Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012 . – Т. 17, вип. 3 (15). – С. 90–98

М Е Х А Н І К А

УДК 531.3:521.1

С. К. Асланов, А. П. Царенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

К ОСНОВАМ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Асланов С. К., Царенко О. П. До основ небесної механіки. Строго математично, без застосування інтегрування диференціальних рівнянь динаміки, побудовано розв'язок зворотної задачі Ньютона — про рух вільної матеріальної частинки, що знаходиться під дією сил центрального тяжіння.
Ключові слова: супутник, орбіта, закони І. Кеплера, сила всесвітнього тяжіння, задача Ньютона.

Асланов С. К., Царенко А. П. К основам небесной механики. Строго математически, не прибегая к непосредственному интегрированию дифференциального уравнения динамики, построено решение обратной задачи Ньютона — о движении свободной материальной точки под действием силы центрального притяжения.
Ключевые слова: спутник, орбита, законы И. Кеплера, сила всемирного тяготения, задача Ньютона.

Aslanov S. K., Tsarenko A. P. To the bases of mechanics of planetary motion. Strictly mathematically, without the use of direct integration of differential equalization of dynamics, the solution of reverse task of Newton is obtained — about motion of free material point under the action of force of world gravitation.
Key words: satellite, Kepler's laws of planetary motion, Newton's law of universal gravitation, Newton's task of orbit.

Введение. Физико-математическая модель движения материальных тел (планет) в сфере притяжения центрального тела при отсутствии сил сопротивления окружающей среды была построена еще И. Ньютоном.

Вполне понятно, что эта теория применима как к естественным, так и искусственным спутникам тела тяготения (в частности, Земли), которые движутся на высотах, позволяющих пренебрегать взаимодействием с атмосферой этого центрального тела.

Для такого движения известны [1] три закона Иоганна Кеплера, сформулированные им в еще XVI веке на основе колоссального числа астрономических измерений, выполненных чешским (королевским) астрономом Тихо Браге.

Базируясь на этих законах и основной аксиоме динамики (уравнение движения свободной материальной точки), И. Ньютон сумел вывести закон всемирного тяготения [1].

Прикладной интерес к небесной механике возник много позже в связи с разработками, имеющими отношение к проблеме запуска на орбиту искусственного спутника Земли.

Французский инженер де Раук [2, 3] обнаружил простое и при этом уникальное свойство динамики небесных тел, движущихся под действием центрального притяжения.

© Асланов С. К., Царенко А. П., 2012

Использование этого свойства позволило С. К. Асланову [4] серьезно упростить математическую процедуру получения решения задачи о центральном движении материальной точки в Ньютоновом поле тяготения.

Основные результаты.

1. Пусть заданный материальный объект, обладающий массой M, образует свое силовое поле тяготения, характеризующееся значением μ для постоянной Гаусса.

Рассмотрим материальную точку A массы m (небесное тело, спутник и т. п.), движущуюся в этом поле тяготения в соответствии с законами И. Кеплера. Совместим с телом притяжения начало полярной системы координат $0r\varphi$. Выполним для произвольного момента времени t разложение вектора скорости небесного тела по двум определенным направлениям, т. е. $\vec{V} = \vec{v}_p + \vec{v}_q$, см. Рисунок 1.

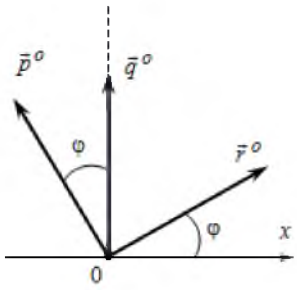

Рисунок 1

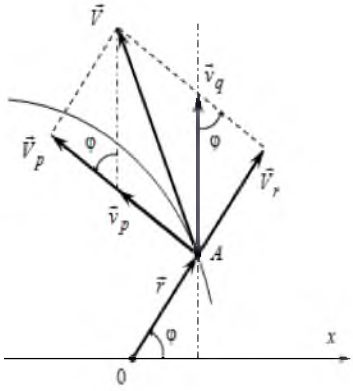

Рисунок 2

Пусть первое направление, задаваемое единичным вектором $\vec{p}^o$, всегда ортогонально радиус-вектору $\vec{r}$ движущейся точки (трансверсальное направление). Второе направление зададим единичным вектором $\vec{q}^o$, перпендикулярно большой оси симметрии орбиты (ось $0x$).

