Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
(повне найменування вищого навчального закладу)

Інститут математики, економіки і механіки
(повне найменування інституту/факультету)

Кафедра методів математичної фізики
(повна назва кафедри)

Дипломна робота

бакалавра
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: «Змішана задача термопружності для напівнескінченої смуги»
«The mixed thermoelasticity problem for a semi-infinite strip»

Виконала: студентка денної форми навчання
напряму підготовки 6.040301 Прикладна математика

Амамджян Стефанія Жоржівна
(прізвище, ім'я, по-батькові)

Керівник ст. викладач, канд. фіз.-мат. наук Фесенко Г.О.__
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали, підпис)

Рецензент доцент, канд. фіз.-мат. наук Шумихин С.А.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

Рекомендовано до захисту:
Протокол засідання кафедри
№ 9 від 7.06.2017 р.

Захищено на засіданні ЕК № 6
протокол № 3 від 25.06.2017 р.
Оцінка відм. / A / 90
(за національною шкалою, шкалою ECTS, бали)

Завідувач кафедри
________ Вайсфельд Н.Д.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Голова ЕК
________ Плотнікоб А.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Одеса – 2017

Зміст

Вступ

Приведення рівнянь теорії пружності до системи трьох рівнянь Ламе.

Систему рівнянь теорії пружності можна звести до трьох рівнянь щодо переміщень. Для цього знайдемо в рівняннях рівноваги навантаження через деформації, використовуючи закон Гука, а самі деформації знайдемо через переміщення за допомогою співвідношень Коші. В результаті приходимо до системи трьох рівнянь Ламе, що містять тільки переміщення тіла:

$$G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial X} + X = 0$$

$$G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + Y = 0$$

$$G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial z} + Z = 0$$

де

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Розглянуті досі рівняння теорії пружності ставилися до випадку, коли тіло знаходиться в рівновазі і відсутній рух, тобто коли всі величини не залежать від часу. Для розрахунку в залежності від часу слід скористатися принципом Даламбера, згідно з яким щоб перейти від рівнянь рівноваги до рівнянь руху необхідно додати сили інерції. Сила інерції є об'ємним навантаженням і тому її величина може бути обчислена як добуток інтенсивності цього навантаження на об'єм її розподілу.Таким чином інтенсивності сил інерції уздовж осей Ox, Oy і Oz дорівнюватимуть відповідно $-\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, -\rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, -\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Рівняння прийматимуть такий вигляд:

$$G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial X} + X - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$$G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial \theta}{\partial y} + Y - \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

$$G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + Z - \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

Врахуємо тепер ефекти викликані зміною температури тіла. Спочатку стрижень довжини l. При зміні його температури на величину T його довжина зміниться на Δl. Відносне подовження стрижня пропорційно зміні його температури: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha T$

Де α –коефіцієнт лінійного розширення. Якщо тепер ми розглянемо деформації елементарного паралелепіпеда, то його ребра отримають додаткові лінійні деформації, рівні αT, то це відіб'ється на формулюванні закону Гука, який матиме вигляд:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha T$$

Запишемо отримані формули відносно напружень, отримаємо:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x - (3\lambda + 2G)\alpha T$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y - (3\lambda + 2G)\alpha T$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z - (3\lambda + 2G)\alpha T$$

Використовуючи ці співвідношення при виведенні рівнянь Ламе, отримаємо їх з урахуванням сил інерції і температури:

$$G\Delta U + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial X} + X - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = (3\lambda + 2G)\alpha T'$$

$$G\Delta V + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + Y - \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = (3\lambda + 2G)\alpha T^{\cdot}$$

$$G\Delta W + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial z} + Z - \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = (3\lambda + 2G)\alpha T'$$

Фундаментальна матриця. Фундаментальний розв'язок. Неособливі граничні умови і базисна матриця.

