Єва Олегівна

Керівник: ст. викл. Кольцова Л.Л. \_\_\_\_\_

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук, проф. Кореновський А.О.

Рекомендовано до захисту:

Протокол засідання кафедри

№ \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2024 р.

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_

Захищено на засіданні ЕК № \_\_\_\_\_

Протокол № \_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ 2024 р.

Оцінка \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Голова ЕК

\_\_\_\_\_

Одеса — 2024 р.

# ЗМІСТ

|                                                                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Вступ</b>                                                                                              | <b>3</b>  |
| <b>1 Деякі загальні питання теорії лінійних систем зі змінними коефіцієнтами</b>                          | <b>4</b>  |
| 1.1 Існування та єдиність розв’язку лінійної однорідної системи зі змінними коефіцієнтами . . . . .       | 4         |
| 1.2 Фундаментальна система розв’язків та матрицант лінійної однорідної системи . . . . .                  | 7         |
| 1.3 Побудова розв’язку лінійної неоднорідної системи зі змінними коефіцієнтами . . . . .                  | 12        |
| <b>2 Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами</b>                                               | <b>15</b> |
| 2.1 Випадок простих коренів характеристичного рівняння                                                    | 15        |
| 2.2 Випадок кратного кореня характеристичного рівняння<br>Жорданова нормальна форма . . . . .             | 19        |
| 2.3 Структура розв’язків лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами. Групи розв’язків . . . . . | 23        |
| <b>3 Періодичні розв’язки лінійних систем зі сталими коефіцієнтами</b>                                    | <b>29</b> |
| 3.1 Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами                                                    | 29        |
| 3.2 Спряжені лінійні системи . . . . .                                                                    | 32        |
| 3.3 Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами                                                  | 38        |
| <b>Висновок</b>                                                                                           | <b>44</b> |

## ВСТУП

Диференціальні рівняння є основним інструментом для моделювання процесів у різних науках. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами особливо важливі для опису динаміки в фізичних, економічних та біологічних системах. Вивчення періодичних розв'язків цих систем має значення для аналізу коливальних процесів, стабільності систем і теорії керування.

Метою цієї роботи є дослідження методів знаходження та аналізу періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Це включає вивчення фундаментальної системи розв'язків, побудову матрицанта та дослідження структурних властивостей періодичних розв'язків для однорідних і неоднорідних систем.

Ця робота спрямована на поглиблене вивчення теорії лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та їх періодичних розв'язків, що є важливим для розвитку як теоретичних досліджень, так і практичних застосувань у різних галузях науки і техніки.

# РОЗДІЛ 1

## ДЕЯКІ ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

**Існування та єдиність розв'язку лінійної однорідної системи зі змінними коефіцієнтами**

Розглянемо систему виду:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.1.1)$$

де  $t \in (-\infty, +\infty)$ ,  $a_{jk}(t)$  – у загальному випадку комплекснозначні функції, кусково неперервні у будь-якому кінцевому проміжку  $(t_1, t_2)$ , тобто мають на цьому проміжку хіба що кінцеве число точок розриву.

Під інтегрованою кусковою неперервною функцією будемо розуміти кусково неперервну функцію, для якої в кожній її точці розриву  $t^*$  існують границі

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{t_1}^{t^* - \epsilon} |f(t)| dt, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{t^* + \epsilon}^{t_2} |f(t)| dt,$$

де  $t_1, t_2$  обрані таким чином, щоб проміжки  $(t_1, t^*)$ ,  $(t^*, t_2)$  не містили інших точок розриву.

Систему (1.1.1) можна записати у матричній формі:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1.1.2)$$

де  $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $A(t) = (a_{jk}(t))$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ .

Доведемо, що розв'язання векторного рівняння (1.1.2) з початковою

умовою  $x(0) = x_0$ , визначене як розв'язок векторного інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x(\tau)d\tau \quad (1.1.3)$$

у класі неперервних вектор-функцій, що мають інтегровану кусково неперервну похідну, існує і єдино.

Рішення рівняння (1.1.3) шукаємо методом Пікара:

$$x_0(t) = x_0, \quad x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t A(\tau)x_k(\tau)d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.4)$$

Оскільки інтеграл від кусково неперервної функції є неперервна функція, то звідси випливає, що всі  $x_k(t)$  – неперервні функції у всіх точках  $t$ .

Доведемо, що послідовність  $\{x_k(t)\}$  рівномірно збігається на будь-якому кінцевому інтервалі зміни  $t$ . Розглянемо:

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \int_0^t \|A(\tau)\|d\tau \cdot \|x_0\|,$$

де норми вектора  $x(t)$  та матриці  $A(t)$  розуміються наступним чином:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k(t)|^2}, \quad \|A(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}(t)|^2}.$$

Припустимо за індукцією, що

$$\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \frac{1}{k!} \left( \int_0^t \|A(\tau)\|d\tau \right)^k \cdot \|x_0\|. \quad (1.1.5)$$

Розглянемо:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &= \left\| \int_0^t A(\tau)x_k(\tau)d\tau - \int_0^t A(\tau)x_{k-1}(\tau)d\tau \right\| = \\ &= \left\| \int_0^t A(\tau)(x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau))d\tau \right\| \leq \int_0^t \|A(\tau)\| \cdot \|x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)\|d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^t \|A(\tau)\| \frac{1}{k!} \left( \int_0^\tau \|A(s)\| ds \right)^k \cdot \|x_0\| d\tau = \frac{1}{k!} \|x_0\| \int_0^t \left( \int_0^\tau \|A(s)\| ds \right)^k d\tau$$

$$d \left( \int_0^\tau \|A(s)\| ds \right) = \frac{\|x_0\|}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} \left( \int_0^\tau \|A(s)\| ds \right)^{k+1} \Big|_0^t = \frac{\|x_0\|}{(k+1)!} \left( \int_0^t \|A(s)\| ds \right)^{k+1},$$

тобто нерівність (1.1.5) методом індукції доведено.

Позначимо  $x(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t)$ . Тоді  $x(t)$  задовольняє інтегральному рівнянню (1.1.3) і має кусково неперервну похідну. Диференціюючи (1.1.3) отримаємо, що  $x(t)$  задовольняє при всіх  $t$ , які не є точками розриву матриці  $A(t)$ , рівнянню (1.1.2).

Перейдемо до питання єдиності розв'язку. Для цього сформулюємо та доведемо лему.

**Лема Гронуолла-Беллмана.** Нехай інтегровані кусково неперервні функції  $\xi(t) \geq 0$  і  $\varphi(t) \geq 0$  задовольняють  $\forall t > 0$  нерівності:

$$\xi(t) \leq \xi_0 + \int_0^t \varphi(\tau) \xi(\tau) d\tau, \quad \xi_0 > 0. \quad (1.1.6)$$

Тоді

$$\xi(t) \leq \xi_0 e^{\int_0^t \varphi(s) ds}. \quad (1.1.7)$$

**Доведення.** Помножимо обидві частини нерівності (1.1.6) на  $\varphi(t)$ :

$$\xi(t) \varphi(t) \leq \xi_0 \varphi(t) + \varphi(t) \int_0^t \varphi(\tau) \xi(\tau) d\tau.$$

Позначимо:

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(\tau) \xi(\tau) d\tau, \quad \psi(0) = 0.$$

Тоді

$$\dot{\psi}(t) \leq \xi_0 \varphi(t) + \varphi(t) \psi(t) = \varphi(t) (\xi_0 + \psi(t)).$$

Або:

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\xi_0 + \psi(t)} \leq \varphi(t).$$

Інтегруючи обидві частини на проміжку  $(0, t)$ , де  $t > 0$ , отримаємо:

$$\int_0^t \frac{\dot{\psi}(\tau) d\tau}{\xi_0 + \psi(\tau)} \leq \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Або:

$$\ln \left| \frac{\xi_0 + \psi(t)}{\xi_0} \right| \leq \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Отже:

$$\xi_0 + \psi(t) \leq \xi_0 e^{\int_0^t \varphi(\tau) d\tau}.$$

тобто, враховуючи вираз для  $\psi(t)$ :

$$\xi_0 + \int_0^t \varphi(\tau) \xi(\tau) d\tau \leq \xi_0 e^{\int_0^t \varphi(\tau) d\tau}.$$

Звідси з урахуванням (1.1.6) витікає вимога. Лема доведена.

Повернемося до доказу єдиності розв'язку векторного рівняння (1.1.2) із початковою умовою  $x(0) = x_0$ . З (1.1.3) маємо:

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^t \|A(\tau)\| \cdot \|x(\tau)\| d\tau.$$

Тоді з доведеної леми випливає:

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| e^{\int_0^t \|A(\tau)\| d\tau}. \quad (1.1.8)$$

Якщо  $x^{(1)}(t)$ ,  $x^{(2)}(t)$  – розв'язок рівняння (1.1.2) з однаковими початковими умовами, то  $x(t) = x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)$  – розв'язки того ж рівняння з початковою умовою  $x(0) = 0$ , тоді з (1.1.8) випливає, що  $x(t) \equiv 0$ , що і доводить єдиність розв'язку.