Напомним, что разложение вектора скорости $\vec{V}$ традиционно [1] производится в полярной системе координат на взаимно ортогональные радиальную $\vec{V}_r$ и трансверсальную $\vec{V}_p$ составляющие, т. е. $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_p$.

Из анализа рисунка 2 непосредственно вытекает, что в каждый момент времени угол между составляющими $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$ вектора скорости $\vec{V}$ будет равен полярному углу φ.

Следуя второму закону Кеплера, уравнение траектории $r = r(\varphi)$ для движущейся точки A можно записать в виде:

$$r(\varphi) = \frac{\mathrm{P}}{1 + e \cdot \cos\varphi}, \quad \mathrm{P} = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1 - (b/a)^2}, \tag{1}$$

где P – параметр орбиты, e – ее эксцентриситет, a и b – соответственно ее большая и малая полуоси (нас интересуют орбиты точки A в форме эллипса).

Дифференцирование по времени t зависимости $r(\varphi(t))$ дает нам выражение для радиальной составляющей V_r вектора скорости $\vec{V}$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-\mathrm{P}}{(1+e\cos\varphi)^2} \cdot (-e\sin\varphi) \cdot \dot{\varphi} = \frac{e\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} \cdot r\dot{\varphi} = \frac{e\sin\varphi}{\mathrm{P}} \cdot r^2\dot{\varphi},$$

откуда окончательно

$$V_r = \frac{e\sin\varphi}{\mathrm{P}} \cdot rV_p, \tag{2}$$

где $V_p = r\dot{\varphi}$ (из кинематики [1]).

Первый закон Кеплера (закон площадей) постулирует постоянство секторной скорости $\dot{\sigma}$ для движущейся точки A:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}rV_p = const$$

или

$$C = 2\dot{\sigma} = r^2\dot{\varphi} = rV_p, \tag{3}$$

где C — постоянная площадей.

Из Рисунка 2 непосредственно следует, что

$$v_q = \frac{V_r}{\sin\varphi} = \frac{e}{\mathrm{P}}rV_p = e\frac{2\dot{\sigma}}{\mathrm{P}} = e\frac{C}{\mathrm{P}} \tag{4}$$

и

$$v_p = V_p - v_q\cos\varphi. \tag{5}$$

Подстановка в (5) выражений из (3) и (4) дает

$$v_p = \frac{C}{r} - \frac{e}{\mathrm{P}}C\cos\varphi = C\left(\frac{1+e\cos\varphi}{\mathrm{P}} - \frac{e}{\mathrm{P}}\cos\varphi\right) = \frac{C}{\mathrm{P}}. \tag{6}$$

Таким образом, обе составляющие v_p и v_q вектора $\vec{V}$ выражаются через постоянные величины e, P и C, и, следовательно, являются величинами, не зависящими от времени. Кроме того, для произвольного положения точки A на ее траектории эти составляющие образуют между собой полярный угол φ, отсчитываемый от перицентра орбиты.

Из (4) и (6) вытекает, что отношение рассматриваемых составляющих дает значение эксцентриситета данной орбиты, т. е. $e = v_q/v_p$ (степень ее отклонения от окружности).

Выполненные выше математические преобразования доказывают теорему де Раука [3]: «***Если для движения точки имеют место два первых закона Кеплера, то составляющие*** v_p ***и*** v_q ***вектора ее скорости*** $\vec{V}$ ***постоянны***».

Результат де Раука, естественно, применим и к искусственным спутникам Земли, запущенным на высоты, где можно пренебречь влиянием земной атмосферы.