Роль функції Гріна в разі систем диференційних рівнянь виконують матриці Гріна. Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яку можна записати у вигляді:

$$P_0(x)z'(x) + P_1(x)z(x) = f(x),\ a < x < b \tag{1.1}$$

$$z(x) = \left\|z_j(x)\right\|_0^{n-1}, f(x) = \|f(x)\|_0^{n-1}$$

$$P_m(x) = \left\|P_{j,k}^m\right\|_0^{n-1}, (m = 0,1;\ P_{j,k}^0 = 0, j \neq k)$$

Матрицю

$$\Phi(x,\xi) = \left\|\varphi_{i,k}(x,\xi)\right\|_0^{n-1} \tag{1.2}$$

назвемо фундаментальною, якщо матриця-стовпець

$$z(x) = \int_a^b \Phi(x,\xi) f(\xi)\, d\xi \tag{1.3}$$

називається розв'язком рівняння (1.1) для матриці-стовпця $f(x)$.

Фундаментальним розв'язком матричного диференціального рівняння (1.1) будемо називати матрицю

$$Z(x) = \left\|z_{i,k}(x)\right\|_0^{n-1} \tag{1.4}$$

з відмінним від нуля визначником

$$det\ Z(x) = \det\left\|z_{i,k}(x)\right\|_0^{n-1} \neq 0 \tag{1.5}$$

і задовольняє матричному рівнянню

$$P_0(x)Z' + P_1(x)Z = 0,\ a < x < b \tag{1.6}$$

Введемо числові матриці

$$\gamma = \left\|\gamma_j\right\|_0^{n-1},\ A = \left\|\alpha_{j,k}\right\|_0^{n-1},\ B = \left\|\beta_{j,k}\right\|_0^{n-1} \tag{1.7}$$

і визначимо граничний функціонал

$$U = Az(\alpha) + Bz(b)$$

причому дія його на матриці від двох змінних типу (1.2) задамо формулами

$$U(\Phi) = A\Phi(\alpha,\xi) + B\Phi(b,\xi)$$

$$\widetilde{U}(\Phi) = \Phi(x,a)A + \Phi(x,b)B \tag{1.8}$$

Поставимо як і в скалярному випадку (1.8) неоднорідну, піводнорідну і однорідну крайову задачу для рівняння (1.1):

$$P_0 z' + P_1 z = f, a < x < b, U[z] = \gamma \quad (1.9)$$

$$P_0 z' + P_1 z = f, a < x < b, U[z] = 0 \quad (1.10)$$

$$P_0 z' + P_1 z = 0, a < x < b, U[z] = 0 \quad (1.11)$$

І введемо поняття неособливих крайових умов. Останні називаються неособливими, якщо

$$det\, U[z] \neq 0, U[z] = Az(a) + Bz(b) \quad (1.12)$$

При неособливих крайових умовах однорідна крайова задача (1.11) має тільки тривіальний розв'язок і навпаки. Якщо однорідна крайова задача (1.11) має тільки тривіальний розв'язок, то має місце (1.12).

Розв'язок $\psi(x) = \left\|\psi_{j,k}\right\|_0^{n-1}$ крайової задачі

$$P_0 \psi' + P_1 \psi = 0,\ a < x < b, U[\psi] = I,\ I = \left\|\delta_{jk}\right\|_0^{n-1} \quad (1.13)$$

будемо називати базисною матрицею крайових задач (1.9-1.11). Така матриця при неособливих крайових умовах існує і як легко переконатися визначається формулами

$$\psi(x) = ZC,\ C = (U[z])^{-1} \quad (1.14)$$

Матриця Гріна

Матрицею Гріна крайової задачі (1.10) будемо називати матрицю $G(x,\xi) = \left\|g_{i,k}(x,\xi)\right\|_0^{n-1}$, через яку її розв'язок при довільній $f(x)$ виражається формулою

$$z(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

Якщо відомі базисна і фундаментальні матриці, то матриця Гріна записується

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - \psi(x) U[\Phi]$$

Якщо є дві граничних умови, то матриця Гріна приймає такий вигляд:

$$G(z,\xi) = \Phi(z,\xi) - \sum_{j=0}^{1} \psi_j(z)(U_j[\Phi(z,\xi)])$$

Побудова фундаментального розв'язку для системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Якщо матриці P_m постійні, то не обмежуючи загальності розв'язку можна записати у вигляді

$$z'(x) - \lambda P z(x) = f(x),\ a < x < b \tag{1.15}$$

де λ –комплексний параметр, $P = \left\|p_{i,k}(x,\xi)\right\|_0^{n-1}$ постійна матриця.