## Фундаментальна система розв'язків та матрицант лінійної однорідної системи

Розглянемо будь-які  $k$  розв'язків системи (1.1.2):

$$x^{(j)}(t) = \text{colon}(x_{j1}(t), \dots, x_{jn}(t)) \quad (j = \overline{1, k}).$$

Матриця  $X^{(k)}(t) = \|x^{(1)}(t), \dots, x^{(k)}(t)\|$  розмірності  $n \times k$  задовольняє матричному диференціальному рівнянню:

$$\frac{dX^{(k)}}{dt} = A(t)X^{(k)}. \quad (1.2.1)$$

**Означення.** Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) рівняння (1.1.2) називається система  $n$  його розв'язків  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ , лінійно незалежних  $\forall t \in (-\infty, +\infty)$ . Квадратна матриця  $X^{(n)}(t) = \|x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\|$  називається матрицею ФСР.

Загальний розв'язок системи (1.1.2) у цьому випадку має вигляд:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^{(j)}(t),$$

де  $c_1, \dots, c_n$  – довільні сталі коефіцієнти. Або в матричній формі:

$$x(t) = X^{(n)}(t)c^{(n)},$$

де  $c^{(n)} = \text{colon}(c_1, \dots, c_n)$  – вектор зі сталими коефіцієнтами.

Якщо вектори  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$  утворюють ФСР системи (1.1.2), то будь-яка система векторів  $cx^{(1)}(t), \dots, cx^{(n)}(t)$ , де  $c = \text{const}$  також утворює ФСР системи (1.1.2), тобто ФСР визначається з точністю до сталого множника. Тобто, якщо система (1.1.2) має хоча б одну ФСР, то вона має безліч множин ФСР.

**Означення.** Матриця  $X(t)$  ФСР системи (1.1.2), що задовольняє умові  $X(0) = E$  ( $E$  – одинична матриця), називається матрицантом системи (1.1.2). У силу теореми єдиності матрицант визначається однозначно (на відміну від матриці ФСР).

Будь-який розв'язок  $x(t)$  системи (1.1.2) може бути знайдено за формулою:

$$x(t) = X(t)x(0).$$

А довільна  $n \times k$  - матриця  $X^{(k)}(t)$  розв'язків системи (1.1.2) – за формулою:

$$X^{(k)}(t) = X(t)X^{(k)}(0).$$

Для будь-якої матриці ФСР має місце формула Остроградського-Ліувіля:

$$\det X^{(n)}(t) = \det X^{(n)}(0) e^{\int_0^t \text{sp} A(\tau) d\tau}$$

де  $\text{sp} A(t) = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)$  – слід матриці  $A(t)$ .

Зокрема, для матрицанту ця формула набуває вигляду:

$$\det X(t) = e^{\int_0^t \text{sp} A(\tau) d\tau}.$$

*Приклад 1.* Розглянемо трикутну систему 2-го порядку:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2.$$

Неважко перевірити, що матрицант цієї системи має вигляд:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{\int_0^t a_{11}(s) ds} & 0 \\ e^{\int_0^t a_{22}(s) ds} \cdot \int_0^t a_{21}(\tau) e^{\int_0^{\tau} (a_{11}(s) - a_{22}(s)) ds} d\tau & e^{\int_0^t a_{22}(s) ds} \end{bmatrix}$$

*Приклад 2.* Розглянемо діагональну систему  $n$ -ого порядку:

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(t)x_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Легко перевірити, що в цьому випадку матрицант має вигляд:

$$X(t) = \text{diag} \left( e^{\int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau}, e^{\int_0^t \lambda_2(\tau) d\tau}, \dots, e^{\int_0^t \lambda_n(\tau) d\tau} \right).$$

Розглянемо тепер систему зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1.2.2}$$

де  $A$  – матриця сталих коефіцієнтів. Покажемо, що матриця системи (1.2.2) має вигляд:

$$X(t) = e^{At},$$

де

$$e^Z = E + Z + \frac{Z^2}{2!} + \dots + \frac{Z^n}{n!} + \dots$$

- матрична експонента. Справді, знайдемо похідну:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left( E + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= A + \frac{2A^2 t}{2!} + \frac{3A^3 t^2}{3!} + \frac{4A^4 t^3}{4!} + \dots + \frac{nA^n t^{n-1}}{n!} + \dots = \\ &= A \left( E + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \right) = Ae^{At}. \end{aligned}$$

Таким чином, бачимо, що матриця  $e^{At}$  задовольняє рівнянню (1.2.2). Оскільки  $e^{A \cdot 0} = E$ , то звідси випливає, що ця матриця справді є матрицантом системи (1.2.2). Будь-який розв'язок цього рівняння може бути знайдено за формулою:  $x(t) = e^{At}x(0)$ .

З формули Остроградського-Ліувіля випливає, що  $\det e^{At} = e^{t \cdot \text{sp} A}$ .

Таким чином, ми знайшли матрицант системи (1.2.2) за допомогою матричної експоненти. Іноді вигідно діяти навпаки, тобто знаходити матричну експоненту, знаходячи безпосередньо матрицант системи (1.2.2). Розглянемо наступний приклад.

*Приклад.* Знайти матрицю  $e^A$ , якщо матриця  $A$  має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо векторне рівняння  $\dot{x} = Ax$  у покомпонентній формі:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -x_2.$$

Складемо характеристичне рівняння  $\det(A - \lambda E) = 0$ . В даному випадку воно має вигляд  $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$ , та його корені:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm i$ . Лінійно незалежні розв'язки нашої системи можуть бути записані у вигляді:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Перші два розв'язки у точці  $t = 0$  дають вектори  $\text{colon}(1,0,0)$ ,  $\text{colon}(0,1,0)$ , тобто необхідну умову виконано. Третій вектор у цій точці дорівнює  $\text{colon}(1,0,-1)$ . Отже, його слід замінити такою комбінацією векторів  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ , яка б у точці  $t = 0$  давала вектор  $\text{colon}(0,0,1)$ . Неважко перевірити, що шуканою комбінацією є вектор:

$$\tilde{x}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Таким чином, матрицант нашої системи такий:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \sin t & 1 - \cos t \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Покладемо  $t = 1$ , отримаємо:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \sin 1 & 1 - \cos 1 \\ 0 & \cos 1 & \sin 1 \\ 0 & -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

У загальному випадку матриця  $A(t)$  може бути комплекснозначною. Але якщо вона дійсна, а комплекснозначна вектор-функція  $u(t) + iv(t)$  є розв'язком лінійної системи з цією матрицею, то дійсні вектор-функції  $u(t)$  і  $v(t)$  теж є розв'язками цієї системи. Це випливає з рівностей:

$$\frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(u + iv) = A(t)(u + iv) = A(t)u + iA(t)v,$$

тобто

$$\frac{du}{dt} = A(t)u, \quad \frac{dv}{dt} = A(t)v.$$

А звідси випливає, що матрицант системи з дійсними коефіцієнтами теж дійсна матриця-функція. Справді, нехай матрицант системи (1.1.2) комплекснозначний, тобто має вигляд:

$$X(t) = U(t) + iV(t).$$

Тоді матриці  $U(t)$ ,  $V(t)$  є розв'язками системи (1.1.2), тобто

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad \frac{dV(t)}{dt} = A(t)V(t).$$

Але оскільки  $X(0) = E$ , то  $U(0) = E$ ,  $V(0) = O$ , де  $O$  - нуль матриця. А тоді через єдиність розв'язків задачі Коші отримаємо, що  $V(t) \equiv O$ , тобто  $X(t)$  - дійсна матриця.