2. Выведем теперь закон всемирного тяготения как решение первой задачи динамики точки. Воспользовавшись теоремой де Раука, доказанной выше, мы имеем право представить вектор скорости $\vec{V}$ следующим образом:

$$\vec{V} = \vec{v}_p + \vec{v}_q = v_p \cdot \vec{p}^o + v_q \cdot \vec{q}^o, \quad \vec{q}^o = \overrightarrow{const}, \tag{7}$$

где v_p и v_q постоянные величины, а $\vec{p}^o$ и $\vec{q}^o$ – единичные векторы (базисные направления), перпендикулярные соответственно $\vec{r}$ и оси $0x$, см. Рисунок 1.

Тогда второй закон Ньютона для силы, действующей на движущуюся точку, дает

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(v_p \cdot \vec{p}^o + v_q \cdot \vec{q}^o\right) = mv_p\frac{d\vec{p}^o}{dt} = -mv_p\dot{\varphi} \cdot \vec{r}^o, \tag{8}$$

где $\vec{r}^o$ — единичный вектор радиального направления, т. е. $\vec{r} = r \cdot \vec{r}^o$.

При выводе формулы (8) мы воспользовались тем, что $\dot{\vec{p}}^o = -\dot{\varphi} \cdot \vec{r}^o$ [1].

Подставляя выражение $\dot{\varphi} = C/r^2$ из (3) и выражение $v_p = C/\mathrm{P}$ из (6) в формулу (8), получаем

$$\vec{F} = -\frac{\mu m}{r^2} \cdot \vec{r}^o, \tag{9}$$

где $\mu = C^2/P$.

Для эллиптической орбиты с периодом обращения T имеем площадь $\sigma = \pi ab = \dot{\sigma}T$, где $\dot{\sigma} = const$ в соответствии с первым законом Кеплера.

Тогда, с учетом (1), выражение для константы Гаусса μ принимает вид

$$\mu = \frac{4\dot{\sigma}^2}{\mathrm{P}} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2\mathrm{P}} = \frac{4\pi^2 a^3 (b^2/a)}{T^2\mathrm{P}} = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}. \tag{10}$$

Третий закон Кеплера обеспечивает постоянство для величины μ, а из третьего закона Ньютона вытекает [1], что $\mu = \gamma M$, где γ — гравитационная постоянная, M — масса тела, являющегося центром притяжения.

Таким образом, закон силы всемирного тяготения можно окончательно записать в виде

$$\vec{F} = -\gamma\frac{mM}{r^2} \cdot \vec{r}^o. \tag{11}$$

3. Сформулируем обратную задачу: «***Определить траекторию движения материальной точки в вакууме под действием центральной притягивающей силы, подчиняющейся закону*** (11)***. В начальный момент времени точка, обладающая массой*** m ***и испытывающая на себе действие указанной силы, занимает положение, определяемое радиус-вектором*** $\vec{r}_0$***, и имеет ненулевую начальную скорость*** $\vec{V}_0$***, не направленную вдоль силовой линии. Начало полярной системы координат совмещено с телом притяжения***».

Данная задача (вторая задача динамики материальной точки) включает в себя, в частности, задачу об искусственном спутнике.

Из постановки задачи непосредственно вытекает, что для рассматриваемого движения будут выполняться:
а) закон сохранения момента количества движения (относительно притягивающего центра), поскольку действующая сила является центральной; б) закон сохранения механической энергии, поскольку силовое поле, создаваемое силой (11), является потенциальным.

Закон сохранения момента количества движения материальной точки, движущейся под действием центральной силы, имеет следующие векторную и скалярную формы:

$$\vec{r} \times m\vec{V} = \vec{r}_0 \times m\vec{V}_0 = \overrightarrow{const}$$

или

$$rV_p = r_0 V_{0p} = const. \tag{12}$$

Важно то, что из (12) непосредственно вытекает заключение о справедливости закона площадей и плоском характере траектории для движущейся материальной точки [1].

Кроме того, константа площадей $C = \left|\vec{r}_0 \times \vec{V}_0\right| = r_0 V_0 \sin(\alpha_0)$, где α_0 — угол между векторами $\vec{r}_0$ и $\vec{V}_0$, является самостоятельным ненулевым параметром, характеризующим начальные условия движения точки.