Зазначимо спосіб побудови фундаментального розв'язку рівняння (1.15), тобто розв'язок матричного рівняння

$$Z'(x) - \lambda P Z(x) = 0 \tag{1.16}$$

Введемо матрицю,

$$M(\xi) = I\xi - \lambda P \tag{1.17}$$

визначник якої

$$det\, M = det\left\|\delta_{i,k}\xi - \lambda P_{j,k}\right\|_0^{n-1} = Q_n(\xi)$$

$$Q_n(\xi) = \prod_{j=0}^{n-1}(\xi - \xi_j) = \sum_{j=0}^{n} \xi^j \lambda^{n-j} q_{n-j},\ (q_0 = 1) \tag{1.18}$$

Позначимо через $\Delta^*(\xi)$ приєднану матрицю до матриці (1.17), вона представляє собою нормовану матрицю до матриці алгебраїчних доповнень визначника з (1.18).

Мають місце співвідношення, які легко перевіряються

$$(I\xi - \lambda P)\Delta^* = Q_n I, \Delta^*(I\xi - \lambda P) = Q_n I \tag{1.19}$$

Тепер покажемо, що матриця

$$Z(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\Delta^*(\xi)}{Q_n(\xi)} e^{x\xi} d\xi \tag{1.20}$$

де C –будь-який замкнутий контур в площині комплексної змінної, яка не містить нулів багаточлена (1.19), задовольняє матричному диференціальному рівняння (1.16). Дійсно, підставивши (1.20) в (1.16), отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(I\xi - \lambda P)\Delta^*(\xi)}{Q_n(\xi)} e^{x\xi} d\xi \equiv 0 \tag{1.21}$$

Тотожність дотримується на підставі (1.19) і теореми Коші.

Таким чином, матрицю (1.20) можна брати в якості фундаментального розв'язка диференціального рівняння (1.15).

Фундаментальну матрицю для рівняння (1.15) найпростіше будувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. При цьому відповідне цьому перетворенню рівняння в просторі трансформант матиме вигляд:

$$I(-i\alpha)Z_\alpha - \lambda P Z_\alpha = f_\alpha,\ f_\alpha = \int_\alpha^b \frac{f(x)dx}{exp(-i\alpha x)} \tag{1.22}$$

$$M_\alpha = -i\alpha I - \lambda P = M(-i\alpha)$$

$$M_\alpha^{-1} = M^{-1}(-i\alpha) = \Delta^*(-i\alpha)Q_n^{-1}(-i\alpha)$$

Таким чином

$$\Phi(x,\xi) = E(x-\xi),\ E(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^*(-i\alpha)e^{-i\alpha y}}{Q_n(-i\alpha)} d\alpha \tag{1.23}$$

Як бачимо побудована фундаментальна матриця має ту ж структуру, що і фундаментальнийрозв'язок (1.20). Крім того, вона являє собою окремий випадок фундаментальних матриць, що визначаються формулою

$$E(y) = \mp\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\mp} \frac{\Delta^*(\xi)e^{\xi y}d\xi}{Q_n(\xi)}$$

4. Висновки

Отримано точний розв'язок задачі термопружності для півнескінченної смуги. Розв'язано задачу теплопровідності, розв'язок якої враховано у правій частині рівнянь Ламе. Розв'язано задачу пружності з використанням методу інтегральних перетворень і апарату матричного диференційного числення. Досліджені нормальні напруження на бічній грані півнескінченної смуги під дією на неї зовнішнього розподіленого навантаження.

Встановлено, що на бічній грані смуги виникає стискаюче напруження.

Запропонований підхід можна застосувати до розв'язання аналогічних задач динамічної теорії пружності.

5. Список літератури

1. Попов Г.Я. Точныерешениянекоторыхкраевых задач механики деформируемого твердого тела // сост. Вайсфельд Н.Д. ; МОН Украины; Одес. нац. ун-т им. И.И. Мечникова.-Одесса: Астропринт, 2013. - 424 с.

2. Процеров Ю.С., Мойсеенок О.П. Математичне моделювання деяких задач механіки і техніки Одесса. 2015.

3. Попов Г.Я., Абдымнапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы.: Изд-воРауан, 1999. 113 с.