### Побудова розв'язку лінійної неоднорідної системи зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо лінійну неоднорідну систему:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (1.3.1)$$

де  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ . Шукатимемо загальний розв'язок системи:

$$x = X(t)u(t), \quad (1.3.2)$$

де  $X(t)$  – матрицант відповідної однорідної системи (1.1.2), а  $u(t)$  – доки не визначений вектор. Диференціюючи рівність (1.3.2), і підставляючи в (1.3.1), отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}u + X(t)\frac{du}{dt} = A(t)X(t)u + f(t).$$

На підставі рівності

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t),$$

звідси випливає:

$$\frac{du}{dt} = X^{-1}(t)f(t).$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$u = \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + C,$$

де  $C$  – вектор зі сталими коефіцієнтами. Підставляючи в (1.3.2), отримаємо загальний розв'язок рівняння (1.3.1):

$$x = X(t) \left( C + \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right). \quad (1.3.3)$$

Покладемо  $t = 0$ . Оскільки  $X(0) = E$ , отримуємо, що  $C = x(0)$ , і, таким чином, розв'язок рівняння (1.3.1) може бути записан у вигляді:

$$x(t) = X(t) \left( x(0) + \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \right).$$

*Приклад.* Побудувати загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + tg^2t - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + tgt \end{cases}.$$

Введемо вектори:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} tg^2t - 1 \\ tgt \end{pmatrix}$$

та матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді наша система запишеться у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t).$$

Неважко перевірити, що матрицант відповідної однорідної системи такий:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad X^{-1}(t)f(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin^3 t \cos^{-2} t \end{pmatrix},$$

$$\int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t + \cos^{-1} t - 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до формули (1.3.3) отримаємо:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left( C + \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t + \cos^{-1} t - 2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \textit{cost} & \textit{sint} \\ -\textit{sint} & \textit{cost} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\textit{sint} \\ \textit{cost} + \cos^{-1}t - 2 \end{pmatrix} \right).$$

Перепозначивши тут  $c_2 - 2$  знову через  $c_2$ , і, записавши покомпонентно, остаточно отримаємо:

$$x_1 = c_1 \textit{cost} + c_2 \textit{sint} + \textit{tgt}, \quad x_2 = -c_1 \textit{sint} + c_2 \textit{cost} + 2.$$

## РОЗДІЛ 2

# ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

### Випадок простих коренів характеристичного рівняння

Розглянемо тепер лінійну однорідну систему  $n$ -ого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.1.1)$$

де  $a_{jk}$  - сталі коефіцієнти. У матричній формі система (2.1.1) буде мати вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2.1.2)$$

де  $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $A = (a_{jk})$ ,  $j, k = \overline{1, n}$ . Розглянемо характеристичне рівняння системи (2.1.2):

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.1.3)$$

Це рівняння інваріантне щодо лінійного невиродженого перетворення змінних, тобто, якщо  $x = By$ ,  $\det B \neq 0$ , то  $y = B^{-1}x$ , та

$$\frac{dy}{dt} = B^{-1} \frac{dx}{dt} = B^{-1} Ax = B^{-1} A B y = C y. \quad (2.1.4)$$

Розглянемо характеристичний визначник для системи (4):

$$\begin{aligned} \det(C - \rho E) &= \det(B^{-1}AB - \rho E) = \det(B^{-1}AB - \rho B^{-1}B) = \\ &= \det(B^{-1}(A - \rho E)B) = \det B^{-1} \cdot \det(A - \rho E) \cdot \det B = \det(A - \rho E). \end{aligned}$$

Таким чином, характеристичне рівняння для системи (2.1.4) збігається з таким для системи (1.1.2). Звідси випливає, зокрема, що подібні матриці  $A$  та  $C = B^{-1}AB$  мають одні й ті самі власні значення (корені рівняння (1.1.3)).

Нехай рівняння (2.1.3) має  $n$  простих коренів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Цим кореням відповідає система з  $n$  лінійно незалежних власних векторів  $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(n)}$  матриці  $A$ . Якщо скласти з компонент цих векторів матрицю  $H$  то вона буде невиродженою, а матриця  $H^{-1}AH = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Тобто перетворення  $x = Hy$  в системі (2.1.2) приводить цю систему до діагонального вигляду:

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y. \quad (2.1.5)$$

Матрицант цієї системи (див. Приклад 2 у п. 1.1.2) такий:

$$Y(t) = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}). \quad (2.1.6)$$

Отже, загальний розв'язок системи (2.1.5) має вигляд:

$$y(t) = Y(t)c, \quad (2.1.7)$$

де  $c$  – вектор зі сталими коефіцієнтами. Матрицант вихідної системи (2.1.2) тоді прийме вигляд:

$$X(t) = HY(t)H^{-1}, \quad (2.1.8)$$

а її загальний розв'язок:

$$x(t) = X(t)c. \quad (2.1.9)$$

*Приклад 1.* Знайти матрицант системи

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 + 2x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 - x_2. \quad (2.1.10)$$

Характеристичне рівняння цієї системи

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

має корені  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ , тобто дійсні та прості. Компоненти лінійно незалежних власних векторів для кожного з них визначаються з лінійних

однорідних систем рівнянь алгебри:

$$\begin{cases} (5 - \lambda_j)\alpha_j + 2\beta_j = 0 \\ -4\alpha_j - (1 + \lambda_j)\beta_j = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

Для  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -2, \alpha_2 = 1, \beta_2 = -1$ , отримаємо матрицю перетворення системи (2.1.10) до діагонального вигляду:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, матрицант системи (2.1.10) має вигляд:

$$X(t) = H \cdot \text{diag}(e^t, e^{3t}) \cdot H^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^t & e^{3t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{3t} & 2e^t - e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи (2.1.10) отримаємо за формулою  $x(t) = X(t)c$ , де  $c$  - вектор зі сталими коефіцієнтами. Або в покомпонентній формі:

$$x_1 = c_1(2e^{3t} - e^t) + c_2(e^{3t} - e^t), \quad x_2 = c_1(2e^t - 2e^{3t}) + c_2(2e^t - e^{3t}).$$

Якщо серед коренів характеристичного рівняння системи з дійсними коефіцієнтами є комплексні (вони тоді будуть присутні парами – поряд з кожним коренем  $\lambda_1 = a + ib$  буде присутнім і йому спряжений  $\lambda_2 = a - ib$ ), то для побудови матрицанта достатньо аналізу лише одного з цих коренів. Позначимо через  $h = h^{(1)} + ih^{(2)}$  власний вектор матриці  $A$  системи, що відповідає власному значенню  $\lambda_1 = a + ib$ . Тоді вектор  $x(t) = (h^{(1)} + ih^{(2)})e^{(a+ib)t}$  буде розв'язком цієї системи, а отже, її ж розв'язками будуть дійсна та уявна частини цього вектора:

$$x^{(1)}(t) = e^{at}(h^{(1)}\cos bt - h^{(2)}\sin bt), \quad x^{(2)}(t) = e^{at}(h^{(2)}\cos bt + h^{(1)}\sin bt).$$

Нескладно переконатись, що ці розв'язки є лінійно незалежними. Справді, інакше існувала б така дійсна стала  $k$ , що  $\forall t \in \mathbb{R}$  було б виконано:  $x^{(2)}(t) = kx^{(1)}(t)$ . А це призвело б до рівності  $k^2 + 1 = 0$ , що неможливо. Отже, вектор-функції  $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$  можуть бути використані як складові

ФСР, і тоді в розгляді кореня  $\lambda_2 = a - ib$  необхідність відпадає. Знаючи ФСР, легко знайти і матрицант.

*Приклад 2.* Знайти матрицант і загальний розв'язок системи:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2. \quad (2.1.11)$$

Характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

має корені  $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ . Розглянемо корінь  $\lambda_1 = 2 + i$  та знайдемо компоненти відповідного йому власного вектора із системи:

$$\begin{cases} -(1+i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (1-i)\beta = 0. \end{cases}$$

Для  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1 + i$ , отримаємо комплекснозначний розв'язок системи (2.1.11):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{2t} (\cos t + i \sin t) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned}$$

Використовуючи дійсну та уявну частини отриманого розв'язку, отримаємо ФСР системи (2.1.11):

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Загальний розв'язок системи (2.1.11) матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Тепер знайдемо матрицант. Визначимо константи  $c_1, c_2$  спочатку з умови:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо  $c_1 = 1, c_2 = -1$  і, т.ч. отримуємо частинний розв'язок системи (2.1.11):

$$\begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -2\sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Тепер визначимо константи  $c_1, c_2$  за умови:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отримаємо  $c_1 = 0, c_2 = 1$  і т. о. отримуємо ще один частинний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x_1^{**}(t) \\ x_2^{**}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

З цих двох розв'язків складаємо матрицант системи (2.1.11):

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

У розгляді кореня  $\lambda_2 = 2 - i$  вже немає необхідності.

## **Випадок кратного кореня характеристичного рівняння Жорданова нормальна форма**

Нехай серед коренів  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  характеристичного рівняння (2.1.3) є кратні. Тоді відповідно до теореми лінійної алгебри існує базис, в якому матриця лінійного оператора має нормальну жорданову форму (ЖНФ):

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}, \quad (2.2.1)$$

де  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ , а

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

$J_m(\lambda)$  – квадратна матриця розмірності  $m$ , звана жордановою клітиною. Серед чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  можуть бути такі, що співпадають. Кількість  $s_m(\lambda)$  жорданових клітин порядку  $m$  ЖНФ, відповідних числу  $\lambda$ , визначається рівністю:

$$s_m(\lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda), \quad (2.2.2)$$

де  $r_k(\lambda) = \text{rang}(A - \lambda E)^k$ . Загальна кількість жорданових клітин, що відповідають власному значенню  $\lambda$ , дорівнює  $n - r_1(\lambda)$  – числу лінійно незалежних власних векторів матриці  $A$ , що відповідають власному значенню  $\lambda$ . Максимальний розмір жорданової клітини, що відповідає власному значенню  $\lambda$ , дорівнює найменшому натуральному числу  $m$ , для якого виконано рівність:  $r_m(\lambda) = r_{m+1}(\lambda)$ . За цими даними ЖНФ виписується однозначно з точністю до розташування жорданових клітин.