В ходе дальнейших рассуждений дополнительно докажем следующую теорему:

«***Если материальная точка движется по криволинейной траектории под действием центральной силы тяготения*** (11)***, то всегда существует такое постоянное направление*** $\vec{q}^o$***, что вектор скорости*** $\vec{V}$***, будучи разложенным по этому направлению и направлению*** $\vec{p}^o$***, поперечному к радиус-вектору, имеет обе постоянные по величине составляющие***», см. Рисунок 3.

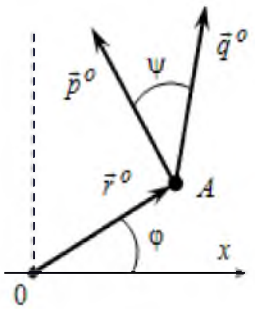

Рисунок 3

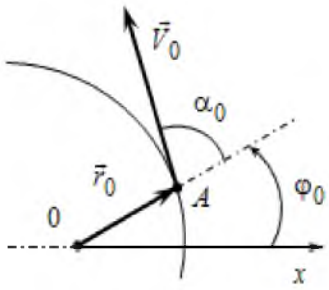

Рисунок 4

Вектор искомого направления обозначим $\vec{q}^o$, а угол между искомыми составляющими $\vec{v}_p$ и $\vec{v}_q$ вектора скорости $\vec{V}$ обозначим ψ.

Тогда, разлагая вектор скорости $\vec{V}$ в произвольной точке траектории на рассматриваемые направления $\vec{V} = \vec{v}_p + \vec{v}_q = v_p \cdot \vec{p}^o + v_q \cdot \vec{q}^o$, будем иметь выражения вида (7), т. е.,

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_p \cdot \vec{p}^o\right) + \frac{d}{dt}\left(v_q \cdot \vec{q}^o\right). \tag{13}$$

Подстановка во второй закон Ньютона $\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$ выражения (9) для действу-

ющей силы и формулы (13) для ускорения, приводит к уравнению:

$$-m\frac{\mu}{r^2}\cdot\vec{r}^o = mv_p\frac{d\vec{p}^o}{dt} + m\frac{dv_p}{dt}\vec{p}^o + m\frac{dv_q}{dt}\vec{q}^o. \tag{14}$$

Отсутствие слагаемого $mv_q\frac{d\vec{q}^o}{dt}$ в правой части векторного уравнения (14) обусловлено тем, что по условию теоремы направление $\vec{q}^o$ не зависит от времени и, следовательно, $\frac{d\vec{q}^o}{dt} = 0$.

Воспользуемся тем, что $\frac{d\vec{p}^o}{dt} = -\dot{\varphi}\cdot\vec{r}^o$, и запишем (14) в виде

$$-m\frac{\mu}{r^2}\cdot\vec{r}^o = -mv_p\dot{\varphi}\cdot\vec{r}^o + m\frac{dv_p}{dt}\vec{p}^o + m\frac{dv_q}{dt}\vec{q}^o. \tag{15}$$

Проектирование (15) на ортогональные направления $\vec{r}^o$ и $\vec{p}^o$, см. Рисунок 3, дает:

$$-\frac{\mu}{r^2} = -v_p\dot{\varphi} + \frac{dv_q}{dt}\sin\psi, \quad \frac{dv_p}{dt} + \frac{dv_q}{dt}\cos\psi = 0. \tag{16}$$

Второе уравнение (16) показывает, что постоянство по времени одной из составляющих вектора скорости (v_p или v_q) влечет за собой обязательное постоянство и другой составляющей этого вектора.

Другими словами, если $v_p = const$ и $v_q = const$, то второе уравнение (16) оказывается тождеством.

Составляющая v_q входит в оба уравнения (16) только в дифференциальной форме. Поэтому естественное предположение о том, что $v_q = const$, из первого уравнения (16) сразу дает первый искомый результат

$$v_p = \frac{\mu}{\dot{\varphi}r^2} = \frac{\mu}{C} = const. \tag{17}$$

Очевидно, что радиус-вектор можно представить в виде $\vec{r} = r\cdot\vec{r}^o$.