Розглянемо матрицю

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1 - \lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2 - \lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_k}(\lambda_k - \lambda) \end{pmatrix}$$

Визначники матриць  $J_{m_j}(\lambda_j - \lambda)$  ( $j = \overline{1, k}$ ) називаються елементарними дільниками матриці  $A$ , а розмірності  $m_1, m_2, \dots, m_k$  жорданових клітин – кратності елементарних дільників. Структура ЖНФ і розв’язків системи (2.1.2), у загальному випадку визначається саме кратністю елементарних дільників. Сума кратностей елементарних дільників, які відповідають власному значенню  $\lambda_j$ , збігається з кратністю цього власного значення. Очевидно тоді,

якщо  $\lambda_j$  – просте власне значення матриці  $A$ , йому відповідає і простий елементарний дільник. Але зворотне неправильно, тобто прості елементарні дільники можуть відповідати і кратним власним значенням.

Якщо всі елементарні дільники прості, то ЖНФ набуває діагонального вигляду, зокрема, це буде у разі простих коренів характеристичного рівняння.

Знаючи ЖНФ матриці, легко побудувати і відповідний жорданів базис. Розглянемо жорданову клітину  $J_m(\lambda)$  порядку  $m$ , що відповідає власному значенню  $\lambda$ . Визначимо вектори базису в такий спосіб. Вектор  $h_m$  визначимо з рівняння:

$$(A - \lambda E)^m h_m = 0.$$

Далі вважаємо:

$$\begin{aligned} h_{m-1} &= (A - \lambda E)h_m, \\ h_{m-2} &= (A - \lambda E)h_{m-1}, \\ &\dots \\ h_1 &= (A - \lambda E)h_2. \end{aligned}$$

У цьому випадку виконуватимуться рівності  $(A - \lambda E)^k h_k = 0$  ( $k = \overline{1, m}$ ). Зокрема вектор  $h_1$  буде власним вектором матриці  $A$ . Вектори  $h_2, \dots, h_m$  називаються приєднаними до вектора  $h_1$ . Усі вектори  $h_1, h_2, \dots, h_m$  потрібно вибирати ненульовими. Тоді вони будуть частиною жорданового базису, яка відповідає клітині  $J_m(\lambda)$ . Потім аналогічні побудови потрібно зробити для всіх інших жорданових клітин, при цьому стежачи за тим, щоб вектори з одними і тими ж номерами, що відповідають різним жордановим клітинам, були лінійно незалежні. У результаті весь жорданів базис виписеться повністю.

*Приклад.* Для матриці  $A$  знайти ЖНФ і побудувати жорданів базис.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що характеристичне рівняння  $\det(A - \lambda E) = 0$  має

корінь  $\lambda = 2$  кратності 3. Розглянемо

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо  $\text{rang}(A - 2E) = 1$ , отже, у ЖНФ є дві клітини. Цього достатньо, щоб виписати ЖНФ з точністю до розташування клітин:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Звідси видно, що власному значенню  $\lambda = 2$  відповідає один простий елементарний дільник  $\lambda - 2$  та один елементарний дільник 2-ї кратності  $(\lambda - 2)^2$ . Сума їх кратностей дорівнює 3 – кратності власного значення  $\lambda = 2$ .

Перейдемо до побудови жорданового базису. Використовуємо першу клітинку порядку 2. Визначимо приєднаний вектор  $h_2$  із умови:

$$(A - 2E)^2 h_2 = 0, \text{ тобто } Oh_2 = 0.$$

Тоді

$$h_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

де  $c_1, c_2, c_3$  - довільні сталі. Власний вектор  $h_1$  матриці  $A$  визначимо рівністю:

$$h_1 = (A - 2E)h_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 + c_2 \\ -4c_1 + c_2 \\ -2c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Тепер використовуємо другу клітину порядку 1. Власний відповідний вектор позначимо через  $g_1$ . Маємо  $(A - 2E)g_1 = 0$ . Вектори  $h_1$  та  $g_1$  мають бути лінійно незалежними. Вважаючи, наприклад,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ , отримаємо:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вважаючи  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 0$ , отримаємо:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектори  $h_2, h_1, g_1$  і утворюють жорданів базис. Їхні компоненти утворюють матрицю переходу від матриці  $A$  до ЖНФ:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = H^{-1}AH.$$

### Структура розв'язків лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами. Групи розв'язків

З'ясуємо тепер структуру розв'язків системи (2.1.2). Якщо всі корені характеристичного рівняння (2.1.3) прості, то структура визначається формулами (2.1.6) – (2.1.9). Розглянемо випадок, коли серед коренів рівняння (2.1.3) можуть бути кратні. Тоді, побудувавши для матриці  $A$  ЖНФ  $J$  і жорданів базис з матрицею  $H$ , за допомогою перетворення

$$x = Hy \tag{2.3.1}$$

приведемо систему (2.1.2) до виду:

$$\frac{dy}{dt} = Jy. \tag{2.3.2}$$

Система (2.3.2) називається канонічною формою системи (2.1.2). Вона зручна тим, що легко інтегрується зверху вниз. Оскільки матрицант системи (2.3.2) дорівнює  $e^{Jt}$ , то матрицант системи (2.1.2):

$$X(t) = H \cdot e^{Jt} \cdot H^{-1}. \tag{2.3.3}$$

Тому для з'ясування структури розв'язків системи (2.1.2) необхідно з'ясувати структуру матриці  $e^{Jt}$ .

За властивістю матричної експоненти з урахуванням структури (2.2.1) матриці  $J$  можемо записати:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_{m_1}(\lambda_1)t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{m_2}(\lambda_2)t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_{m_k}(\lambda_k)t} \end{pmatrix}. \quad (2.3.4)$$

Обчислимо матрицю  $e^{J_m(\lambda)t}$ . Матриця  $J_m(\lambda)$  є матрицею лінійної системи:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda x_2 + x_1, \\ &\dots \\ \frac{dx_{m-1}}{dt} &= \lambda x_{m-1} + x_{m-2}, \\ \frac{dx_m}{dt} &= \lambda x_m + x_{m-1}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

тому матриця  $e^{J_m(\lambda)t}$  є матрицантом системи (2.3.5). Обчислимо його. Інтегруючи рівняння системи (2.3.5) послідовно зверху донизу, нескладно переконатися, що шуканий матрицант має вигляд:

$$e^{J_m(\lambda)t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{t^{m-4}}{(m-4)!} & \dots & 1 & 0 \\ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda t}. \quad (2.3.6)$$

Внаслідок співвідношень (2.3.4), (2.3.6) розв'язки, що становлять матрицант системи (2.3.2) розбіються на  $k$  груп, що містять відповідно  $m_1, m_2, \dots, m_k$  розв'язків. Група з номером  $v$  ( $v = \overline{1, k}$ ) матиме вигляд матриці з  $n$  рядками та  $m_v$  стовпцями. Перші  $m_1 + m_2 + \dots + m_{v-1}$  та останні  $n - (m_1 + m_2 + \dots + m_v)$  рядків цієї матриці нульові, а рядки, що мають номери з  $m_1 + m_2 + \dots + m_{v-1} + 1$  по  $m_1 + m_2 + \dots + m_v$  утворюють матрицю, що має вид  $e^{J_{m_v}(\lambda_v)t}$ . Нагадаємо при цьому, що серед чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  можуть бути і збіжні.

З урахуванням співвідношення (2.3.3) звідси тепер слід, що у відповідні групи розв'язків розбивається і матрицант системи (2.1.2). Група з номером  $v$  ( $v = \overline{1, k}$ ) має вигляд  $P_{m_v-1}^{(v)}(t)e^{\lambda_v t}$ , де  $P_{m_v-1}^{(v)}(t)$  – матриця розмірності  $m \times m_v$ , кожен елемент якої є поліномом ступеня не вище, ніж  $m_v - 1$ . Отже, враховуючи співвідношення (2.1.9), можемо зробити висновок, що аналогічну структуру мають усі розв'язки системи (2.1.2).

*Приклад 1.* Побудувати матрицант системи:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 + 2x_3, \quad (2.3.7)$$

визначити групи розв'язків. Виписати загальний розв'язок цієї системи.

У прикладі п. 2.2 для матриці системи (2.3.7)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ми побудували ЖНФ

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

і жорданів базис з матрицею

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Або:

$$J = \begin{pmatrix} J_2(2) & O_{12} \\ O_{21} & J_1(2) \end{pmatrix},$$

де  $O_{12}$  – нульова матриця розмірності  $2 \times 1$ ,  $O_{21}$  – нульова матриця розмірності  $1 \times 2$ ,

$$J_2(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J_1(2) = (2).$$

Відповідно до (2.3.4) тоді маємо:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_2(2)t} & O_{12} \\ O_1 & e^{J_1(2)t} \end{pmatrix}.$$

Далі відповідно до (2.3.6):

$$e^{J_2(2)t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad e^{J_1(2)t} = (e^{2t}).$$

Таким чином,

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

З (2.3.3) отримаємо матрицант системи (2.3.7):

$$X(t) = H \cdot e^{Jt} \cdot H^{-1} = \begin{pmatrix} (-2t+1)e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & (2t+1)e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Маємо у разі дві групи розв'язків:

$$\begin{pmatrix} (-2t+1)e^{2t} & te^{2t} \\ -4te^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ -2te^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи (2.3.7) отримаємо, взявши лінійну комбінацію стовпців матрицанта. Або, розписавши у покомпонентній формі:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1(-2t+1)e^{2t} + c_2te^{2t}, \\ x_2 &= -4c_1te^{2t} + c_2(2t+1)e^{2t}, \\ x_3 &= -2c_1te^{2t} + c_2te^{2t} + c_3e^{2t}. \end{aligned}$$

*Приклад 2.* Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 4-го порядку:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \quad (2.3.8)$$

Його загальний розв'язок легко побудувати, використовуючи відповідну теорію лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Але тут ми вирішимо це завдання з використанням ЖНФ. Характеристичне рівняння для рівняння (2.3.8):

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \quad (2.3.9)$$

має корені  $\lambda_{1,2} = -i$ ,  $\lambda_{3,4} = i$ . Ввівши

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad x_4 = \frac{d^3x}{dt^3},$$

запишемо рівняння (2.3.8) у вигляді еквівалентної системи:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} = -x_1 - 2x_3. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Її матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння  $\det(A - \lambda E) = 0$  збігається з рівнянням (2.3.9). Відповідно до викладеного у п. 2.2 можемо відразу виписати ЖНФ матриці  $A$ :

$$J = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Нескладно отримати, що матриця  $H$  жорданового базису може бути такою:

$$H = \begin{pmatrix} 2i & -1 & -2i & -1 \\ 1 & i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$

$J = H^{-1}AH$ . Матриця  $e^{Jt}$  має вигляд:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 & 0 \\ te^{-it} & e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & te^{it} & e^{it} \end{pmatrix}.$$

Отримуємо дві групи розв'язків:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-it}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} e^{it}.$$

Матрицант системи (2.3.10):

$$X(t) = H \cdot e^{Jt} \cdot H^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\text{ sint} + \text{cost} & -\frac{t}{2}\text{cost} + \frac{3}{2}\text{ sint} & \frac{t}{2}\text{ sint} & -\frac{t}{2}\text{cost} + \frac{1}{2}\text{ sint} \\ \frac{t}{2}\text{cost} - \frac{1}{2}\text{ sint} & \frac{t}{2}\text{ sint} + \text{cost} & \frac{t}{2}\text{cost} + \frac{1}{2}\text{ sint} & \frac{t}{2}\text{ sint} \\ -\frac{t}{2}\text{ sint} & \frac{t}{2}\text{cost} - \frac{1}{2}\text{ sint} & -\frac{t}{2}\text{ sint} + \text{cost} & \frac{t}{2}\text{cost} + \frac{1}{2}\text{ sint} \\ -\frac{t}{2}\text{cost} - \frac{1}{2}\text{ sint} & -\frac{t}{2}\text{ sint} & -\frac{t}{2}\text{cost} - \frac{3}{2}\text{ sint} & -\frac{t}{2}\text{ sint} + \text{cost} \end{pmatrix}.$$

Як і має бути, матрицант дійсний.

## РОЗДІЛ 3

# ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

### Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо знову лінійну однорідну систему зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (3.1.1)$$

Зі структури розв'язків системи (3.1.1) випливає, що періодичні розв'язки можуть бути тоді і тільки тоді, коли серед коренів характеристичного рівняння  $\det(A - \lambda E) = 0$  є корені з нульовими дійсними частинами, тобто нульові або чисто уявні корені.

Припустимо, що характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності  $p$ , якому відповідають  $k$  груп розв'язків (або, відповідно,  $k$  жорданових клітин у ЖНФ матриці  $A$ , або  $k$  елементарних дільників матриці  $A$ ). Тоді система (3.1.1) матиме  $k$  частинних розв'язків виду:

$$x^{(j)}(t) = A^{(j)} \quad (j = \overline{1, k}), \quad (3.1.2)$$

де  $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$  – вектори зі сталими коефіцієнтами. Ці розв'язки, очевидно, можна розглядати як періодичні довільного періоду. Інші розв'язки, відповідні нульовому кореню, будуть поліномами від  $t$ , тобто неперіодичними.

Допустимо тепер, що характеристичне рівняння має пару чисто уявних коренів  $\pm i\omega$ . Якщо ці корені кратні, і кожному з них відповідає  $k$  груп розв'язків, то система (3.1.1) має  $2k$  розв'язків виду:

$$\begin{aligned} x^{(j)} &= B^{(j)} \cos \omega t - C^{(j)} \sin \omega t, \\ \tilde{x}^{(j)} &= B^{(j)} \sin \omega t + C^{(j)} \cos \omega t \\ (j &= \overline{1, k}) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

де  $B^{(j)}, C^{(j)}$  – вектори зі сталими коефіцієнтами. Ці розв’язки будуть періодичними періоду  $2\pi/\omega$ . Інші розв’язки, якщо вони існують, періодичними не будуть, оскільки будуть містити доданки виду  $t^m \sin \omega t, t^m \cos \omega t$ . Але система (3.1.1) може мати  $2\pi/\omega$ -періодичні розв’язки, відмінні від (3.1.3), і тоді, коли характеристичне рівняння матиме корені виду  $\pm i s \omega$ , де  $s$  – натуральне число. Цим коренням відповідатимуть розв’язки періоду  $2\pi/(s\omega)$ , а, отже, і періоду  $2\pi/\omega$ . Крім того, якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь, то до  $2\pi/\omega$ -періодичних розв’язків можна віднести і розв’язки (3.1.2). Припустимо для певності, що характеристичне рівняння має нульовий корінь, якому відповідає  $k$  груп розв’язків, і  $r$  пар чисто уявних коренів виду  $\pm i s_j \omega$  ( $j = \overline{1, r}$ ), де  $s_1, \dots, s_r$  – натуральні числа, причому кожному кореню такої пари відповідає  $k_j$  груп розв’язків (жординових клітин). Тоді система (7.1) матиме  $m = k + 2k_1 + \dots + 2k_r$  лінійно незалежних періодичних розв’язків періоду  $2\pi/\omega$ . Перенумеруємо ці розв’язки в якомусь порядку і позначимо їх через  $\varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(m)}(t)$ . Тоді система (3.1.1) матиме  $2\pi/\omega$ -періодичний розв’язок

$$\varphi(t) = c_1 \varphi^{(1)}(t) + \dots + c_m \varphi^{(m)}(t),$$

залежить від  $m$  довільних сталих  $c_1, \dots, c_m$ . Або  $m$ -параметричне сімейство  $2\pi/\omega$ -періодичних розв’язків.