Тогда момент вектора скорости точки A относительно центра притяжения O можно представить в виде:

$\vec{r}\times\vec{V} = r\cdot\vec{r}^o\times(v_p\vec{p}^o + v_q\vec{q}^o) = r\cdot(v_p + v_q\cos\psi)\cdot\vec{k}^o$, где $\vec{k}^o = \vec{r}^o\times\vec{p}^o$.

Поскольку $C = \left|\vec{r}\times\vec{V}\right| = \left|\vec{r}_0\times\vec{V}_0\right|$, то получаем из предыдущего равенства $r\cdot(v_p + v_q\cos\psi) = C$ или

$$v_p + v_q\cos\psi = C/r. \tag{18}$$

Для рассматриваемого потенциального силового поля закон сохранения механической энергии можно записать в виде:

$$V^2 - 2\frac{\mu}{r} = V_0^2 - 2\frac{\mu}{r_0}. \tag{19}$$

Квадрат скорости в искомых составляющих выражается формулой

$$V^2 = \vec{V}\cdot\vec{V} = v_p^2 + v_q^2 + 2v_pv_q\cos\psi. \tag{20}$$

Подстановка (20) в закон (19) с учетом (18) и (17) дает выражение для квадрата второй искомой компоненты вектора скорости:

$$v_q^2 = \frac{\mu^2}{C^2} + V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} = const. \tag{21}$$

Полученный результат строго подтверждает сделанное выше предположение о постоянстве составляющей v_q вектора скорости.

С учетом (17) перепишем формулу (18) в виде $\frac{C}{r} = \frac{\mu}{C} + v_q \cos\psi$.

Путем несложных математических преобразований получаем

$$r = \frac{C^2/\mu}{1 + \frac{C}{\mu} v_q \cos\psi} = \frac{C^2/\mu}{1 + \frac{v_q}{v_p} \cos\psi}. \tag{22}$$

Простое сопоставление данного результата с формулой (1) свидетельствует о том, что траекторией материальной точки, движущейся под действием силы (11), является коническое сечение.

При этом искомый угол ψ оказывается полярным углом φ, отсчитываемым от большой оси орбиты.

Таким образом, искомое постоянное направление $\vec{q}^{\circ}$ является перпендикуляром к оси симметрии орбиты — оси Ox.

Данный вывод можно подкрепить следующими соображениями.

Все траектории в виде конического сечения обладают, по крайней мере, одной точкой — перицентром (здесь достигает своего минимума потенциальная энергия движущегося спутника), в которой вектор скорости $\vec{V}$ (наибольший по величине) направлен перпендикулярно к радиус-вектору $\vec{r}$, т. е. вдоль трансверсального направления $\vec{p}^{\circ}$.

Именно в этой точке два интересующих нас направления, определяемые векторами $\vec{p}^{\circ}$ и $\vec{q}^{\circ}$, становятся коллинеарными, $\vec{v}_q \uparrow\uparrow \vec{v}_p$.

При этом вектор $\vec{q}^{\circ}$ и компонента $\vec{v}_q$ будут перпендикулярны оси симметрии орбиты (ось Ox). По принятому выше условию направление $\vec{q}^{\circ}$ не должно зависеть от времени — поэтому и для других точек траектории мы будем иметь ортогональность вектора $\vec{v}_q$ главной оси симметрии орбиты.

Еще одним подтверждением сказанному является выражение (2) для радиальной составляющей $\vec{V}_r$ вектора скорости $\vec{V}$.

При значениях $\varphi = \pi \cdot n$ для полярного угла, $n \in Z$ составляющая $\vec{V}_r$ обращается в нуль, и вектор скорости будет представлен только трансверсальной составляющей, т. е. $\vec{V} = \vec{V}_p$ и $\vec{V} \perp \vec{r}$.

Следовательно, в этом случае будем иметь $\vec{V}_p = \vec{v}_p + \vec{v}_q$, что выполнимо только при условии коллинеарности направлений, определяемых векторами $\vec{p}^{\circ}$ и $\vec{q}^{\circ}$.