*Приклад.* Розглянемо систему, що відповідає лінійному рівнянню 4-го порядку:

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + k^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

де  $k$  – натуральне число. Ця система має вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -k^2 x_3. \quad (3.1.4)$$

Матриця цієї системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння  $\det(A - \lambda E) = \lambda^4 + k^2\lambda^2 = 0$  має корені  $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm ik$ . ЖНФ матриці  $A$ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ki & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ki \end{pmatrix}.$$

Кореню  $\lambda = 0$  кратності 2 відповідає одна жорданова клітина порядку 2 (одна група розв'язків), простим чисто уявним кореням  $\lambda = \pm ki$  відповідають 2 клітини порядку 1 (дві групи розв'язків). Т.о. система (3.1.4) має  $m = 1 + 2 = 3$  лінійно незалежних  $2\pi$ -періодичних розв'язків (тут  $\omega = 1, s = 2$ ). Матрицант системи (3.1.4) такий:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\cos kt & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3}\sin kt \\ 0 & 1 & \frac{1}{k}\sin kt & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\cos kt \\ 0 & 0 & \cos kt & \frac{1}{k}\sin kt \\ 0 & 0 & -k\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

А лінійно незалежні  $2\pi$ -періодичні розв'язки системи (3.1.4):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\cos kt \\ k\sin kt \\ k^2\cos kt \\ -k^3\sin kt \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sin kt \\ -k\cos kt \\ k^2\sin kt \\ k^3\cos kt \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система (3.1.4) має 3-параметричне сімейство  $2\pi$  - періодичних розв'язків:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 - c_2\cos kt - c_3\sin kt, \\ x_2 &= kc_2\sin kt - kc_3\cos kt, \\ x_3 &= k^2c_2\cos kt + k^2c_3\sin kt, \\ x_4 &= -k^3c_2\sin kt + k^3c_3\cos kt. \end{aligned}$$

З вищевикладених результатів випливає, що лінійне однорідне диференціальне рівняння  $n$ -ого порядку зі сталими коефіцієнтами також має періодичні розв'язки лише у тому випадку, коли його характеристичне рівняння має нульові або чисто уявні корені. Припустимо для певності, що

є нульовий корінь і  $r$  пар чисто уявних коренів виду  $\pm i s_j \omega$  ( $j = \overline{1, r}$ ) де  $s_j$  - натуральні числа. Тоді диференціальне рівняння має  $(2r + 1)$  -параметричне сімейство  $2\pi/\omega$ -періодичних розв'язків. Звернімо увагу, що кратність коренів характеристичного рівняння тут ролі не відіграє - кожному кореню, незалежно від його кратності, в даному випадку відповідає в ЖНФ тільки одна клітина (одна група розв'язків, один елементарний дільник), а кількість параметрів у сімействі періодичних розв'язків визначається лише кількістю жорданових клітин, що відповідають нульовим і чисто уявним коренням. А їх кратностями визначаються лише розмірність кожної клітини (кількість розв'язків у групі, ступінь елементарного дільника).

### Спряжені лінійні системи

Розглянемо лінійну однорідну систему з дійсними змінними коефіцієнтами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.1)$$

Система

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{kj}(t)y_k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2.2)$$

називається спряженою до системи (3.2.1). Очевидно, що відповідно системою, спряженою до системи (3.2.2), буде система (3.2.1). Якщо записати системи (3.2.1) та (3.2.2) у матричній формі, то відповідно матимемо:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = -A^T(t)y,$$

де  $A^T(t)$  - матриця, транспонована до матриці  $A(t)$ .

Нехай  $x_j(t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) - довільний розв'язок системи (3.2.1), а  $y_j(t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) - довільний розв'язок системи (3.2.2). Розглянемо:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n x_j(t)y_j(t) \right) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{dx_j}{dt} y_j + x_j \frac{dy_j}{dt} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \left[ \left( \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k \right) y_j + x_j \left( - \sum_{k=1}^n a_{kj}(t)y_k \right) \right] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{jk}(t)x_k y_j - a_{kj}(t)x_j y_k) = \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)x_k y_j - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj}(t)x_j y_k \equiv 0.
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^n y_j(t)x_j(t) = \text{const.} \quad (3.2.3)$$

Це означає, що лінійна форма змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sum_{j=1}^n y_j(t)x_j$$

є перший інтеграл системи (3.2.1). Отже, знання одного частинного розв'язку системи (3.2.2) дозволяє без інтегрування отримати один перший інтеграл системи (3.2.1), причому його ліва частина є лінійна функція від шуканих змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Якщо відома ФСР системи (3.2.2):

$$\begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \\ \vdots \\ y_{1n}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \\ \vdots \\ y_{2n}(t) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_{n1}(t) \\ y_{n2}(t) \\ \vdots \\ y_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

то, підставляючи ці розв'язки у відповідність (3.2.3), отримаємо  $n$  незалежних перших інтегралів системи (3.2.1):

$$\begin{aligned}
y_{11}(t)x_1 + y_{12}(t)x_2 + \dots + y_{1n}(t)x_n &= C_1, \\
y_{21}(t)x_1 + y_{22}(t)x_2 + \dots + y_{2n}(t)x_n &= C_2, \\
\dots \\
y_{n1}(t)x_1 + y_{n2}(t)x_2 + \dots + y_{nn}(t)x_n &= C_n,
\end{aligned}$$

тобто загальний інтеграл системи (3.2.1). Таким чином, задача інтегрування системи (3.2.1) рівнозначна задачі інтегрування спряженої до неї системи (3.2.2). Співвідношення (3.2.3) є окремим випадком більш загального

співвідношення. Нехай  $u_j(t)$  ( $j = \overline{1, n}$ ) – частинний розв’язок неоднорідної системи:

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)u_k + f_j(t), \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2.4)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n y_j(t)u_j(t) \right) &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{dy_j}{dt}u_j + y_j \frac{du_j}{dt} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \left( - \sum_{k=1}^n a_{kj}(t)y_k \right) u_j + y_j \left( \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)u_k \right) \right] + \sum_{j=1}^n y_j f_j(t) = \\ &= - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj}(t)y_k u_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}(t)y_j u_k + \sum_{j=1}^n y_j f_j(t) = \sum_{j=1}^n y_j f_j(t). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Звідси:

$$\sum_{j=1}^n y_j(t)u_j(t) = \int \left( \sum_{j=1}^n y_j(t)f_j(t) \right) dt. \quad (3.2.6)$$

З (3.2.6) при  $f_j(t) \equiv 0$  отримуємо співвідношення (3.2.3).

Зі співвідношення (3.2.3) випливає зв’язок між матрицантами систем (3.2.1) та (3.2.2). Якщо  $X(t)$  – матрицант системи (3.2.1), а  $Y(t)$  – матрицант системи (3.2.2), то

$$X^T(t)Y(t) = E. \quad (3.2.7)$$

Або відповідно:

$$X^T(t)Y(t) = E.$$

Тобто

$$X(t) = (Y^T(t))^{-1}, \quad Y(t) = (X^T(t))^{-1}$$

Система (3.2.1) називається самоспряженою, якщо вона збігається зі спряженою до неї системою (3.2.2). Коефіцієнти самоспряженої системи повинні задовольняти умові:

$$a_{kj}(t) = -a_{jk}(t) \quad (j, k = \overline{1, n}). \quad (3.2.8)$$

Отже, діагональні коефіцієнти самоспряженої системи рівні нулю. Зі співвідношення (3.2.3) випливає, що всякі два розв’язки  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$  і

$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$  самоспряженої системи підпорядковані умові:

$$x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + \dots + x_{1n}x_{2n} = \text{const.} \quad (3.2.9)$$

Зокрема, для будь-якого частинного розв'язку  $x_1, x_2, \dots, x_n$  самоспряженої системи маємо:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \text{const.} \quad (3.2.10)$$

Звідси випливає, що будь-який частинний розв'язок самоспряженої системи з неперервними коефіцієнтами обмежено по всьому проміжку  $(-\infty, +\infty)$ . Крім того, звідси випливає, що порядок самоспряженої системи завжди можна знизити на одиницю, оскільки вона має перший інтеграл (3.2.10). Для матрицанта  $X(t)$  самоспряженої системи маємо:  $X^T(t)X(t) = E$ , тобто

$$X^{-1}(t) = X^T(t).$$

*Приклад 1.* Розглянемо систему 2-х рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = p(t)x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)x_1. \quad (3.2.11)$$

Неважко бачити, що система (3.2.11) самоспряжена. Вона припускає перший інтеграл  $x_1^2 + x_2^2 = C_1$  і завжди інтегрується у квадратурах. Не складно знайти матрицант цієї системи:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) & \sin\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \\ -\sin\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) & \cos\left(\int_0^t p(\tau)d\tau\right) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо характеристичне рівняння для системи (3.2.1):

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) - \lambda & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) - \lambda & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.12)$$

І відповідне рівняння для спряженої системи (3.2.2):

$$\begin{vmatrix} -a_{11}(t) - \lambda & -a_{21}(t) & \dots & -a_{n1}(t) \\ -a_{12}(t) & -a_{22}(t) - \lambda & \dots & -a_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n}(t) & -a_{2n}(t) & \dots & -a_{nn}(t) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.13)$$

Неважко побачити, що рівняння (3.2.13) виходить із рівняння (3.2.12) заміною  $\lambda$  на  $-\lambda$ . Тому корені рівняння (3.2.13) відрізняються від коренів  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$  рівняння (3.2.12) тільки знаком.

Повернемося тепер до системи зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2.14)$$

Її спряжена:

$$\frac{dy_j}{dt} = - \sum_{k=1}^n a_{kj} y_k, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.2.15)$$

Нехай  $\lambda$  – власне значення матриці  $A = (a_{jk})$   $j, k = \overline{1, n}$  кратності  $p$ . Матрицею системи (3.2.15) буде  $-A^T$ . Число  $-\lambda$  буде її власним значенням тієї ж кратності  $p$ . Знайдемо число жорданових клітин порядку  $m$ , що відповідають числу  $-\lambda$  у ЖНФ матриці  $-A^T$ . Воно визначається за формулою (2.2.2):

$$\begin{aligned} & \text{rang}(-A^T + \lambda E)^{m-1} + 2\text{rang}(-A^T + \lambda E)^m + \text{rang}(-A^T + \lambda E)^{m+1} = \\ & = \text{rang}(A^T - \lambda E)^{m-1} + 2\text{rang}(A^T - \lambda E)^m + \text{rang}(A^T - \lambda E)^{m+1} = \\ & = \text{rang}(A - \lambda E)^{m-1} + 2\text{rang}(A - \lambda E)^m + \text{rang}(A - \lambda E)^{m+1}, \end{aligned}$$

тобто шукане число клітин збігається з числом жорданових клітин порядку  $m$ , відповідних числу  $\lambda$  в ЖНФ матриці  $A$ . А звідси випливає, що корені  $\lambda$  та  $-\lambda$  характеристичних рівнянь для систем (3.2.14), (3.2.15) мають не тільки однакову кратність  $p$ , але цим коренням в обох системах відповідає однакова кількість груп розв'язків (клітин Жордана, елементарних дільників) з однаковим числом розв'язків у відповідних групах (однакові розмірності жорданових клітин, кратності елементарних дільників). Зокрема, самоспряжена система поряд з кожним власним значенням  $\lambda$  своєї матриці матиме і

власне значення  $-\lambda$  тієї ж кратності і з тим самим числом клітин Жордана з тими самими їх розмірностями.

Оскільки матрицантом системи (3.2.14) є матриця  $e^{At}$ , а матрицантом спряженої їй системи (3.2.15) – матриця  $e^{-A^T t}$ , то з (3.2.7) отримуємо наступні корисні співвідношення для матричної експоненти:

$$\begin{aligned}(e^{At})^T &= (e^{-A^T t})^{-1} = e^{A^T t}, & (e^A)^T &= e^{A^T}, \\ (e^{-A^T t})^T &= (e^{At})^{-1} = e^{-At}.\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

*Приклад 2.* Розглянемо знову систему (2.3.7). Їй спряженою буде система

$$\frac{dy_1}{dt} = 4y_2 + 2y_3, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - 4y_2 - y_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = -2y_3.\tag{3.2.17}$$

з матрицею

$$B = -A^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вона має 3-кратне власне значення  $\lambda = -2$ , і ЖНФ матриці  $B$  за своєю структурою збігається із ЖНФ матриці  $A$ :

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Звідси нескладно отримати матрицант системи (3.2.16):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} (2t+1)e^{-2t} & 4te^{-2t} & 2te^{-2t} \\ -te^{-2t} & (-2t+1)e^{-2t} & -te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Неважко переконатися у виконанні співвідношення (3.2.7). Можна виділити групи розв'язків:

$$\begin{pmatrix} 2t+1 & 4t \\ -t & -2t+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

(друга група виходить як різниця першого і третього стовпців матрицанта).

## Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad (3.3.1)$$

де  $A = (a_{jk})$ ,  $j, k = \overline{1, n}$  – матриця зі сталими коефіцієнтами,  $f(t) = \text{colon}(f_1(t), \dots, f_n(t))$  вектор з неперервними  $2\pi$ -періодичними компонентами.

Розглянемо також однорідну систему, що відповідає системі (3.3.1):

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (3.3.2)$$

Оскільки матрицант системи (3.3.2) є матриця  $e^{At}$ , то відповідно до формули (1.3.3) вектор-функція

$$x(t) = e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (3.3.3)$$

( $c$  – сталий вектор) є загальним розв’язком системи (3.3.1). Виберемо вектор  $c$  так, щоб вектор-функція  $x(t)$  була  $2\pi$ -періодичною, тобто, щоб  $\forall t$  виконувалось  $x(t + 2\pi) = x(t)$ . Зокрема, має виконуватись рівність  $x(2\pi) - x(0) = 0$ . Звідси маємо:

$$\begin{aligned} x(2\pi) - x(0) &= e^{2\pi A}c - c + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau) d\tau = \\ &= (e^{2\pi A} - E)c + \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Якщо, зокрема,  $f(t \equiv 0)$ , то

$$(e^{2\pi A} - E)c = 0. \quad (3.3.5)$$

Система (3.3.5) визначає сталий вектор  $c = c^*$ , при якому вектор-функція  $e^{At} \cdot c^*$  є  $2\pi$ -періодичним розв’язком однорідної системи (3.3.2). Система (3.3.5) має ненульовий розв’язок тоді і лише тоді, коли  $\det(e^{2\pi A} - E) = 0$ , тобто коли серед власних значень матриці  $e^{2\pi A}$  є рівні 1. Нехай  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

– повна система власних значень матриці  $A$ . Тоді, як доводиться в теорії матриць,  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  – повна система власних значень матриці  $e^{2\pi A}$ . Оскільки  $1 = e^{2\pi ip}$ , де  $p$  – ціле число, то звідси випливає, що для того, щоб матриця  $e^{2\pi A}$  мала власні значення, рівні 1, необхідно і достатньо, щоб матриця  $A$  мала власні значення виду  $ip$ . Отже, однорідна система (3.3.2) матиме  $2\pi$ -періодичні розв’язки тоді і лише тоді, коли матриця  $A$  має власні значення виду  $ip$  де  $p$  – ціле число (зокрема, нульові власні значення). Тобто ми іншим способом отримали результат, раніше отриманий в п. 6 на основі аналізу ЖНФ матриці  $A$ .

Досліджуємо тепер неоднорідну систему (3.3.1) та зв’язану з нею систему лінійних рівнянь алгебри (3.3.4). Розглянемо окремо два випадки.

1-й випадок. Матриця  $A$  немає власних значень виду  $ip$ , де  $p$  – ціле число. Такий випадок називатимемо нерезонансним. Тоді  $\det(e^{2\pi A} - E) \neq 0$ , і система (3.3.4) має єдиний розв’язок

$$c^* = -(e^{2\pi A} - E)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Отже, система (3.3.1) має єдиний  $2\pi$ -періодичний розв’язок, вираз для якого виходить підстановкою  $c^*$  в (3.3.3). Але можна отримати більш компактну формулу для цього  $2\pi$ -періодичного розв’язку. Виходитимемо з рівності  $x(t + 2\pi) = x(t)$ . Тоді з (3.3.3) маємо:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} \left( c + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right), \\ x(t + 2\pi) &= e^{A(t+2\pi)} \left( c + \int_0^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right) = \\ &= e^{A(t+2\pi)} \left( c + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau + \int_t^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right) = \\ &= e^{A(t+2\pi)} \left( e^{-At} x(t) + \int_t^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right) = x(t). \end{aligned}$$

Або, тому що  $e^{A(t+2\pi)} = e^{2\pi A} \cdot e^{At}$ :

$$e^{2\pi A} \left( x(t) + e^{At} \int_t^{t+2\pi} e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \right) = x(t).$$

В останньому інтегралі зробимо підстановку  $\tau = t + 2\pi - s$ . Тоді

$$e^{2\pi A} \left( x(t) + e^{At} \int_t^{2\pi} e^{-A(t+2\pi-s)} f(t+2\pi-s) ds \right) = x(t).$$

Або з урахуванням  $2\pi$ -періодичності вектор-функції  $f(t)$ :

$$e^{2\pi A} \left( x(t) + e^{At} \int_0^{2\pi} e^{-A(t+2\pi-s)} f(t-s) ds \right) = e^{2\pi A} x(t) + \int_0^{2\pi} e^{As} f(t-s) ds = x(t).$$

Дозволяючи це рівняння відносно  $x(t)$ , отримуємо:

$$x(t) = (E - e^{2\pi A})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{At} f(t-\tau) d\tau. \quad (3.3.6)$$

Таким чином, справедлива теорема:

**Теорема.** У нерезонансному випадку система (3.3.1) має єдиний  $2\pi$ -періодичний розв'язок при будь-якій  $2\pi$ -періодичній вектор-функції  $f(t)$ , і цей розв'язок виражається формулою (3.3.6).

2-й випадок. Матриця  $A$  має власні значення виду  $pi$ , де  $p$  – ціле число. Такий випадок називається резонансним. Тоді виконано рівність  $\det(e^{2\pi A} - E) = 0$ , і система (3.3.4) матиме розв'язок лише в тому випадку, коли вектор-функція  $f(t)$  задовольняє деяким додатковим умовам, до висновку яких ми зараз переходимо.