Если предположить, что $\vec{V}_p = \vec{v}_p + \vec{v}_q$ выполняется по причине $v_q = 0$, то, поскольку $v_q = const$, будем иметь в качестве результата движение по окружности, когда $\vec{V} = \vec{V}_p$ выполняется для любой точки круговой траектории.

Таким образом, искомое решение задачи о траектории искусственного спутника, как второй задачи динамики, найдено в виде конического сечения (1), где основные геометрические параметры орбиты вычисляются через начальные условия задачи:

$$\mathrm{P} = \frac{C^2}{\mu}, e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{\mu^2}\left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)}. \tag{23}$$

Полученный результат дает возможность непосредственного вычисления скорости искусственного спутника в апоцентре и перицентре его эллиптической орбиты.

Имеем в апоцентре $V_{\text{А}} = v_p + v_q = (1+e)\frac{\mu}{C}$
и в перицентре $V_{\Pi} = v_p - v_q = (1-e)\frac{\mu}{C}$.

Осталось ориентировать траекторию точки в пространстве (точнее в плоскости векторов $\vec{r_0}$ и $\vec{V_0}$) с использованием начальных условий.

Из Рисунка 2 следует, что

$$tg\varphi = \frac{V_r}{V_p - v_p}, \quad tg\varphi_0 = \frac{V_0 \cos\alpha_0}{V_0 \sin\alpha_0 - \frac{\mu}{C}}. \tag{24}$$

При этом радиус-вектор $\vec{r_0}$ в начальный момент времени t_0 составляет угол φ_0 с направлением оси Ox перицентра орбиты, от которой производится отсчет полярного угла в уравнении конического сечения (1), см. Рисунок 4.

Поэтому, откладывая от вектора $\vec{r_0}$ в сторону, противоположную положительному отсчету полярного угла φ, определенный в соответствии с (24) угол φ_0, будем иметь искомое положение большой оси симметрии найденной орбиты (1).

Конкретный геометрический вид траектории спутника вытекает непосредственно из (23).

Так условием круговой орбиты искусственного спутника ($e = 0$) служит одновременное выполнение начальных условий: $\alpha_0 = \pi/2$ ($v_q = 0$) и $V_0 = v_p = \sqrt{\mu/r_0}$ — первая космическая скорость.

Из выражения (23), записанного в форме уравнения $e = 1$ (для траектории в виде параболы), можно получить значение для скорости освобождения $V_0 = \sqrt{2\mu/r_0}$ — вторая космическая скорость.

Обратную задачу можно считать решенной.

Полученное решение (22)–(24) позволяет находить параметры траектории запускаемого искусственного спутника для заданного тела тяготения.

Заключение. В настоящей работе строго математически построено решение обратной задачи Ньютона — о движении свободной материальной точки под действием центрального притяжения, без выполнения непосредственного интегрирования дифференциального уравнения динамики и без использования известной формулы Бинэ [1]. Другими словами, удается чисто теоретически получить второй закон И. Кеплера при помощи лишь конечных аналитических соотношений, основанных на законах всемирного тяготения, сохранения вектора кинетического момента (для центральной силы) и сохранения механической энергии (для консервативного силового поля).

Работа является этапом кафедральной г/б НИР № 203 «Исследование вращательных движений спутника относительно центра масс под действием возмущающих моментов» (выполняется без финансирования).

1. **Бухгольц Н. Н.** Основной курс теоретической механики. Часть 1 [текст] / Н. Н. Бухгольц. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 468 с.
2. **Rauk de J**. Mouvement des planetes [text] / Rauk de J. // Annals des Association les ingeneurs de Grand. – 1956. – № 2. – P. 73–78.
3. **Де Раук**. Движение планет. Механика [текст] / Де Раук. – М.: ИИЛ, 1957. – № 3. – С. 151–158.

4. **Асланов С. К.** Один из возможных вариантов основ небесной механики в курсе теоретической механики [текст] / С. К. Асланов // Сборник научно-методических статей по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1982. – Вып. 12. – С. 54–68.