Припустимо для певності, що матриця  $A$  має нульове власне значення, якому ЖНФ матриці  $A$  відповідає  $k$  клітин, і  $r$  пар чисто уявних власних значень виду  $\pm ip_j$  ( $j = \overline{1, r}$ ), де  $p_1, \dots, p_r$  – натуральні числа, причому кожному власному значенню такої пари відповідає  $k_j$  жорданових клітин. Тоді система (3.3.2) має  $m$ -параметричне ( $m = k + 2k_1 + \dots + 2k_r$ ) сімейство  $2\pi$ -періодичних розв'язків  $\varphi(t) = c_1 \varphi^{(1)}(t) + \dots + c_m \varphi^{(m)}(t)$ , де  $\varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(m)}(t)$  – лінійно незалежні  $2\pi$ -періодичні розв'язки системи (3.3.2),  $c_1, \dots, c_m$  – довільні сталі. Звідси випливає, що система

$$\frac{dy}{dt} = -A^T y, \quad (3.3.7)$$

спряжена системі (3.3.2), також має  $m$ -параметричне сімейство  $2\pi$ -періодичних розв'язків  $\psi(t) = c_1^* \psi^{(1)}(t) + \dots + c_m^* \psi^{(m)}(t)$ , де  $\psi^{(j)}(t) =$

$=\text{colon}(\psi_{j1}(t), \dots, \psi_{jn}(t))$  ( $j = \overline{1, m}$ ) – лінійно незалежні  $2\pi$  - періодичні розв'язки системи (3.3.7). Позначимо:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{21}(t) & \dots & \psi_{m1}(t) \\ \psi_{12}(t) & \psi_{22}(t) & \dots & \psi_{m2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1n}(t) & \psi_{2n}(t) & \dots & \psi_{mn}(t) \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $e^{At}$  – матрицант системи (3.3.2), то  $\forall h = \text{const}$  матриця  $e^{A(t-h)}$  буде матрицею ФСР системи (3.3.2). Тоді із співвідношень (3.2.3) між розв'язками спряжених систем отримаємо:

$$\Psi^T(t)e^{A(t-h)} = B, \quad (3.3.8)$$

де  $B$  - стала  $m \times n$ -матриця. Вважаючи (3.3.8)  $t = h$ , отримаємо, що  $B = \Psi^T(h)$  і т.ч.

$$\Psi^T(t)e^{A(t-h)} = \Psi^T(h). \quad (3.3.9)$$

Вважаючи в (3.3.9)  $h = 0$ , отримаємо:

$$\Psi^T(t)e^{At} = \Psi^T(0). \quad (3.3.10)$$

Вважаючи в (3.3.9)  $t = 2\pi$ ,  $h = \tau$ , отримаємо:

$$\Psi^T(2\pi)e^{A(2\pi-\tau)} = \Psi^T(\tau). \quad (3.3.11)$$

Помножимо тепер обидві частини векторного рівняння (3.3.4) зліва на матрицю  $\Psi^T(2\pi)$ . Отримаємо:

$$\Psi^T(2\pi)(e^{2\pi A} - E)c + \int_0^{2\pi} \Psi^T(2\pi)e^{A(2\pi-\tau)} f(\tau) d\tau = 0.$$

Враховуючи (3.3.10), (3.3.11):

$$(\Psi^T(0) - \Psi^T(2\pi))c + \int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau) f(\tau) d\tau = 0.$$

Але оскільки матриця  $\Psi^T(t)$  є  $2\pi$ -періодичною, то  $\Psi^T(0) - \Psi^T(2\pi) = 0$ . Отже, векторне рівняння (3.3.4) буде розв'язане тоді і тільки тоді, коли вектор-функція  $f(t)$  задовольняє співвідношенню:

$$\int_0^{2\pi} \Psi^T(\tau) f(\tau) d\tau = 0. \quad (3.3.12)$$

Це співвідношення є необхідною та достатньою умовою існування  $2\pi$ -періодичних розв'язків системи (3.3.1). Таким чином, справедлива така теорема:

**Теорема.** Для того, щоб у резонансному випадку система (3.3.1) допускала  $2\pi$ -періодичні розв'язки, необхідно і достатньо, щоб вектор функція  $f(t)$  задовольняла співвідношенню (3.3.12).

Якщо співвідношення (3.3.12) виконано, то система (3.3.1) буде допускати не один  $2\pi$ -періодичний розв'язок, як було в нерезонансному випадку, а  $m$  - параметричне сімейство таких розв'язків:

$$x(t) = M_1 \varphi^{(1)}(t) + \dots + M_m \varphi^{(m)}(t) + x^*(t),$$

де  $x^*(t)$  – якийсь частинний  $2\pi$ -періодичний розв'язок.

У покомпонентній формі співвідношення (9.12) має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \psi_{jk}(t) f_k(t) dt = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (3.3.13)$$

*Приклад 1.* Знайдемо умови існування  $2\pi$ -періодичних розв'язків рівняння

$$\frac{d^4 \xi}{dt^4} + k^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = q(t), \quad (3.3.14)$$

де  $q(t)$  –  $2\pi$ -періодична функція,  $k \in \mathbb{N}$ .

Вводячи  $x_1 = \xi$ ,  $x_2 = \dot{\xi}$ ,  $x_3 = \ddot{\xi}$ ,  $x_4 = \dddot{\xi}$ , запишемо рівняння (3.3.14) у вигляді еквівалентної системи:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = -k^2 x_3 + q(t).$$

Або в матричній формі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q(t) \end{pmatrix}.$$

Відповідну однорідну систему було нами розглянуто у п. 3.1. Там ми з'ясували, що вона має 3-параметричну родину  $2\pi$ -періодичних розв'язків. Аналогічне сімейство тоді повинна мати і їй спряжена система, що має вигляд:

$$\frac{dy}{dt} = -A^T y. \quad (3.3.15)$$

Або в покомпонентній формі:

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = -y_2 + k^2 y_4, \quad \frac{dy_4}{dt} = -y_3.$$

Використовуючи викладені вище методи, нескладно отримати матрицант системи (3.3.15):

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} \cos kt & -\frac{1}{k} \sin kt & \cos kt & k \sin kt \\ -\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \sin kt & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} \cos kt & -\frac{1}{k} \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

Виділяючи лінійно незалежні  $2\pi$ -періодичні розв'язки, запишемо матрицю:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k^2 & 0 & 0 \\ -k \sin kt & k \cos kt & k \sin kt \\ 1 - \cos kt & -\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

Таким чином, умови (3.3.12) набувають вигляду:

$$\int_0^{2\pi} q(t) dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} q(t) \cos kt dt = 0, \quad \int_0^{2\pi} q(t) \sin kt dt = 0.$$

## ВИСНОВОК

У роботі досліджено періодичні розв'язки лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, що є важливим аспектом для моделювання динамічних процесів у природничих і технічних науках. Були розібрані методи побудови фундаментальних систем розв'язків для таких систем, що дозволяє знаходити загальні розв'язки як для однорідних, так і для неоднорідних систем. Особливу увагу приділено випадкам простих і кратних коренів характеристичного рівняння, а також застосуванню Жорданової нормальної форми, що значно спрощує розв'язання систем із кратними коренями.

Досліджено умови існування періодичних розв'язків та методи їх знаходження для різних типів лінійних систем. Це дослідження є важливим для моделювання циклічних процесів у таких галузях, як електротехніка, механіка, біологія та економіка. Результати роботи сприяють глибшому розумінню поведінки лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і мають важливе значення для подальшого розвитку як теоретичних, так і прикладних досліджень.

Проведене дослідження підкреслює важливість теоретичного аналізу лінійних диференціальних систем та демонструє практичну значущість періодичних розв'язків для моделювання і керування реальними процесами. Отримані методи та результати можуть бути використані для аналізу і прогнозування динамічних систем, що мають періодичну поведінку.

## БІБЛІОГРАФІЯ

- [1] Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. New York: Chelsea Publishing Company, 1984. 626 p.
- [2] Malkin I. G. Some problems in the theory of nonlinear oscillations - State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1956. 479 c.
- [3] Roseau M. Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, 1966. 252 p.
- [4] Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Петюренко А. І. Періодичні розв'язки систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і періодичними вільними членами // Наукові записки КДПУ. Серія: Математичні науки / ред. В. О. Андрієнко та ін. - Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. - Вип. 57. 60-70 с.
- [5] Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. - Диференціальні рівняння: Підручник - 2-ге видання, перероблене і доповнене - Київ: Либідь, 2003. 600 с.
- [6] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
- [7] Самойленко А.М., Шкіль М.І, Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. Київ: Вища школа, 2000. 294 с.
- [8] Щоголев С.А., Дрік Н.Г., Кореновський Арк.О. Диференціальні та інтегральні рівняння: навч. посібник; М-во освіти і науки України, Одеський нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, Ін-т математики, економіки та механіки. – Одеса : ОНУ, 2017. 394 с.